

Traitement des signaux

(2ème partie)

Section d'Electricité
5ème semestre

Prof. Pascal Frossard
Prof. Jean-Philippe Thiran
Laboratoire de traitement de signaux
EPFL



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

2

Agenda 2021

- 2ème partie - Prof. Pascal Frossard

4.11	cours	Structure des systèmes linéaires (vidéo)
10.11	Q&A	Structure des systèmes linéaires (ELD020 + zoom)
11.11	labo 4	Structure des systèmes linéaires (CO260 + zoom)
17.11	cours	Filtres RIF (vidéo)
18.11	Q&A	Filtres RIF (ELD020 + zoom)
24.11	labo 5	Filtres RIF (CO260 + zoom)
25.11	cours	Filtres RII (video)
1.12	Q&A	Filtres RII (ELD020 + zoom)
2.12	labo 6	Filtres RII (CO260 + zoom)
8.12	cours	Estimation et prédiction linéaire (vidéo)
9.12	Q&A	Estimation et prédiction linéaire (ELD020 + zoom)
15.12	labo 7	Estimation et prédiction linéaire (CO260 + zoom)
16.12	Q&A	Revision (zoom)
22.12		
23.12	Examen final	Examen sur les parties 1 et 2 du cours (ELD020)



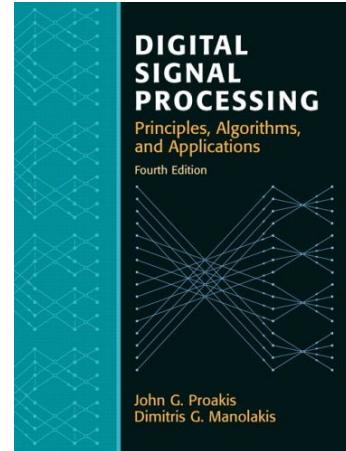
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Support de cours

- Support du cours

- Vos notes manuscrites
- Vidéos / transparents disponibles sur le moodle
- livre de référence conseillé : John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis, «Digital Signal Processing», Prentice All, 2007
 - Chapitres 10 et 12



Traitements des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Quelques transformées fréquentes

TABLE 3.3 Some Common z -Transform Pairs

	Signal, $x(n)$	z -Transform, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	All z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
6	$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$(\cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
8	$(\sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$(a^n \cos \omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
10	$(a^n \sin \omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $



Traitements des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres numériques

(Chapitre 6)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement de signal (LTS4)
EPFL



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

6

Plan

- A. *Structures des filtres numériques*
- B. Construction de filtres RIF
- C. Construction de filtres RII



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

A. Structure de filtres numériques

- Types de filtres (RIF, RII)
- Réalisations transversales et récursives
- Implémentation par approximation de filtres idéaux



Filtres numériques



- Les filtres forment une sous-classe des systèmes, les systèmes linéaires et invariants dans le temps (LTI)

Linéaire: $S[a x_1(k) + b x_2(k)] = a S[x_1(k)] + b S[x_2(k)]$

Invariant (TI): $y(k) = S[x(k)] \Leftrightarrow y(k - k_0) = S[x(k - k_0)], \forall k_0 \in \mathbb{Z}$

- Comme pour tout LTI, la réponse impulsionnelle $h(k)$ caractérise de façon univoque le système

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} x(l)h(k-l) = x(k) * h(k)$$



Réponse à une sinusoïde

- Considérons un système LTI excité par le signal

$$x(n) = Ae^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

- Par convolution, la réponse du système LTI devient

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) [Ae^{j\omega(n-k)}] = A \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \right] e^{j\omega n}$$

$H(\omega)$

$$y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n}$$

- La réponse du système est un signal avec la même fréquence, mais dont l'amplitude est changée par le système LTI de fonction de transfert $H(\omega)$
- Par linéarité, ceci s'étend à des signaux $x(n)$ qui sont des sommes de sinusoïdes simples



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

10

Exemple 1a: fonction de transfert

Determine the magnitude and phase of $H(\omega)$ for the three-point moving average (MA) system

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

and plot these two functions for $0 \leq \omega \leq \pi$.

Solution. Since

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

it follows that

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

Hence

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos\omega|$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 \leq \omega < \pi \end{cases}$$

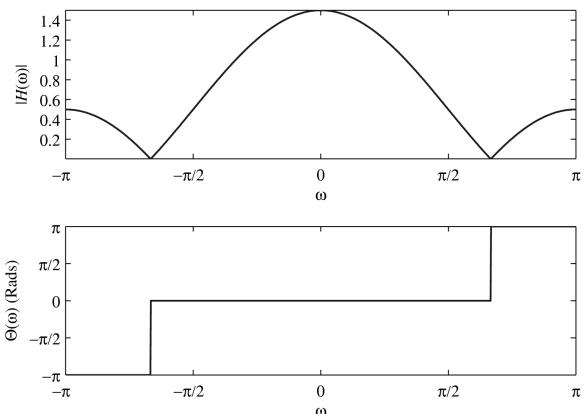


Figure 5.1.1 Magnitude and phase responses for the MA system in Example 5.1.2.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemple 1b: sinusoïde simple

- Considérons le signal d'entrée $x(n) = A \exp\left(\frac{j\pi n}{2}\right)$

- Considérons le système LTI caractérisé par

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

- On peut écrire la sortie du système

$$\text{A } \omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{on a } H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ}$$

Donc $y(n) = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ} \right) e^{j\pi n/2}$ ou $y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j(\pi n/2 - 26.6^\circ)}$



Exemple 1c: somme de sinusoïdes

- Considérons le signal d'entrée $x(n) = 10 - 5 \sin \frac{\pi}{2}n + 20 \cos \pi n$

- Considérons le système LTI caractérisé par $H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

- On peut écrire la sortie du système

$$\text{A } \omega = 0 \quad \text{on a } H(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

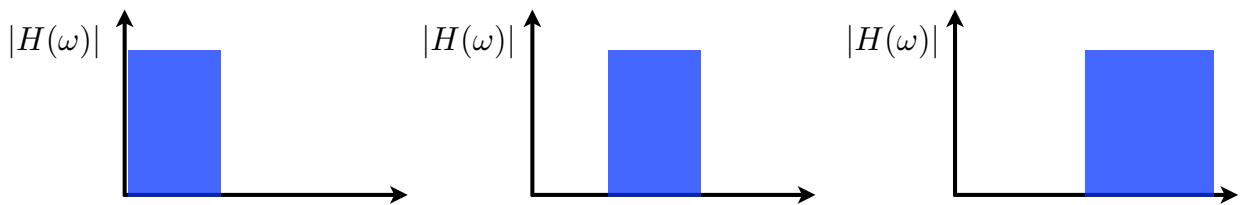
$$\text{A } \omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{on a } H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ}$$

$$\text{A } \omega = \pi \quad \text{on a } H(\pi) = \frac{2}{3}$$

Donc $y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 26.6^\circ\right) + \frac{40}{3} \cos \pi n$



Filtrage



- Le filtrage consiste à modifier le contenu fréquentiel du signal par l'action multiplicative de la transformée de Fourier de la réponse impulsionale

$$y(k) = x(k) * h(k) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)|$$

$$\arg(Y(\omega)) = \arg(X(\omega)) + \arg(H(\omega))$$

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

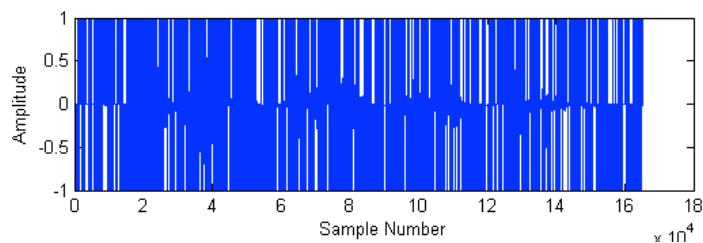


Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

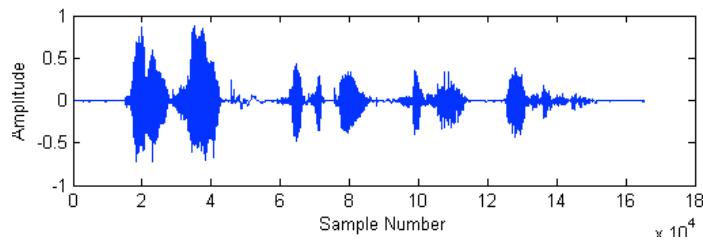
EPFL

Illustration - débruitage

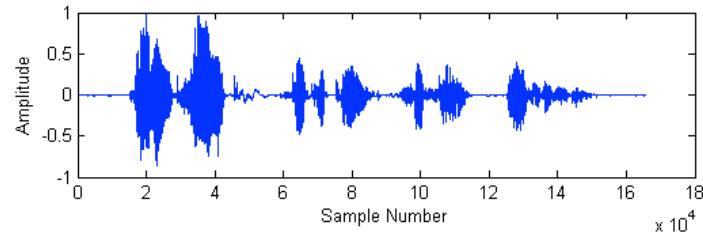
Signal bruité
(bruit impulsionnel)



Signal filtré
(filtrage médian)



Signal original



Demo from [3].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Illustration - débruitage d'image



Image bruitée



Image filtrée



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Types de filtres numériques



- Les filtres numériques sont groupés en 2 grandes familles, selon les caractéristiques de la réponse impulsionnelle.
 - les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

$$h(k) = 0, \quad \forall k \notin [k_0, k_0 + L - 1]$$

$$|h(k)| < \infty, \quad \forall k$$

- les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

$$\exists k \geq k_0 \mid h(k) \neq 0$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |h(k)| < \infty$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Fonction de transfert $H(z)$



- Les filtres numériques peuvent être caractérisés par leur fonction de transfert $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)h(k-l) \Leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

- En général, la fonction de transfert est une fonction rationnelle en z
 - en particulier, les systèmes caractérisés par:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

conduisent à

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad \text{Réalisations non-récurrentes}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad \text{Réalisations récurrentes}$$



Forme directe de filtres



- Réalisations transversale ou non-récurrentes
 - toujours réalisable pour les filtres RIF
 - p. ex., pour un système causal

$$y(k) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad y(k) = \sum_{m=0}^M h(m) x(k-m)$$

- Réalisation récurrente (équations aux différences)

- utilisée pour les filtres RII (et RIF)

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m)$$

- p.ex., pour un système causal, et $a_0 \neq 0$

$$y(k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x(k-m) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0} y(k-n)$$



Structure non-réursive (directe)

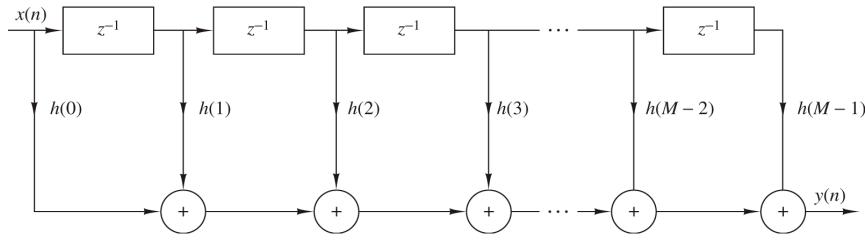


Figure 9.2.1 Direct-form realization of FIR system.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k}$$

- Structure non-réursive
 - série d'éléments retard
 - les coefficients correspondent aux valeurs de la réponse impulsionnelle
 - filtre avec zéros, sans pôle

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

20

Structure récursive (directe)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = H_1(z)H_2(z)$$

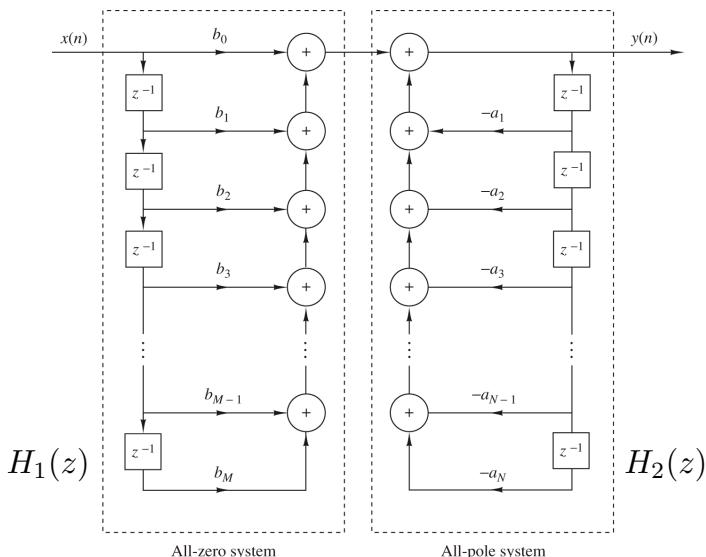


Figure 9.3.1 Direct form I realization.

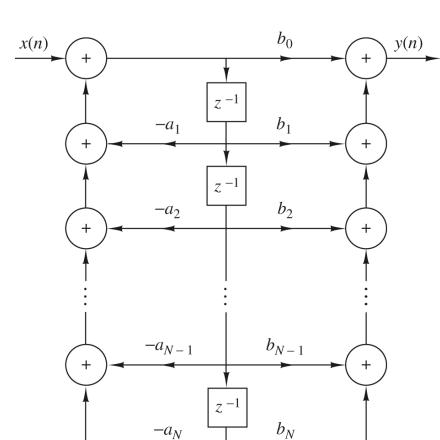


Figure 9.3.2 Direct form II realization ($N = M$).

(Structure canonique équivalente)

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemple 2: filtres simples

- Le moyenneur (RIF, non-récuratif): $y(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M x(n-m)$

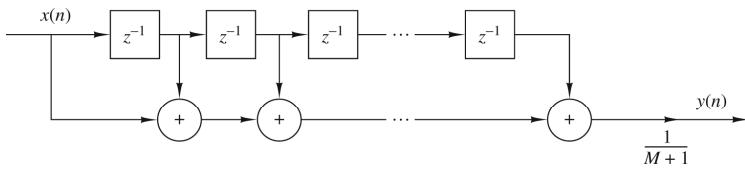
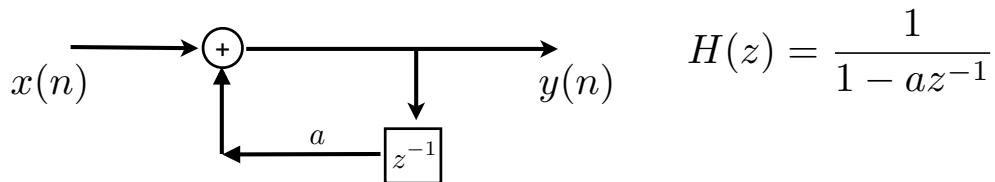


Figure 2.5.5 Nonrecursive realization of an FIR moving average system.

Figure from [1].

- L'accumulateur (RII, récuratif): $y(n) = x(n) + ay(n-1)$



Struct. des filtres numériques

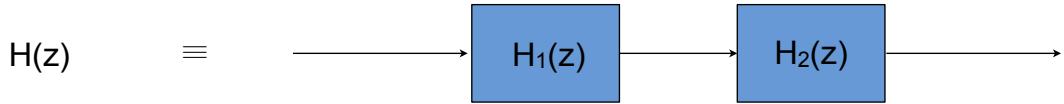


- A partir de la fonction de transfert ou de la réponse impulsionnelle, on peut construire un filtre numérique sous plusieurs formes
 - le choix dépend en particulier du type du filtre (RII ou RIF)
 - le choix dépend aussi de contraintes d'implémentation (stabilité, etc)
- Filtres RIF
 - Forme directe (filtre 'tout-zéro', donné par la réponse impulsionnelle)
 - Forme en cascade (produits de filtres de 2ème ordre)
 - Forme à échantillonnage de fréquence (structure parallèle)
 - Forme en treillis
- Filtres RII
 - Forme directe (implémentation de la structure récursive, formes I ou II)
 - Forme en cascade (produits de filtres de 2ème ordre)
 - Forme parallèle (somme de filtres de 2ème ordre)
 - Forme en treillis ou treillis-échelle

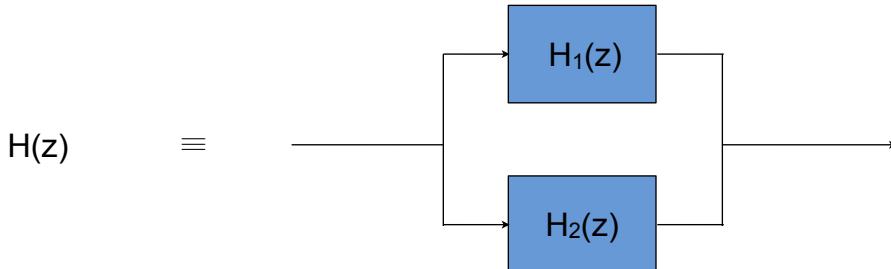


Décomposition en filtres simples

- Les filtres numériques sont souvent réalisés par une décomposition en filtres élémentaires
 - structure en série (cascade)



- structure en parallèle



Modules: filtres du 2ème ordre

TABLE 9.1 Some Second-Order Modules for Discrete-Time Systems

Structure	Implementation Equations	System Function
Direct Form I	$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Regular Direct Form II	$w(n) = -a_1w(n-1) - a_2w(n-2) + x(n)$ $y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + b_2w(n-2)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Transposed Direct Form II	$y(n) = b_0x(n) + w_1(n-1)$ $w_1(n) = b_1x(n) - a_1y(n) + w_2(n-1)$ $w_2(n) = b_2x(n) - a_2y(n)$	$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

Table from [1].



Factorisation de $H(z)$

$$H(z) = \frac{b_0 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}{a_0 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

- Par le théorème fondamental de l'algèbre on peut toujours factoriser $H(z)$ en produits de facteurs (zéros / pôles)

$$H(z) = \frac{p_0 \prod_{m=1}^M (1 - z_m z^{-1})}{d_0 \prod_{n=1}^N (1 - p_n z^{-1})} = z^{N-M} \frac{p_0 \prod_{m=1}^M (z - z_m)}{d_0 \prod_{n=1}^N (z - p_n)}$$

- Les pôles et zéros sont donnés respectivement par $\{p_n\}$ et $\{z_m\}$
- Le système a un pôle ou zéro d'ordre $|N-M|$ en $z=0$.



Décomposition en série

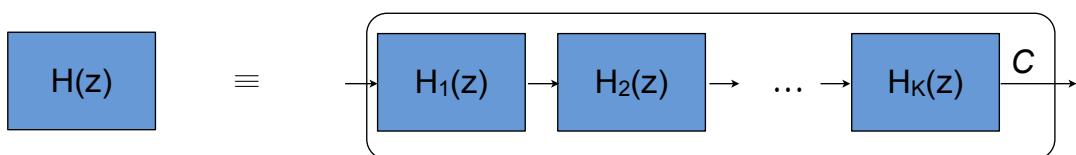


- Par factorisation, on obtient une décomposition de la forme:

$$H(z) = C H_1(z) H_2(z) \dots H_K(z)$$

- C est une constante, et les autres termes représentent des systèmes qui ont des pôles ou zéros réels simples, ou en paires complexes conjuguées

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1} z^{-1}}{1 - a_i z^{-1}} \quad \text{ou} \quad H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2}}{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}}$$



Série de filtres de 2ème ordre

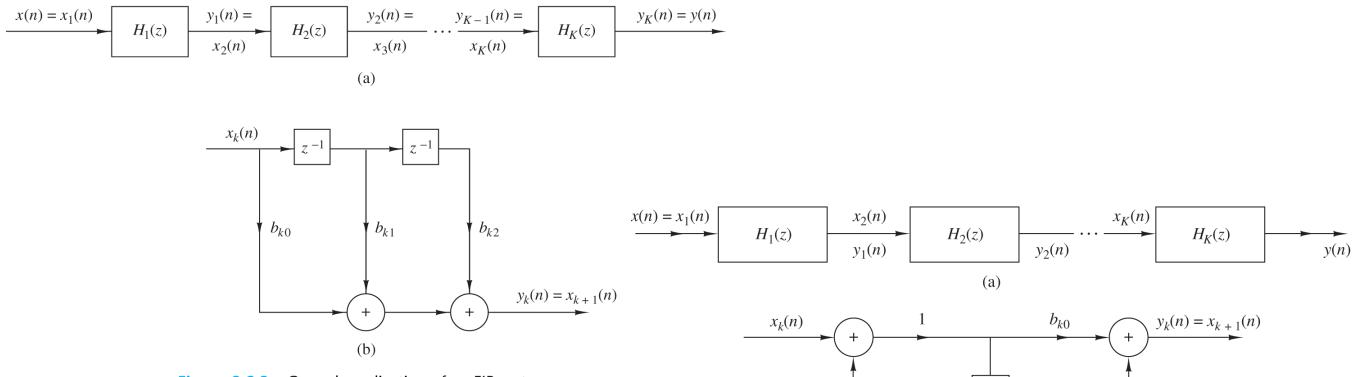


Figure 9.2.3 Cascade realization of an FIR system.

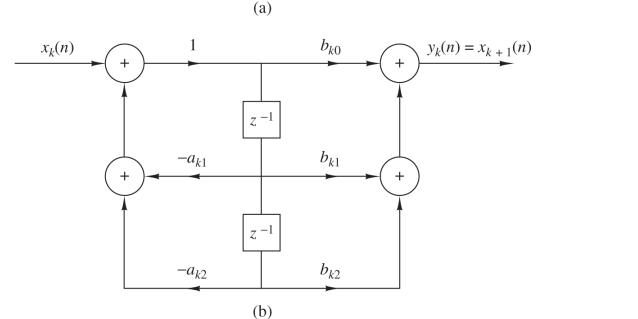


Figure 9.3.8 Cascade structure of second-order systems and a realization of each second-order section.

Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemple 3

- Considérons la fonction système suivante

$$H(z) = \frac{10(1 - 1/2z^{-1})(1 - 2/3z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 3/4z^{-1})(1 - 1/8z^{-1})[1 - (1/2 + j1/2)z^{-1}][1 - (1/2 - j1/2)z^{-1}]}$$

- On peut la décomposer en

$$H_1(z) = \frac{1 - 2/3z^{-1}}{1 - 7/8z^{-1} + 3/32z^{-2}} \quad H_2(z) = \frac{1 + 3/2z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 1/2z^{-2}}$$

- Ce qui donne

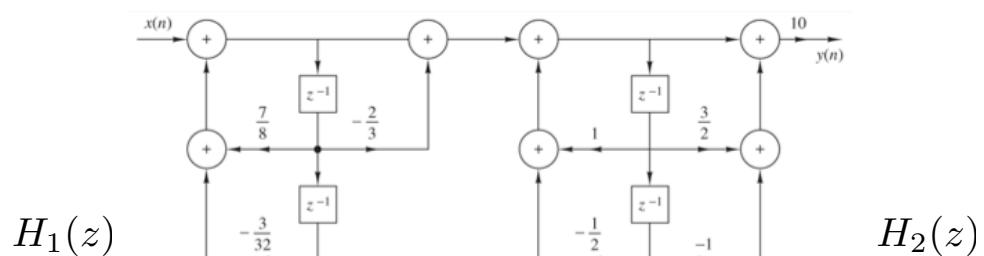


Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

H(z) en fractions partielles



- On peut obtenir une décomposition en fractions partielles où

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}$$

- $S(z)$ est un polynôme de degré $M-N$ si $M > N$ (ou C si $M=N$)
- le degré de P_0 est inférieur à celui de Q_0

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{z - p_i} \quad \alpha_i = (z - p_i) \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \Big|_{z=p_i}$$

- s'il y a des pôles multiples (p.ex. un pôle d'ordre q)

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j}{(z - p_k)^j}$$

$$\beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{\partial^{q-j}}{\partial z^{q-j}} \left[(z - p_k)^q \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \right] \Big|_{z=p_k}$$



Décomposition en parallèle

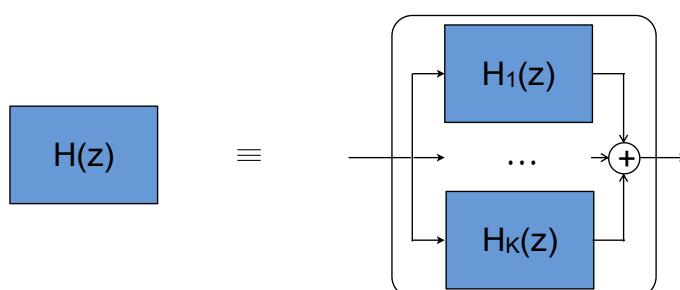
- La décomposition en fractions partielles donne

$$H(z) = S(z) + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_K(z)$$

- S'il n'y a que des pôles simples (ou conjugués complexes)

$$H_i(z) = \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} \quad \text{ou} \quad H_i(z) = \frac{b_{i_0} + b_{i_1} z^{-1}}{1 + a_{i_1} z^{-1} + a_{i_2} z^{-2}}$$

- On a donc $H(z) = \sum_{k=1}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{K_1} H_k^1(z) + \sum_{k=1}^{K_2} H_k^2(z)$



Exemple 4

- Considérons un système causal avec

$$H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \quad |z| > 2$$

- $S(z)$ est nul. Les pôles de $H(z)$ sont donnés par les zéros du dénominateur: $z^{-1} = 1$ et $z^{-1} = 1/2$
- On a donc $H(z) = \frac{1/2}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 1/2)} = \frac{\alpha_1}{z^{-1} - 1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1} - 1/2}$

- En utilisant la relation pour déterminer les coefficients

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{1}{z^{-1} - 1/2} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Comme $x(k) = a^k u(k) \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$, pour $|z| > |a|$
- Sa réponse impulsionnelle est

$$h(k) = (2^{k+1} - 1)u(k)$$



Exemple 5 - équ. série/parallèle

- Donner les réalisations en série et parallèle pour le système

$$H(z) = \frac{10(1 - 1/2z^{-1})(1 - 2/3z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 3/4z^{-1})(1 - 1/8z^{-1})(1 - (1/2 + j/2)z^{-1})(1 - (1/2 - j/2)z^{-1})}$$

- La réalisation en série peut s'obtenir par groupement de termes

$$H_1(z) = \frac{1 - 2/3z^{-1}}{1 - 7/8z^{-1} + 3/32z^{-2}} \quad H_2(z) = \frac{1 + 3/2z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + 1/2z^{-2}} \quad H(z) = 10H_1(z)H_2(z)$$

- La réalisation parallèle résulte de l'expansion en fractions partielles

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - 3/4z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 1/8z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - (1/2 + j/2)z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1 - (1/2 - j/2)z^{-1}}$$

- en groupant les termes, on obtient

$$H(z) = \frac{-14.75 - 12.90z^{-1}}{1 - 7/8z^{-1} + 3/32z^{-2}} + \frac{24.50 + 26.82z^{-1}}{1 - z^{-1} + 1/2z^{-2}}$$



Exemple 5 - réalisations équivalentes

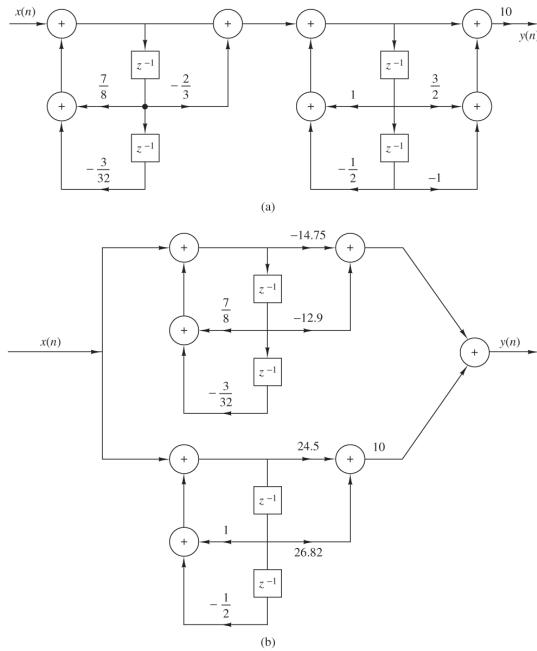


Figure 9.3.11 Cascade and parallel realizations for the system in Example 9.3.1.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres en treillis (lattice)



- Structure applicable à des filtres RIF et RII
- Structure modulaire et stable, très utilisée en pratique
 - traitement de la parole
 - traitement du signal en géophysique
 - filtrage adaptatif
- Construction de filtres en treillis
 - Structure RIF et équivalence avec la forme directe
 - Structure RII tout-pôle par inversion du filtre RIF (tout-zéro)
 - Filtre RII générique par intégration des structures en échelle et treillis tout-pôle



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Séquences de filtres RIF

- Considérons une séquence de filtres RIF (tout-zéro):
 - chaque filtre est caractérisé par

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k)z^{-k}$$

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^m \alpha_m(k)x(n-k)$$

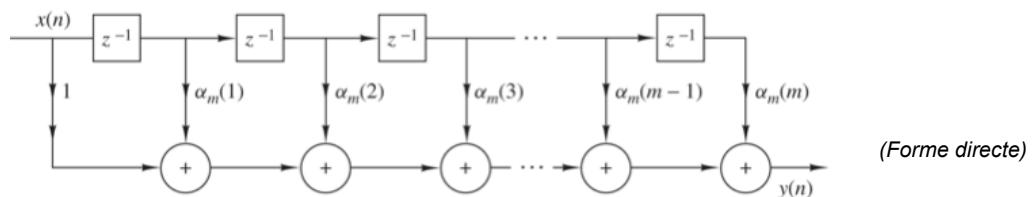


Figure de [1].



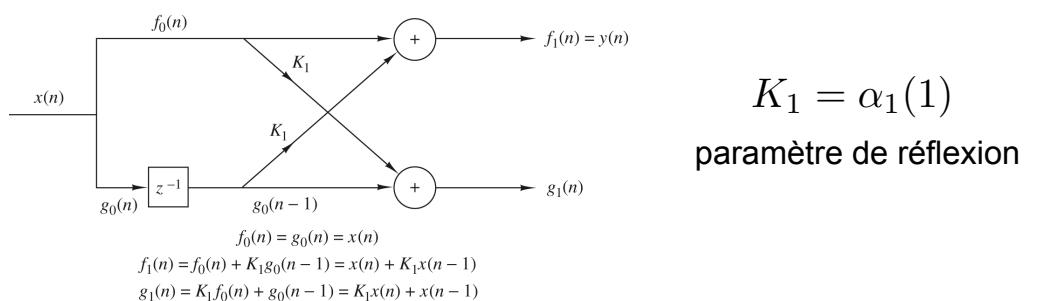
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

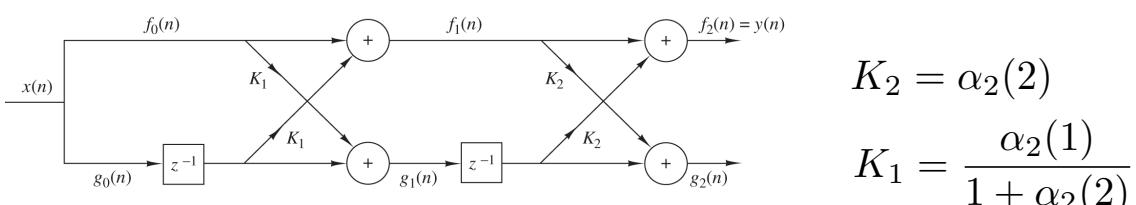
Filtre RIF en treillis



- Filtre du premier ordre: $y(n) = x(n) + \alpha_1(1)x(n-1)$



- 2ème ordre: $y(n) = x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + \alpha_2(2)x(n-2)$



Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtre RIF en treillis d'ordre M-1

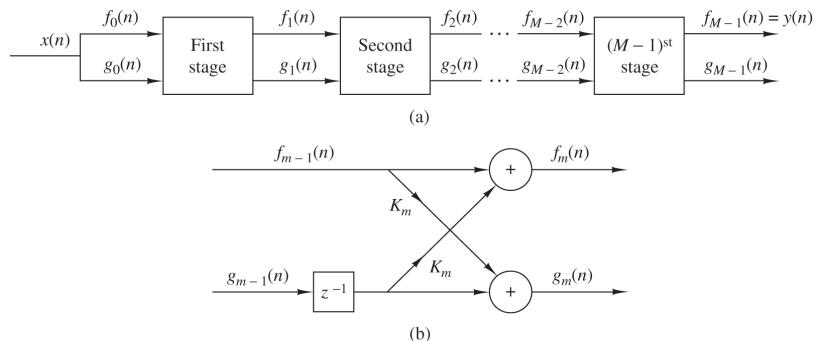


Figure 9.2.11 (M - 1)-stage lattice filter.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(n) = g_0(n) = x(n) \\ f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1), \quad m = 1, \dots, M-1 \\ g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \quad m = 1, \dots, M-1 \end{array} \right. \rightarrow y(n) = f_{M-1}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{M-1}(k)x(n-k), \quad \alpha_{M-1}(0) = 1$$

Equivalence avec RIF d'ordre M-1

$$H_{M-1}(z) = \frac{F_{M-1}(z)}{X(z)}$$

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Et l'autre sortie du filtre en treillis?

- Filtre du premier ordre: $g_1(n) = K_1 x(n) + x(n-1)$ avec $K_1 = \alpha_1(1)$
- Filtre du 2ème ordre:

$$\begin{aligned} g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\ &= K_2 x(n) + K_1(1 + K_2)x(n-1) + x(n-2) \\ &= \alpha_2(2)x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + x(n-2) \end{aligned}$$

- On remarque que les coefficients sont les mêmes que pour le filtre $A_m(z)$, mais dans l'ordre inverse:

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^m \beta_m(k)x(n-k)$$

avec $\boxed{\beta_m(k) = \alpha_m(m-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m$ et $\beta_m(m) = 1$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Fonctions de transfert du treillis

- Première sortie: $A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)}$
- Deuxième sortie (polynôme réciproque): $B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)}$

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^m \alpha_m(m-k)z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^m \alpha_m(l)z^{l-m} = z^{-m} \sum_{l=0}^m \alpha_m(l)z^l \\ &= z^{-m} A_m(z^{-1}) \end{aligned}$$



Forme récursive en z

- On peut écrire les équations récursives du treillis dans le domaine z:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= G_0(z) = X(z) \\ F_m(z) &= F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \\ G_m(z) &= K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

- En divisant par X(z):

$$\begin{aligned} A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\ A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \\ B_m(z) &= K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

- Ou alors:

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$



Filtre treillis tout-pôle à partir de RIF

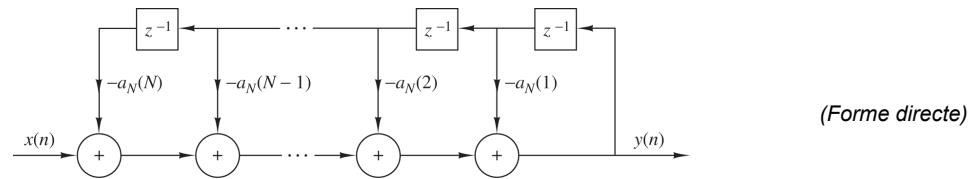


Figure 9.3.12 Direct-form realization of an all-pole system.

- Système tout-pôle: $H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)}$
 $y(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k)y(n-k) + x(n)$
- Si on inverse entrée et sortie, on a $y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k)$
 - c'est la réponse d'un filtre RIF $H(z) = A_N(z)$
 - le système tout-pôle peut être obtenu à partir du système RIF en inter-changeant entrée et sortie

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtre treillis tout-pôle

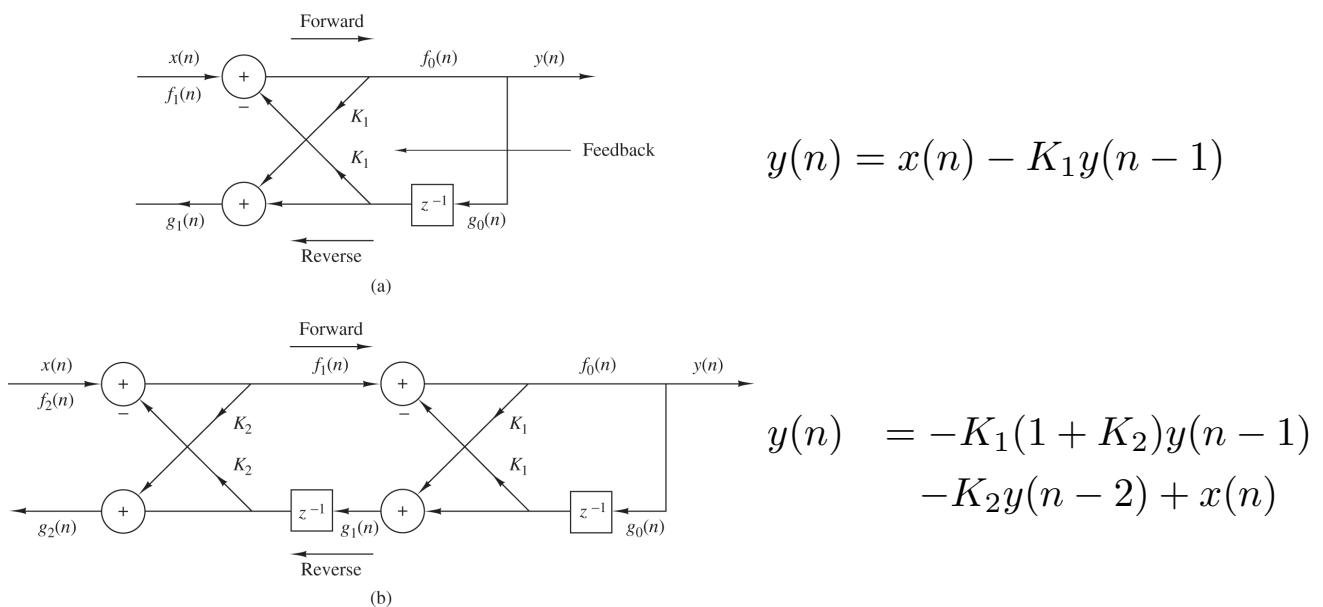


Figure de [1].

Figure 9.3.14 Single-pole and two-pole lattice system.

- Stable si tous les pôles sont dans le cercle unité: $|K_m| < 1, \forall m$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres avec pôles et zéros

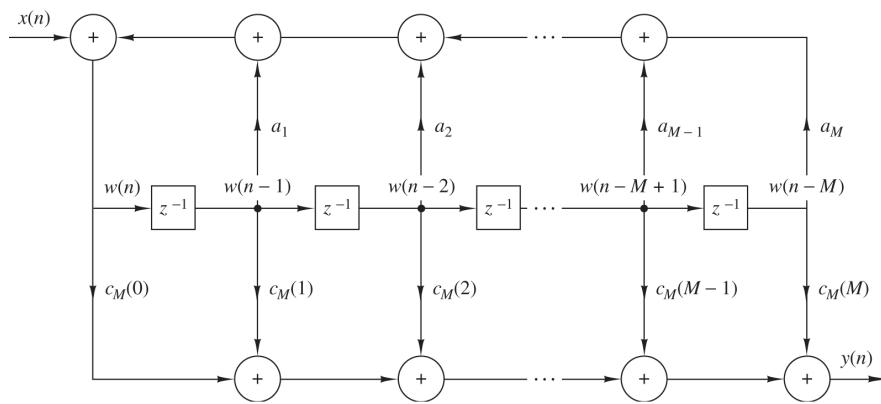


Figure 9.3.15 Direct form II realization of IIR system.

Figure de [1].

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_M(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}$$

$$w(n) = -\sum_{k=1}^N a_N(k)w(n-k) + x(n) \quad y(n) = \sum_{k=0}^M c_M(k)w(n-k)$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Structure en treillis-échelle

- Filtre RII avec à la fois des pôles et des zéros (lattice-ladder)
 - transposition de la forme canonique

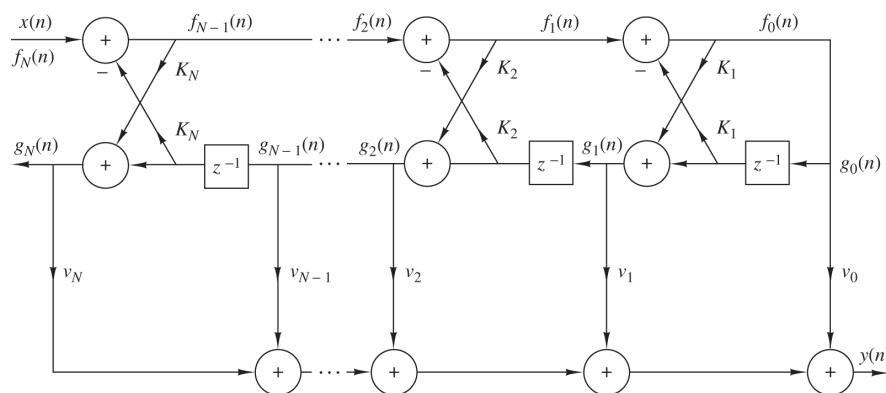


Figure de [1].

Figure 9.3.16 Lattice-ladder structure for the realization of a pole-zero system.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M v_m g_m(n) \quad \rightarrow \quad C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m B_m(z)$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Struct. à échantillonnage de fréq.

- Construction par échantillonnage de la réponse fréquentielle $H(\omega)$ à $\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha)$

$$H(k + \alpha) \equiv H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1} \right)^n \right]$$

- Forme générale:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}}$$

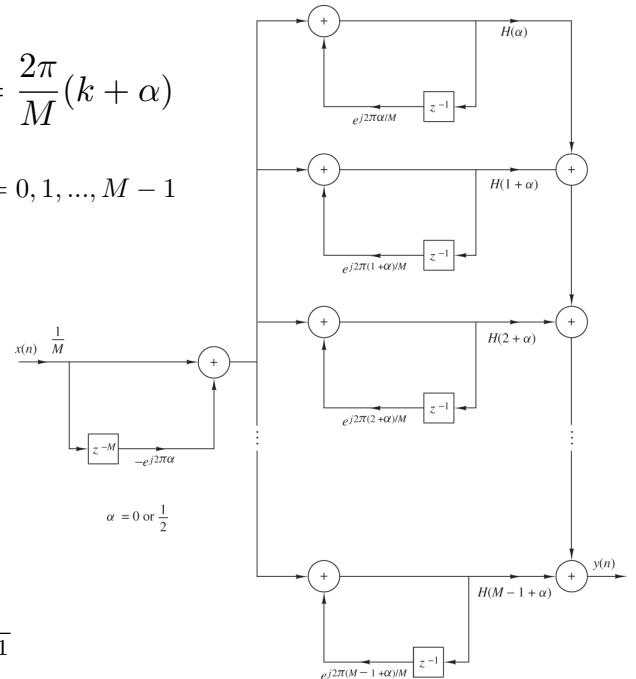


Figure de [1].

Figure 9.2.5 Frequency-sampling realization of FIR filter.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Analyse de H(z)

- La réponse d'un filtre dépend du placement des pôles et zéros dans le cercle unité

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{m=1}^M (1 - z_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - p_n z^{-1})}$$

- Interprétation géométrique

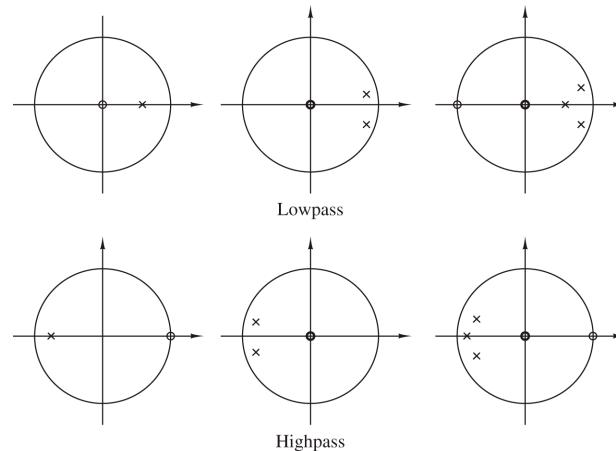


Figure 5.4.2 Pole-zero patterns for several lowpass and highpass filters.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemples de filtres à pôle simple

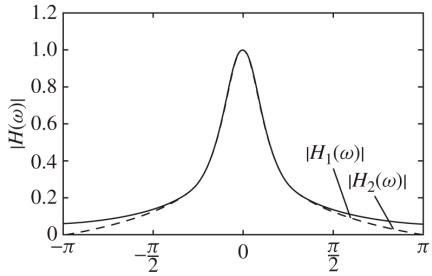


Figure 5.4.3 Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter; $H_1(z) = (1 - a)/(1 - az^{-1})$, $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 + z^{-1})/(1 - az^{-1})]$ and $a = 0.9$.

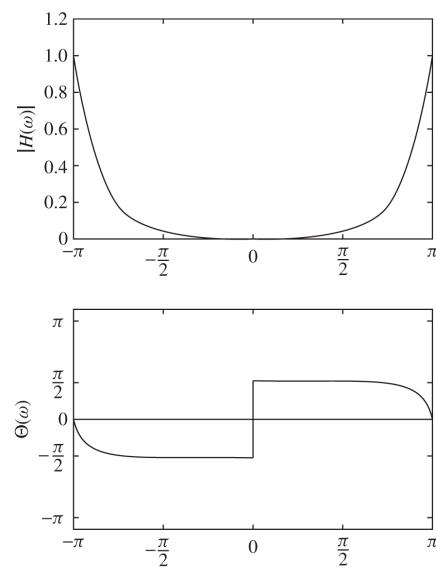


Figure 5.4.4 Magnitude and phase response of a simple highpass filter; $H(z) = [(1 - a)/2][(1 - z^{-1})/(1 + az^{-1})]$ with $a = 0.9$.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Exemples de filtres simples

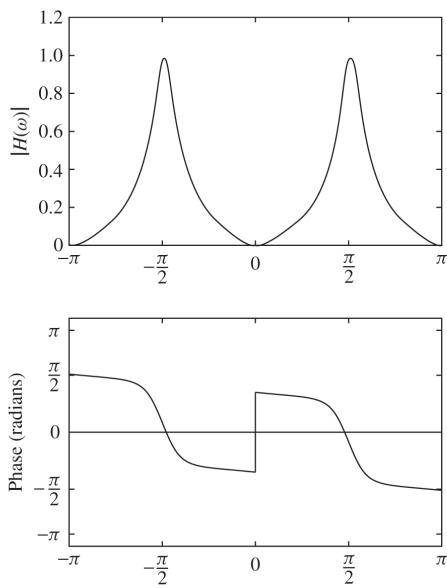


Figure 5.4.5 Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2; $H(z) = 0.15[(1 - z^{-2})/(1 + 0.7z^{-2})]$.

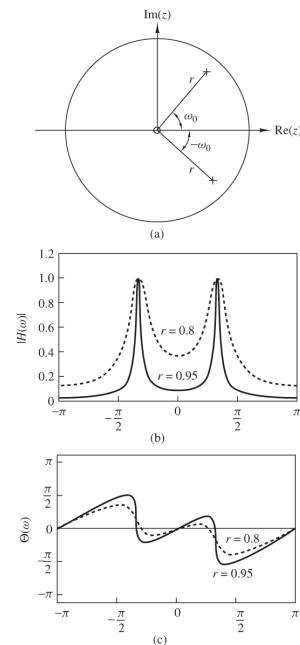


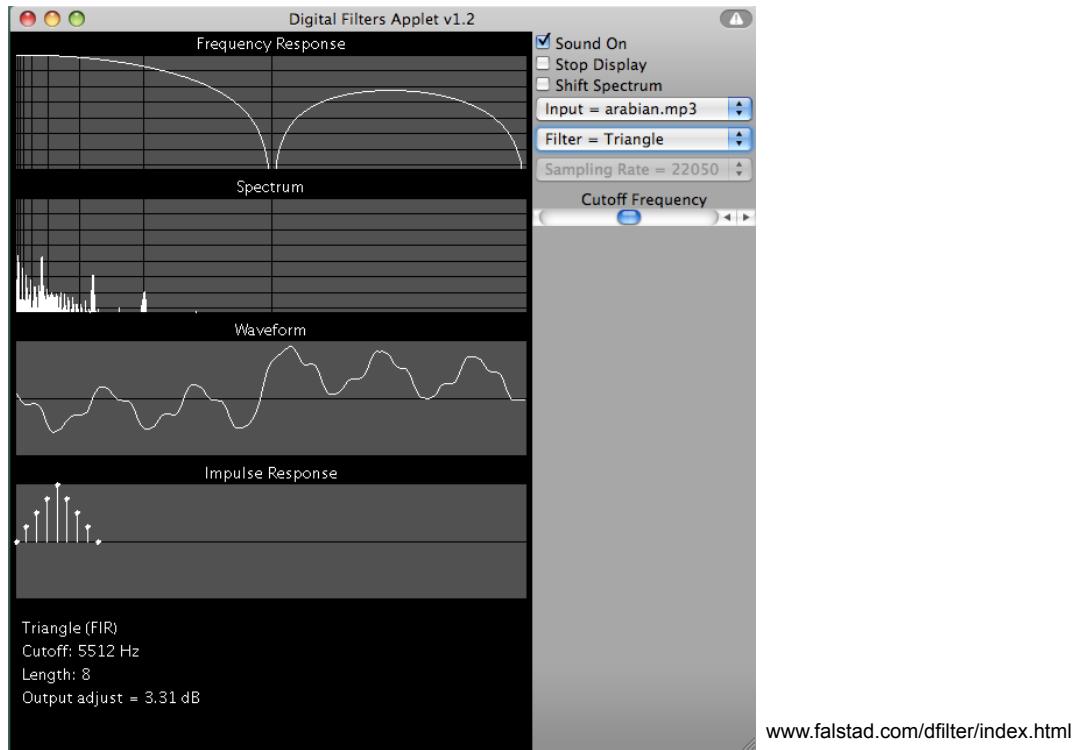
Figure 5.4.6 (a) Pole-zero pattern and (b) the corresponding magnitude and phase response of a digital resonator with (1) $r = 0.8$ and (2) $r = 0.95$.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Let's play...



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

50

Constr. de filtres numériques



- Objectif: trouver les coefficients qui donnent une bonne approximation de la réponse désirée, sous une contrainte de causalité
 - Méthodes spécifiques aux filtres numériques
 - Méthodes d'approximation de filtres analogiques
- En général, on préfère les filtres RII
 - Oscillations plus petites dans la bande coupée
 - Implémentation avec moins de paramètres que RIF
- Filtres RIF si la réponse de phase doit être linéaire:

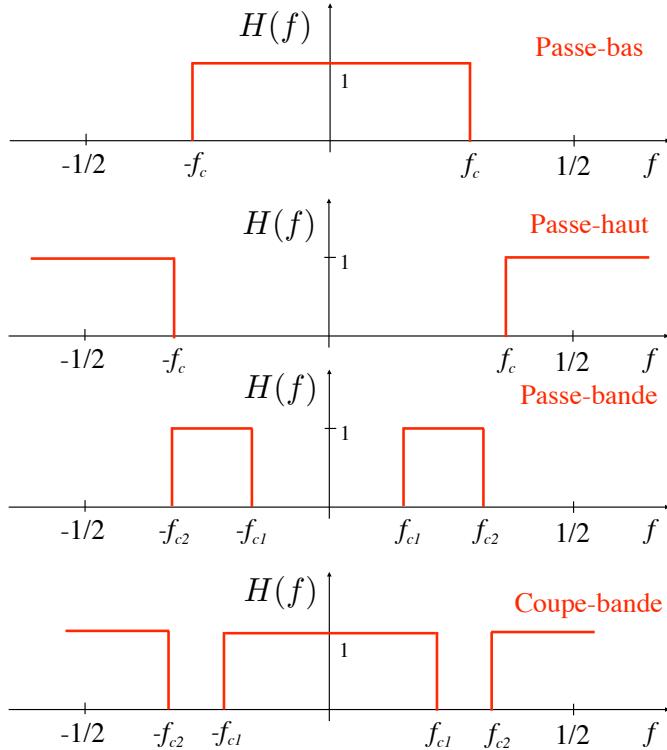
$$\arg(H(\omega)) = \beta + \alpha\omega$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Classification des filtres idéaux



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Idéal n'est pas causal...



- En traitement de signal temps réel, on ne peut réaliser que des filtres causals
- Considérons le filtre passe-bas idéal:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{pour } \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{pour } n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}, & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

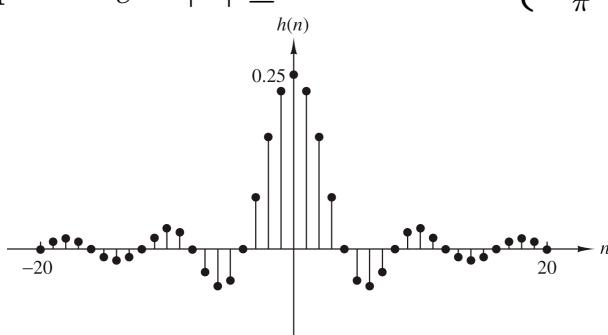


Figure 10.1.1 Unit sample response of an ideal lowpass filter.

- Ce filtre est clairement non-causal, donc non réalisable

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Conditions de causalité

- Théorème de Paley-Wiener
 - Si $h(k)$ a une énergie finie, et $h(k) = 0$ pour $k < 0$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(\omega)|| d\omega < \infty$$

- A l'inverse, si $|H(\omega)|^2$ est intégrable et si l'intégrale ci-dessus est finie, alors $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega)}$ représente un filtre causal

- La magnitude d'un filtre causal ne peut donc être identiquement nulle sur une bande de fréquence finie.
 - *Un filtre idéal ne peut être causal*



Relation entre comp. réelles et imag.

- On peut décomposer la réponse impulsionnelle en parties paire et impaire

$$h(k) = h_e(k) + h_o(k)$$

- Si $h(k)$ est causal

$$h(k) = 2h_e(k)u(k) - h_e(0)\delta(k), \quad k \geq 0$$

$$h(k) = 2h_o(k)u(k) + h(0)\delta(k), \quad k \geq 1$$

$$h_e(k) = h_o(k), \quad k \geq 1$$

- Par Fourier, $h_e(k) \leftrightarrow H_R(\omega)$ et $h_o(k) \leftrightarrow H_I(\omega)$
- Donc les parties réelle et imaginaire sont inter-dépendantes, pour un système causal

- transf. de Hilbert discrète $H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda$



Contraintes due à la causalité

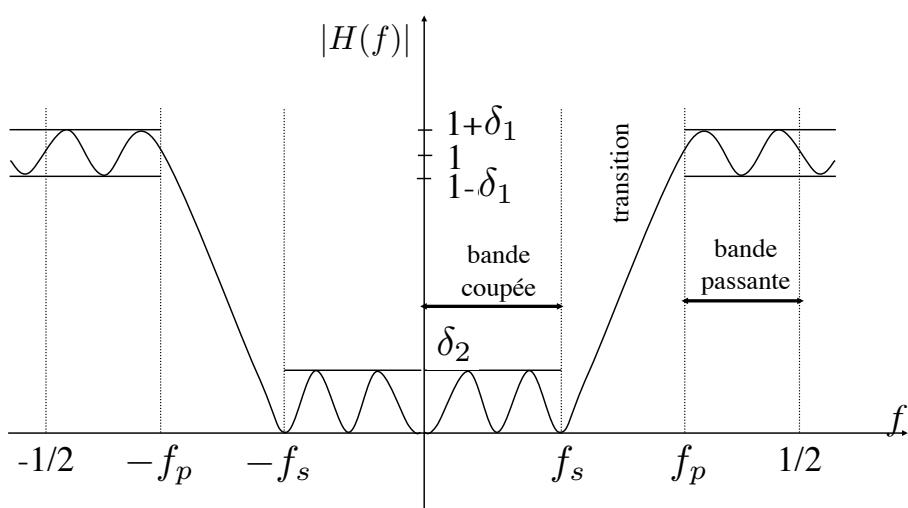
- La condition de causalité pour les systèmes pratiques, implique:
 - la réponse fréquentielle du filtre ne peut être nulle qu'en un certain nombre fini de points
 - les transitions entre bandes passante et coupée ne peuvent pas être arbitrairement abruptes
 - les parties imaginaires et réelles de la réponse fréquentielle sont liées par la transformée de Hilbert discrète
 - l'amplitude et la phase de la réponse fréquentielle ne peuvent être choisies arbitrairement
- On se limite ici aux systèmes décrits par l'équation aux différences
 - et en particulier aux systèmes causals et physiquement réalisables

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



Approximation de la réponse idéale

- Caractéristiques spécifiées dans le domaine fréquentiel
 - Caractéristiques données par un gabarit
 - Réponses d'amplitude et de phase (inter-dépendantes en pratique)



Filtres numériques

(Chapitre 6)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement de signal (LTS4)
EPFL



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

60

Plan

- A. Structures des filtres numériques
- B. *Construction de filtres RIF*
- C. Construction de filtres RII



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

B. Filtres RIF

- Caractéristiques de filtres RIF
- Synthèse par fenêtrage
- Synthèse par échantillonnage fréquentiel



Caractéristiques des filtres RIF



- Les filtres RIF sont toujours stables
 - Si les valeurs de la réponse impulsionnelle sont bornées
- Ils sont définis par les éléments de leur réponse impulsionnelle
- Ils peuvent être représentés par un polynôme de degré $M-1$ en z^{-1} (ou en z)
 - A partir de la réponse impulsionnelle
- Ils sont causals si leur réponse impulsionnelle $h(k)$ est nulle pour $k < 0$
 - Sinon, il suffit de décaler cette réponse.
- Ils peuvent être à phase linéaire

$$\arg(H(\omega)) = \beta + \alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\beta = 0 \text{ or } \pm \pi/2 \text{ or } -\pi$$

$$\alpha = \text{const}$$



Filtres RIF à réponse de phase nulle

- Idéalement, une phase nulle permet d'éviter la distorsion de phase
- Pour avoir une phase nulle, il faut que la partie imaginaire soit nulle

$$H(f) = \sum_{k=k_0}^{k_0+M-1} h(k) e^{-j2\pi f k}$$

$$H(f) = \sum_{k=k_0}^{k_0+M-1} h(k) \cos 2\pi f k - j \left[\sum_{k=k_0}^{k_0+M-1} h(k) \sin 2\pi f k \right]$$

- il faut que la réponse impulsionnelle soit paire

$$h(k) = h(-k), \text{ pour } |k| \leq \frac{M-1}{2}$$

- un tel filtre n'est par contre pas causal, donc pas *réalisable*



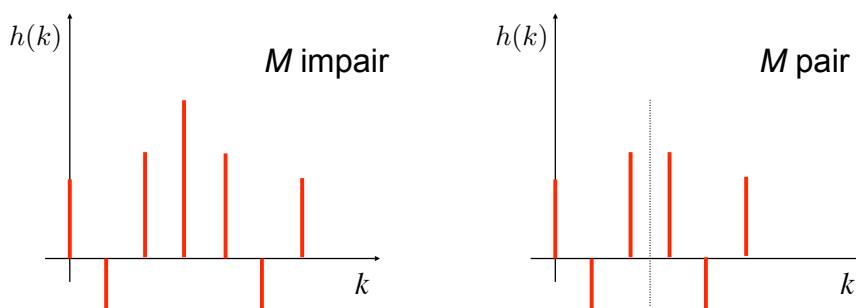
Filtres RIF à phase linéaire



- On peut rendre causal le filtre à réponse de phase nulle, par décalage de la réponse impulsionnelle

$$H'(f) = H(f) e^{-j\pi f(M-1)}$$

- la phase devient alors linéaire: $\arg(H'(f)) = -\pi(M-1)f = -\frac{\omega(M-1)}{2}$
- la condition de symétrie devient $h(k) = h(M-1-k)$



RIF causal: symétrie/asymétrie

- Un filtre RIF causal peut être caractérisé par: $H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k}$

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x(k-m) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(k-m)$$

- Si le filtre est à phase linéaire

$$h(k) = \pm h(M-1-k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

- En utilisant ces propriétés de symétrie, on peut écrire

$$z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z)$$

- Les zéros de $H(z^{-1})$ sont aussi les zéros de $H(z)$
 - si z est un zéro, $1/z$ est aussi un zéro, de même que z^* et $1/z^*$ si $h(n)$ est réelle



RIF causal à ph. linéaire: zéros

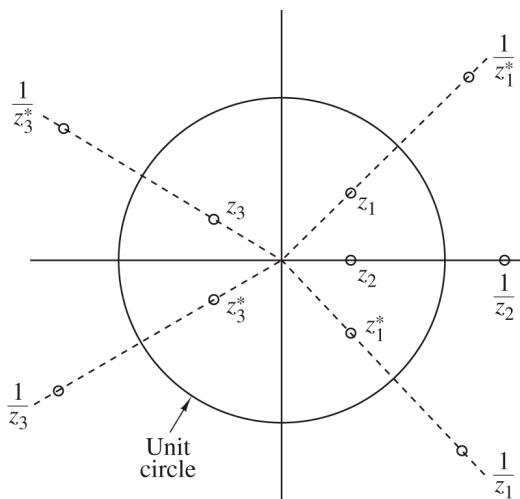


Figure 10.2.1 Symmetry of zero locations for a linear-phase FIR filter.



Construction de filtres RIF



- Filtres RIF donnés par:
- $$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k}$$

- Construction à partir de l'objectif $H_d(\omega)$

- Synthèse par séries de Fourier
 - Approximation analytique de $h(k)$
 - Un fenêtrage est généralement nécessaire
- Echantillonnage fréquentiel

$$H_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$

- Réalisation à partir de la réponse impulsionnelle $h(k)$

- Convolution directe / TFD
- Réalisation non-réursive ou récursive



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Synthèse par fenêtrage



- Construction par approximation de la réponse impulsionnelle
- La réponse impulsionnelle désirée est généralement infinie

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- On peut la limiter en multipliant par une fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad h(n) = h_d(n)w(n)$$

- Cela équivaut à une convolution dans le domaine fréquentiel

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\nu) W(\omega - \nu) d\nu$$

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j\omega n}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Fenêtre rectangulaire: choix naturel

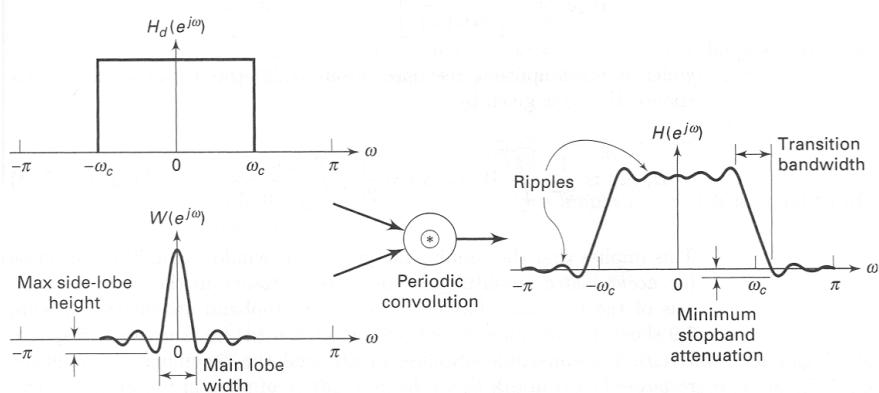


FIGURE 7.8 Windowing operation in the frequency domain

$$W(\omega) = \frac{\sin \omega M/2}{\sin \omega/2} e^{-j\omega(M-1)/2}$$

$$|W(\omega)| = \frac{|\sin (\omega M/2)|}{|\sin (\omega/2)|}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\arg(W(\omega)) = \begin{cases} -\omega \frac{M-1}{2}, & \text{pour } \sin(\omega M/2) \geq 0 \\ -\omega \frac{M-1}{2} + \pi, & \text{pour } \sin(\omega M/2) < 0 \end{cases}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Quelle fenêtre?

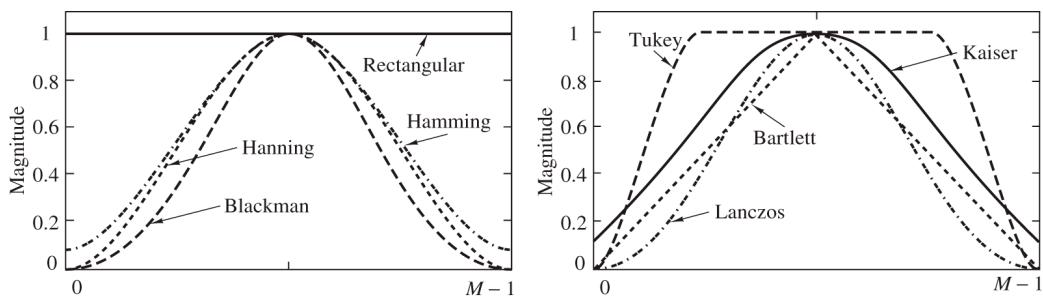


Figure 10.2.3 Shapes of several window functions.

- Le type de fenêtre influence la largeur du lobe principal, et la décroissance des lobes latéraux, dans la réponse fréquentielle
- Choix de la fenêtre
 - Compromis entre effets de Gibbs et lissage
- Choix de la taille de la fenêtre
 - On peut se baser sur la réponse impulsionnelle si elle est connue
 - On peut prendre en compte la résolution spectrale

Figure de [1].



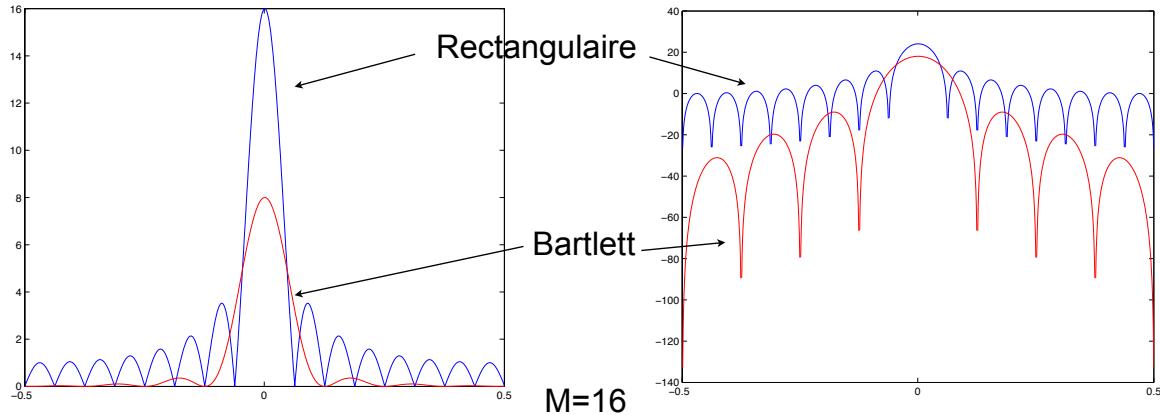
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Fenêtre triangulaire (Bartlett)

$$w_T(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2|k|}{M}, & |k| \leq M/2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$W_T(\omega) = \frac{2}{M} \left(\frac{\sin \pi \omega M/2}{\sin \pi \omega} \right)^2$$



Hanning et Hamming

$$w_H(k) = \begin{cases} (1 - \alpha) + \alpha \cos \frac{2\pi k}{M-1} & 0 \leq k \leq M-1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 0.5 & \quad \text{Hanning} \\ \alpha = 0.46 & \quad \text{Hamming} \end{aligned}$$

- But: atténuer les lobes secondaires
 - Superposition linéaire de trois répliques de la même fenêtre spectrale, avec un décalage de $1/M$

$$w_H(k) = \frac{\alpha}{2} \left(e^{j2\pi k/M} + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} + e^{-j2\pi k/M} \right)$$



Et les autres...

TABLE 10.1 Window Functions for FIR Filter Design	
Name of window	Time-domain sequence, $h(n), 0 \leq n \leq M - 1$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$
Lanczos	$\left\{ \frac{\sin \left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L, L > 0$ $1, \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \alpha \frac{M-1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1$
Tukey	$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right]$ $\alpha(M-1)/2 \leq \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \frac{M-1}{2}$



Exemple: Filtre RIF passe-bas

- En tenant compte de la condition de causalité

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1e^{-j\omega(M-1)/2}, & \text{pour } 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin \omega_c(n-(M-1)/2)}{\pi(n-(M-1)/2)}, \quad n \neq (M-1)/2$$

- Après application d'une fenêtre rectangulaire

$$h(n) = \frac{\sin \omega_c(n-(M-1)/2)}{\pi(n-(M-1)/2)}, \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad n \neq (M-1)/2$$

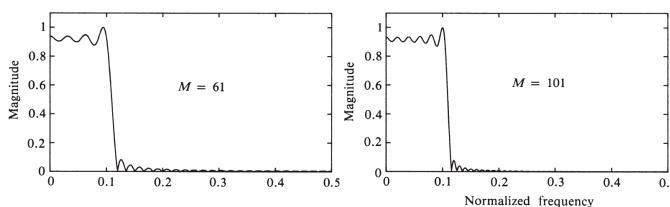


Figure 10.2.7 Lowpass filter designed with a rectangular window: (a) $M = 61$ and (b) $M = 101$.

Figure de [1].



Même filtre avec d'autres fenêtres

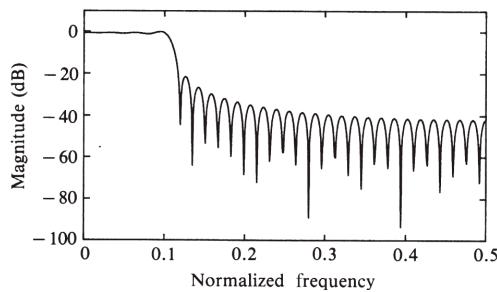


Figure 10.2.8 Lowpass FIR filter designed with rectangular window ($M = 61$). Figure 10.2.9 Lowpass FIR filter designed with Hamming window ($M = 61$).

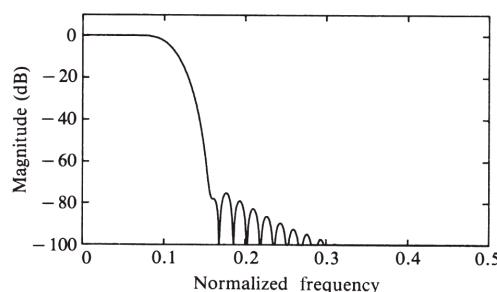
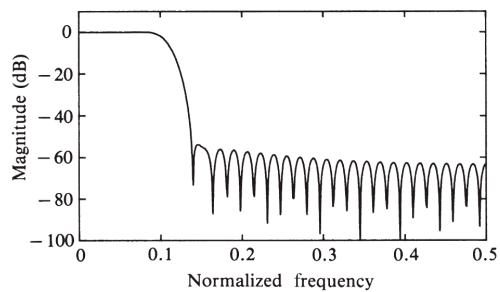


Figure 10.2.10 Lowpass FIR filter designed with Blackman window ($M = 61$). Figure 10.2.11 Lowpass FIR filter designed with $\alpha = 4$ Kaiser window ($M = 61$).

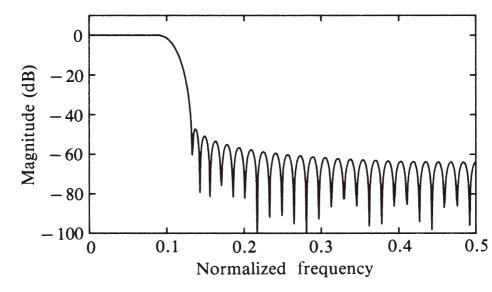


Figure 10.2.11 Lowpass FIR filter designed with $\alpha = 4$ Kaiser window ($M = 61$). Figures de [1].

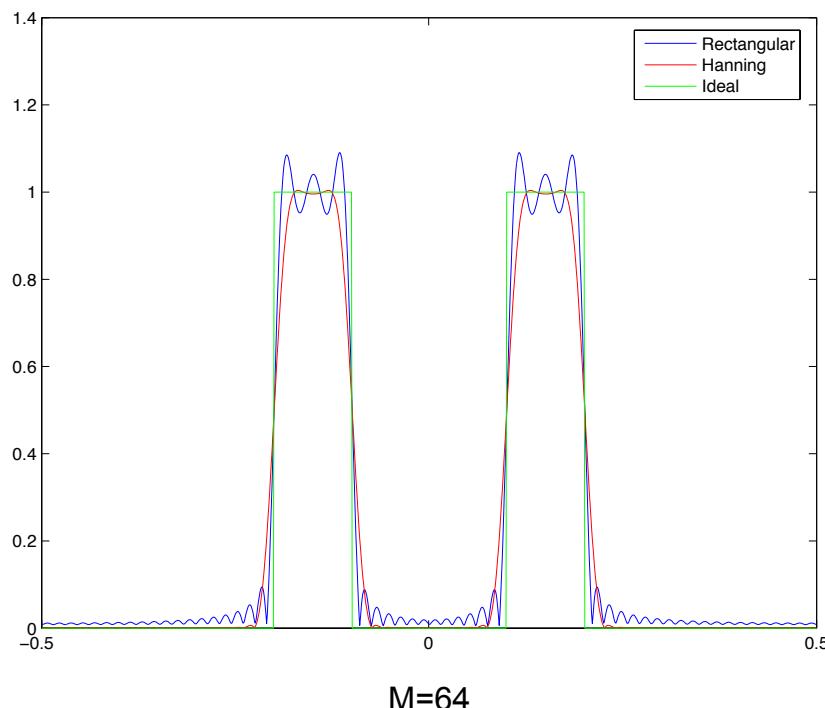


Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

VideoDSP2.5-end 76

Exemple: Filtre RIF passe-bande



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Synth. par échantillonnage fréq.

- La réponse fréquentielle désirée $H(\omega)$ est spécifiée à plusieurs valeurs de fréquence

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2\pi}{M}(k + \alpha) & k &= 0, 1, \dots, (M-1)/2, M \text{ odd} \\ && k &= 0, 1, \dots, M/2 - 1, M \text{ even} \\ && \alpha &= 0 \text{ or } 1/2\end{aligned}$$

- On peut obtenir la réponse impulsionnelle à partir de ses échantillons

$$\begin{aligned}H(k + \alpha) &\equiv H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \\ h(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1\end{aligned}$$



Filtre RIF par échantillonnage fréq.

- A partir de $h(n)$ on peut écrire:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} z^{-n}$$

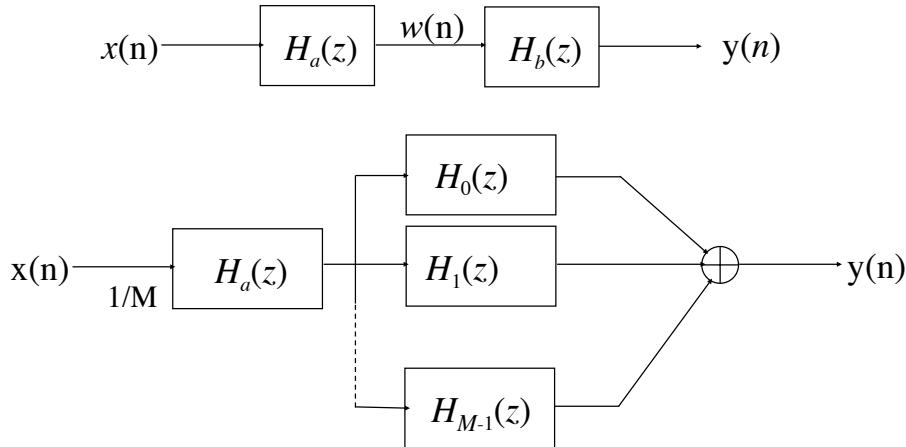
$$H(z) = \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}}$$

- Pour réduire les lobes latéraux, il est important d'optimiser le comportement dans la bande de transition
- Réduction de complexité en utilisant les symétries
 - $h(n)$ a des propriétés de symétrie si le filtre a une phase linéaire
 - comme $h(n)$ est réel, on a $H(k + \alpha) = H^*(M - k - \alpha)$
- Un échantillonnage efficace présente un grand avantage
 - La plupart des échantillons $H(k+\alpha)$ sont nuls, ou unitaires



Structure du filtre RIF par éch. fréq.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}}$$



Réalisation du filtre RIF par éch. fréq.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}}$$

- Mise en cascade de deux filtres

$$H(z) = \frac{1}{M} H_a(z) H_b(z)$$

- Un filtre tout-zéro

$$H_a(z) = 1 - z^{-M} \quad w(n) = \frac{x(n) - x(n - M)}{M}$$

- Un filtre tout-pôle

$$H_b(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H(k) \frac{1}{1 - e^{j2\pi k/M} z^{-1}} = \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)$$

$$y_k(n) - e^{j2\pi k/M} y_k(n - 1) = H(k)w(n)$$



Combinaison tout-pôle / tout-zéro

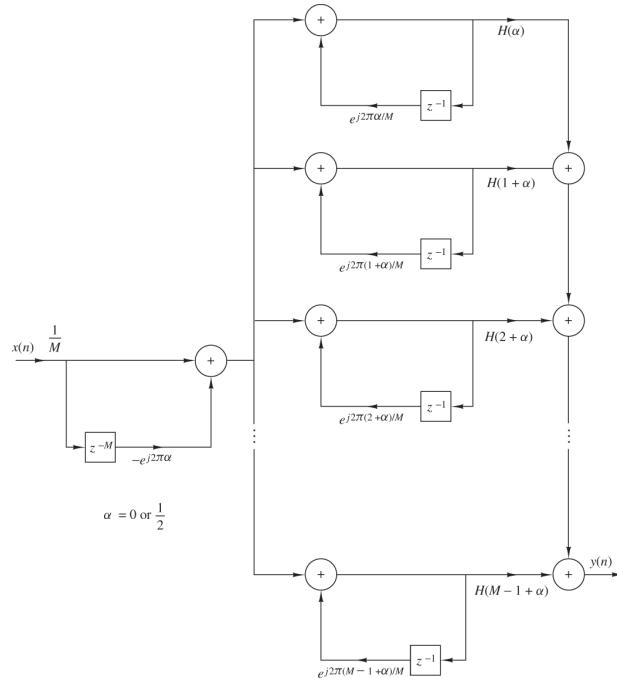


Figure de [1].

Figure 9.2.5 Frequency-sampling realization of FIR filter.

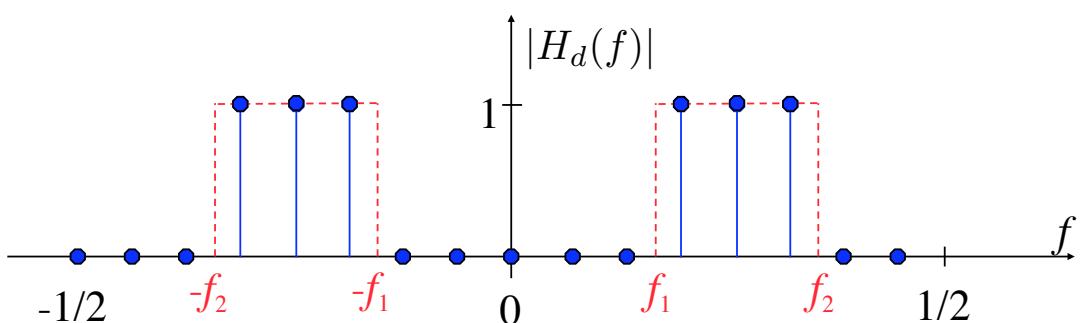


Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemple 6: filtre passe-bande RIF

- Réalisation récursive de filtre passe-bande
 - Durée finie, $M = 16$
 - Phase linéaire si décalage de $M/2 = 8$



$$H_3(z) = \frac{-1.662(1 - z^{-1})}{1 - 0.765z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H_4(z) = \frac{1.414(1 - z^{-1})}{1 + z^{-2}}$$

$$H_5(z) = \frac{-1.112(1 - z^{-1})}{1 + 0.765z^{-1} + z^{-2}}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Exemple 6: filtre passe-bande RIF (2)

- Le filtre tout-zéro donne

$$w(n) = 1/16 (x(n) - x(n - 16))$$

- Les filtres récursifs donnent

$$y_3(n) = -1.662 (w(n) - w(n - 1)) + 0.765y_3(n - 1) - y_3(n - 2)$$

$$y_4(n) = 1.414 (w(n) - w(n - 1)) - y_4(n - 2)$$

$$y_5(n) = -1.112 (w(n) - w(n - 1)) - 0.765y_5(n - 1) - y_5(n - 2)$$

- Finalement

$$y(n) = y_3(n) + y_4(n) + y_5(n)$$



Robustesse aux imprécisions

- Idéalement, les zéros et les pôles s'annulent dans la méthode par échantillonnage de fréquence
 - ils sont tous sur le cercle unité
 - en cas d'imprécision, le comportement du filtre change
- On peut ramener les pôles et zéros sur un cercle légèrement inférieur à l'unité, pour plus de robustesse
 - Le bruit dû aux imprécisions devient borné
 - Le filtre devient stable

$$H(z) = \frac{1 - r^M z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - r e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}}$$

$$r = 1 - \epsilon$$



Comparaisons des méthodes

- Historiquement, le fenêtrage est la première méthode utilisée pour des filtres RIF à phase linéaire
 - Manque de contrôle précis des fréquences critiques
- Les méthodes d'échantillonnage fréquentiel sont ensuite devenues très populaires
 - Attractif quand le filtre est réalisé par DFT
 - La réponse fréquentielle est généralement 0 ou 1, sauf dans la bande de transition (multiples de $2\pi/M$)
- Méthodes d'optimisation numérique (Chebyshev) donne un contrôle total sur les spécifications
 - Diluer l'erreur d'approximation dans les bandes passante et coupée pour minimiser le lobe latéral maximal
 - Plusieurs softwares permettent de résoudre ce problème

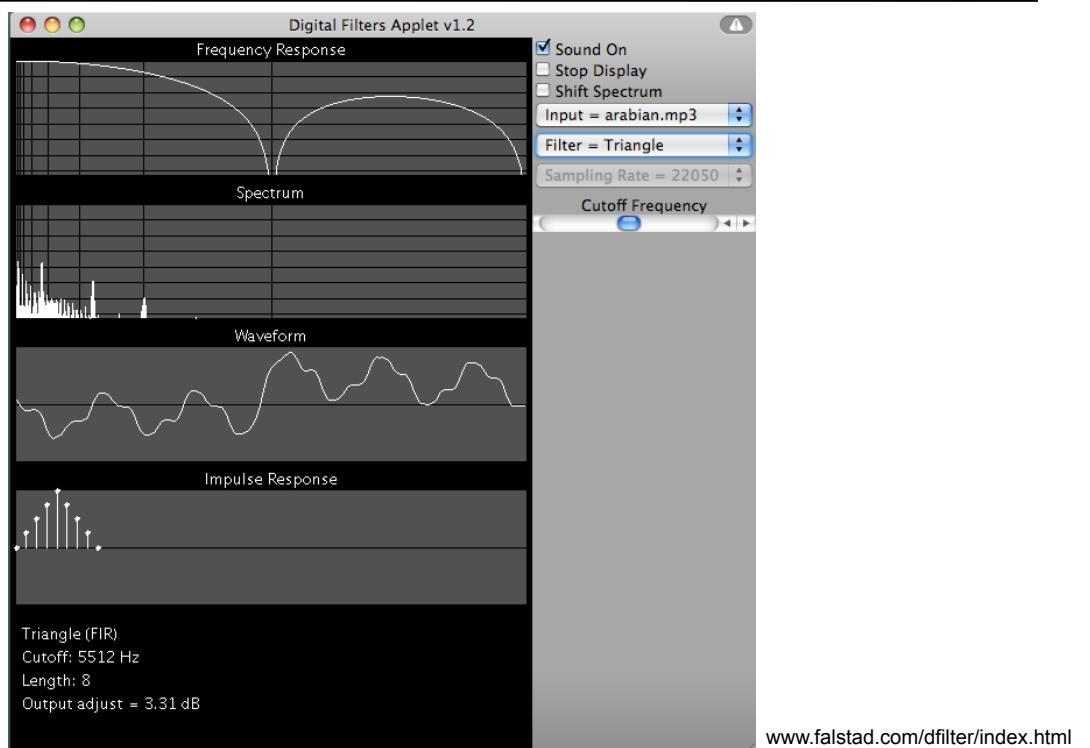


Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

VideoDSP2.6-end 86

Let's play again...



Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres numériques

(Chapitre 6)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement de signal (LTS4)
EPFL



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

90

Plan

- A. Structures des filtres numériques
- B. Construction de filtres RIF
- C. *Construction de filtres RII*



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

C. Filtres RII

- Caractéristiques de filtres RII
- Conversion de filtres analogiques
- Réalisation de filtres RII
- Réponse de phase des filtres numériques



Caractéristiques de filtres RII

- Plus flexibles que les filtres RIF, mais stabilité pas garantie
- Construction de filtres RII par conversion de filtres analogiques en filtres numériques
- La construction de filtres analogiques est très bien maîtrisée:

- Fonction de transfert:
$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k}$$

- Réponse impulsionnelle:
$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- Equations différentielles:
$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Ces trois relations conduisent à différentes méthodes pour la conversion du filtre dans le domaine numérique



Conversion $s \leftrightarrow z$



- Un système analogique invariant est stable si tous ses pôles ont une partie réelle négative (partie gauche du plan des s)
- La conversion doit avoir les propriétés suivantes:
 - L'axe imaginaire en s devrait correspondre au cercle unité en z
 - Ceci conduirait à une relation directe entre la fréquence dans les 2 domaines
 - $\text{Re}[s] < 0$ devrait correspondre à $|z| < 1$
 - Un filtre analogique stable devient ainsi un filtre numérique stable
 - La fréquence d'échantillonnage $1/T$ va apparaître explicitement
- On ne peut pas réaliser un filtre causal RII avec une phase linéaire
 - La symétrie introduit des pôles hors du cercle unité: il ne peut pas être stable

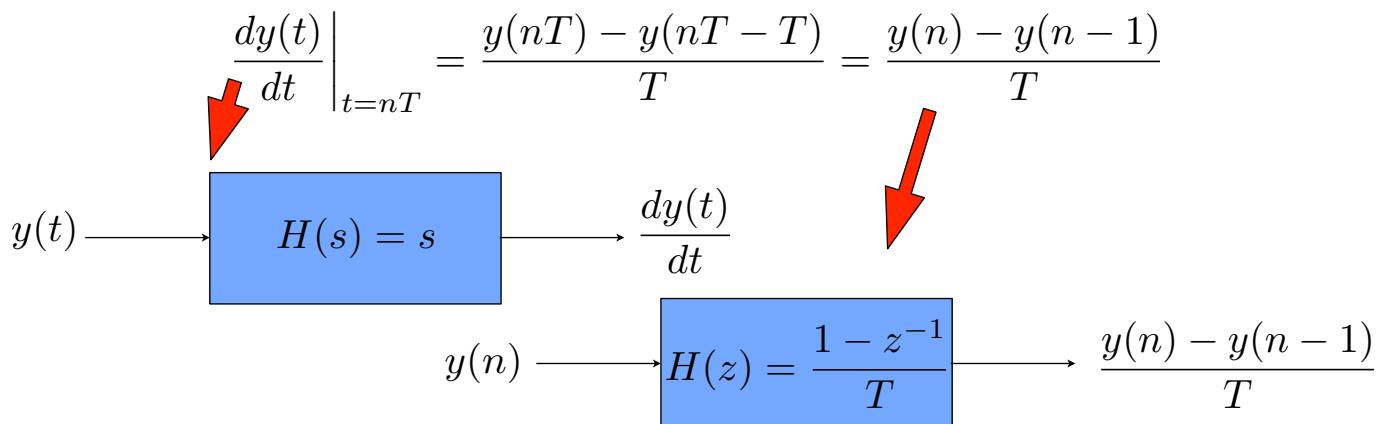
$$h(k) = \pm h(-k) \iff H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$
 - Le filtre RII est essentiellement caractérisé par sa réponse d'amplitude
 - Si la phase doit être linéaire, on construit un filtre RIF



Équivalence de la dérivation



- Approximation par équation aux différences



- Equivalence finalement donnée par:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$H(z) = H_a(s)|_{s=(1-z^{-1})/T}$$



Relation entre les plans s et z

- Equivalence donnée par $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ ou $z = \frac{1}{1 - sT}$
- Si on se concentre sur l'axe imaginaire du plan des s: $s = j\Omega$

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2}$$

- Cela correspond à un cercle de rayon $1/2$ centré en $z=1/2$.

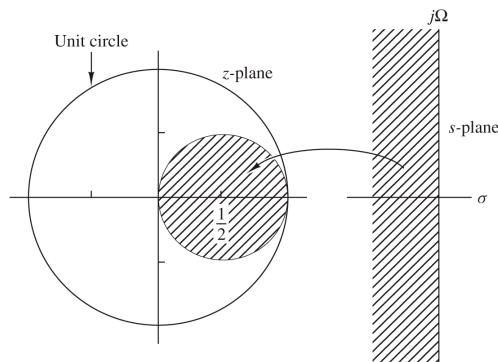


Figure 10.3.2 The mapping $s = (1 - z^{-1})/T$ takes LHP in the s -plane into points inside the circle of radius $\frac{1}{2}$ and center $z = \frac{1}{2}$ in the z -plane.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Equiv. de la dérivation: propriétés

- Les points de la partie gauche du plan de s correspondent à l'intérieur du cercle unité en z
 - Stabilité préservée
- Les pôles potentiels sont par contre confinés dans les basses fréquences
 - Méthode utilisable seulement pour la construction de filtres passe-bas ou passe-bande avec basse fréquence de coupure
- La diminution de T (= augmentation de la fréquence d'échantillonnage) entraîne une concentration de la transformée de Fourier autour de $z=1$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



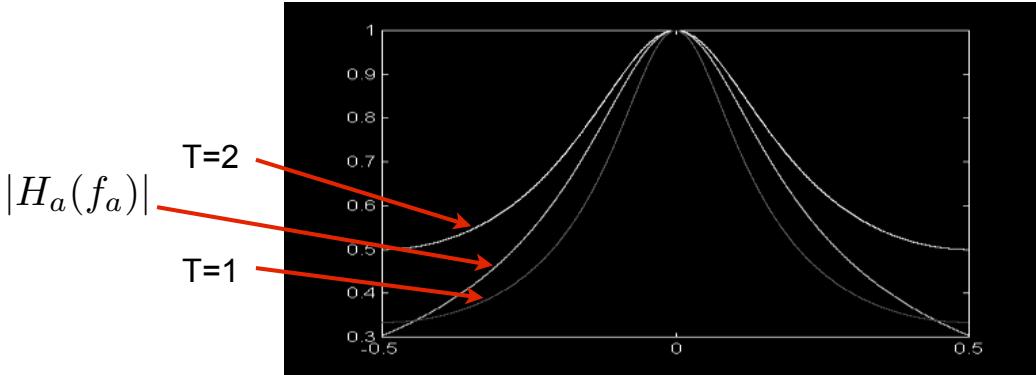
Exemple 7: filtre passe-bas

- Filtre passe-bas donné par: $H_a(s) = \frac{1}{s+1}$ $H_a(f) = \frac{1}{1+j2\pi f_a}$

- En appliquant la transformation:

$$H(z) = H_a(s)|_{s=(1-z^{-1})/T} = \frac{T}{1+T-z^{-1}}$$

- Si on prend une période principale, pour $z = e^{j2\pi fT}$



Exemple 8: filtre passe-bande

Convertir le filtre analogique passe-bande $H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2 + 9}$

- En utilisant l'équivalence de la dérivation $H(z) = \frac{1}{(\frac{1-z^{-1}}{T} + 0.1)^2 + 9}$

$$H(z) = \frac{T^2/(1+0.2T+9.01T^2)}{1 - \frac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-1} + \frac{1}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-2}}$$

- T doit être choisi suffisamment petit pour que les pôles soient proches du cercle unité, pour que leur effet soit important
 - p.ex., si $T = 0.1$

$$p_{1,2} = 0.91 \pm j0.27 = 0.949e^{\pm j16.5^\circ}$$



Equiv. de la rép. impulsionale



- Echantillonnage de la réponse impulsionale du filtre analogique

$$h(n) \equiv h_a(nT)$$

- L'échantillonnage introduit une périodicité dans le domaine fréquentiel

$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(f - \frac{k}{T} \right)$$

- La fréquence d'échantillonnage doit être suffisamment grande pour éviter les recouvrements (aliasing)

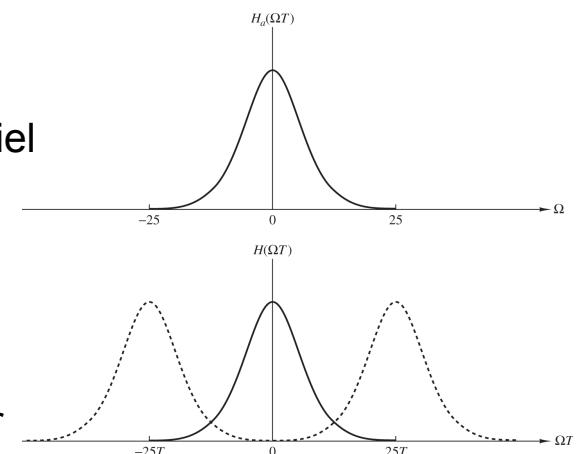


Figure 10.3.3 Frequency response $H_a(\Omega)$ of the analog filter and frequency response of the corresponding digital filter with aliasing.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

100

Equivalence Laplace - z

- On ne peut travailler avec $h(n)$ directement (RII), mais plutôt $H(z)$

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) \exp(-st) dt$$

$$h_e(t) = h_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$H_e(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - kT) \exp(-st) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - kT) \exp(-st) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a(kT) \exp(-ksT) \quad \longleftrightarrow \quad H(z)|_{z=\exp(st)} = H_e(s)$$

- La transformée de Laplace du signal échantilloné est la transformée en z du signal numérique évaluée en $z = e^{sT}$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Conversion $s \leftrightarrow z$

- Si on écrit $s = \sigma + j\Omega$ et $z = re^{j\omega}$, l'équivalence $z = e^{sT}$ donne

$$r = e^{\sigma T} \quad \text{et} \quad \omega = \Omega T$$

- Donc $\sigma < 0 \Rightarrow 0 < r < 1$

$$\sigma > 0 \Rightarrow r > 1$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow r = 1$$

- La partie négative du plan des s devient l'intérieur du cercle unité en z

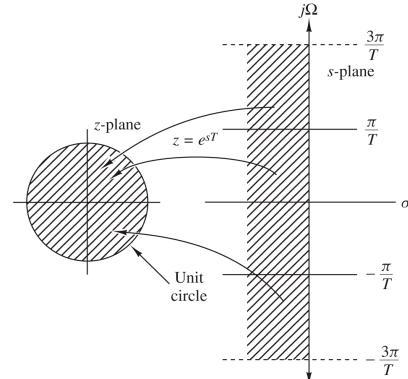


Figure 10.3.4 The mapping of $z = e^{sT}$ maps strips of width $2\pi/T$ (for $\sigma < 0$) in the s -plane into points in the unit circle in the z -plane.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Fonction avec pôles distincts

- Prenons un système caractérisé par des pôles simples

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \quad h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t}, t \geq 0$$

- Par échantillonnage de la réponse impulsionnelle analogique

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k T n} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- Les pôles sont donnés par: $z_k = e^{p_k T}, k = 1, 2, \dots, N$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Echantillonnage $h(t)$: propriétés

- Méthode par échantillonnage de la réponse impulsionnelle
 - Un pôle s_j en s correspond à un pôle $z_j = \exp(s_j T)$ en z
 - Si $\operatorname{Re}[s_j] < 0$, alors $|z| < 1$: le filtre numérique est stable
- Par la conversion $z = \exp(sT)$
 - Une infinité de bandes horizontales (de largeur dépendante de $1/T$) du plan des s est ‘projetée’ sur le cercle unité dans le plan des z
 - Recouvrements possibles, selon la valeur de T
 - Les filtres analogiques ne sont en pratique pas limités en fréquence, les recouvrements ne peuvent être totalement évités.
- La méthode s’applique essentiellement pour les filtres à basse fréquence de coupure
 - L’influence du recouvrement est moindre à basse fréquence

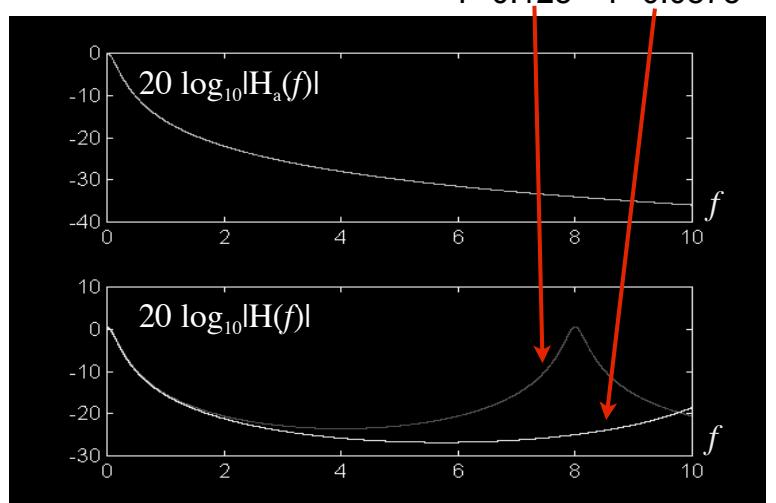


Exemple 9: filtre passe-bas

- Filtre passe-bas de type RC: $H_a(s) = \frac{1}{s + 1/RC}$ $h_a(t) = e^{-t/RC}$
- Un pôle en $-1/RC$ donne un pôle en $z_0 = e^{-\frac{T}{RC}}$
- Le filtrage peut être réalisé par $y(n) = x(n) + e^{-\frac{T}{RC}} y(n - 1)$
- Les fonctions de transfert sont:

$$H_a(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RC f}$$

$$H(f) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{RC}} e^{-j2\pi fT}}$$



Exemple 10: passe-bande

- Convertissons le filtre analogique $H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}$
- Le filtre a un zéro en $s = -0.1$ et deux pôles $p_k = -0.1 \pm j3$
- On peut décomposer en fractions partielles

$$H(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - j3} + \frac{1/2}{s + 0.1 + j3}$$

- Par l'équivalence de la réponse impulsionnelle

$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{-j3T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0.1T} \cos 3T)z^{-1}}{1 - (2e^{-0.1T} \cos 3T)z^{-1} + e^{-0.2T} z^{-2}}$$



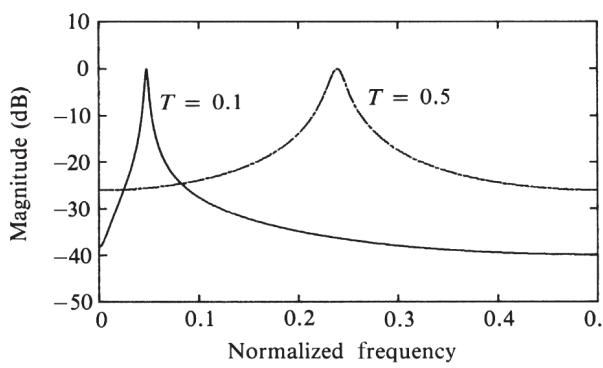
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

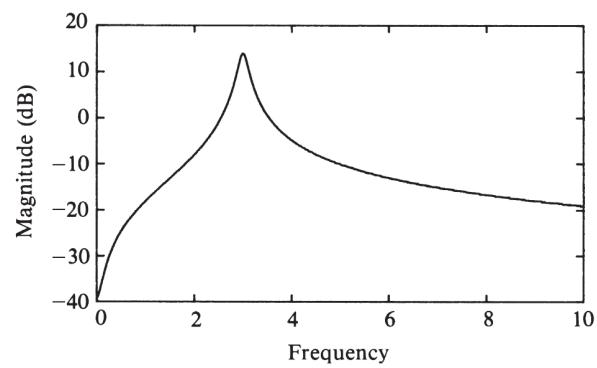
VideoDSP2.8-end 106

Exemple 10: passe-bande (2)

- Réponses fréquentielles du filtre passe-bande (résonateur)



Filtre numérique



Filtre analogique

- Le choix de T influence la fréquence de résonance
- Le recouvrement (aliasing) est plus faible pour T petit

Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Equivalence de l'intégration



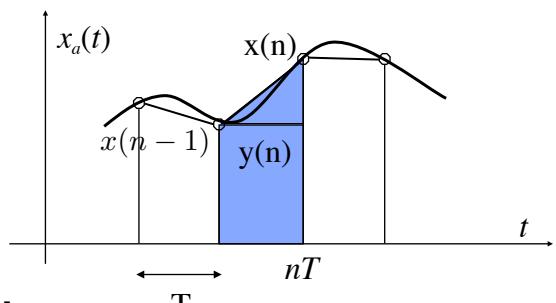
- Considérons l'intégration

$$y_a(t) = \int_{\alpha}^t x_a(u) du$$

- L'équivalent numérique est la règle trapézoïdale d'intégration

$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2} [x(n) + x(n-1)]$$

- La transformée en z est $H(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$



- Comme dans le plan des s , l'intégration correspond à la division par s , on a l'équivalence

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

- La relation d'équivalence s'appelle la transformation bilinéaire.



Transformation bilinéaire: $s \leftrightarrow z$

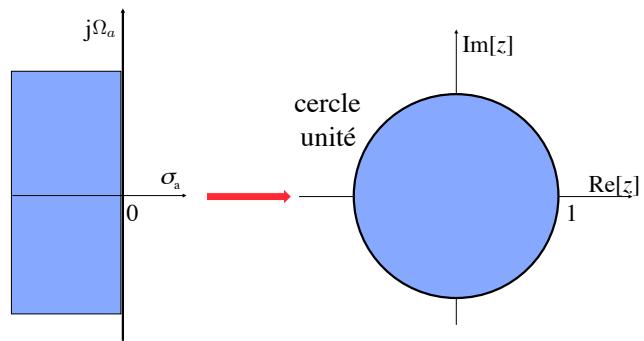
- En posant $z = re^{j\omega}$ et $s = \sigma + j\Omega$
- On obtient $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} + j \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega} \right)$
- Donc $\sigma = \frac{2}{T} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}$ et $\Omega = \frac{2}{T} \frac{2r \sin \omega}{1 + r^2 + 2r \cos \omega}$

- On a $r > 1 \Rightarrow \sigma > 0$
 $r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$

- De plus, si $r = 1 \Rightarrow \sigma = 0$

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$$

$$\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2}$$



Correspondance des fréquences

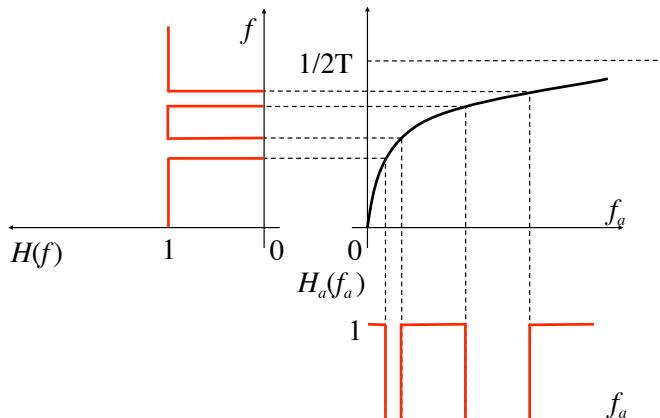
- Transformée de Fourier du signal numérique en évaluant $H(z)$ pour

$$z = e^{j2\pi fT}$$

- Avec $\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2}$ et $\Omega = 2\pi f_a$

$$f = \frac{1}{\pi} \arctan(\pi f_a T)$$

$$f_a = \frac{1}{\pi T} \tan(\pi f)$$



- La construction doit tenir compte de la distorsion!



Exemple 11: résonateur

- Convertissons le filtre analogique $H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 16}$
- Le filtre analogique a une fréquence de résonance à $\Omega_r = 4$
- Si on veut une fréquence de résonance numérique à $\omega_r = \pi/2$ on doit choisir $T = 1/2$ selon la transformation des fréquences
- On a donc

$$s = 4 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$$

- En négligeant le terme en z^{-1} au dénominateur, on obtient la bonne fréquence de résonance $p_{1,2} = 0.987e^{\pm j\pi/2}$



Exemple 12: passe-bas

- Construisons un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure de 0.2π à partir du filtre analogique

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

- Par la transformation des fréquences $\Omega_c = 2/T \tan 0.1\pi = 0.65/T$

- Le filtre analogique devient $H(s) = \frac{0.65/T}{s + 0.65/T}$

- Par la transformation bilinéaire $H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$ (Plus de T!)

- La réponse fréquentielle est $H(\omega) = \frac{0.245(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.509e^{-j\omega}}$

- on a effectivement $H(0) = 1$

$$|H(0.2\pi)| = 0.707$$



Construction de filtres pb RII



- Spécifications du filtre numérique
- Transformations des spécifications dans le domaine analogique
 - distorsion de fréquence si usage de la transformation bilinéaire
- Construction du filtre analogique correspondant
- En général transformation bilinéaire
- Implémentation du filtre numérique résultant
- On travaille en général avec des filtres passe-bas analogiques bien connus
 - On effectue des transformations de fréquences pour obtenir passe-haut, passe-bande ou coupe-bande



Filtres analogiques p-b classiques

- La construction de filtres numériques RII s'effectue par conversion d'un filtre analogique ($s \leftrightarrow z$)
- Il reste à définir le filtre analogique qui remplit les spécifications désirées
- Le filtrage analogique est un domaine très étudié
 - Filtres de Butterworth
 - Filtres de Chebyshev
 - Filtres elliptiques
 - Filtres de Bessel

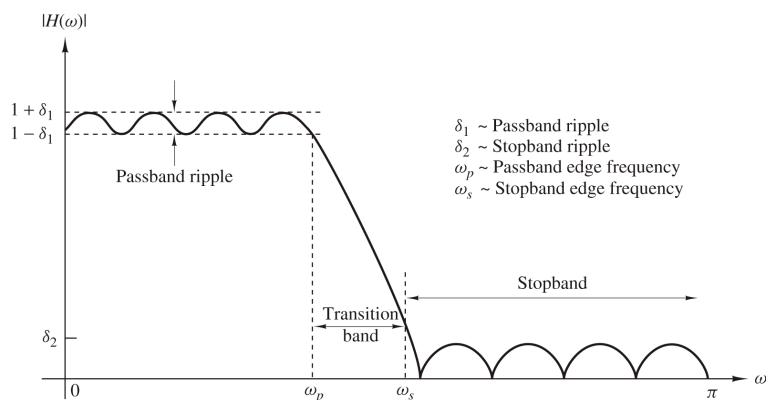


Figure 10.1.2 Magnitude characteristics of physically realizable filters.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Filtre de Butterworth

- Filtre tout-pôle $|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}$
- Filtre monotone dans les bandes passante et coupée
- L'ordre du filtre est donné par

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2(\Omega_s/\Omega_p)^{2N}} = \delta_2^2$$

$$N = \frac{\log(\delta/\epsilon)}{\log(\Omega_s/\Omega_p)}$$

$$\delta_2 = 1/\sqrt{1 + \delta^2}$$

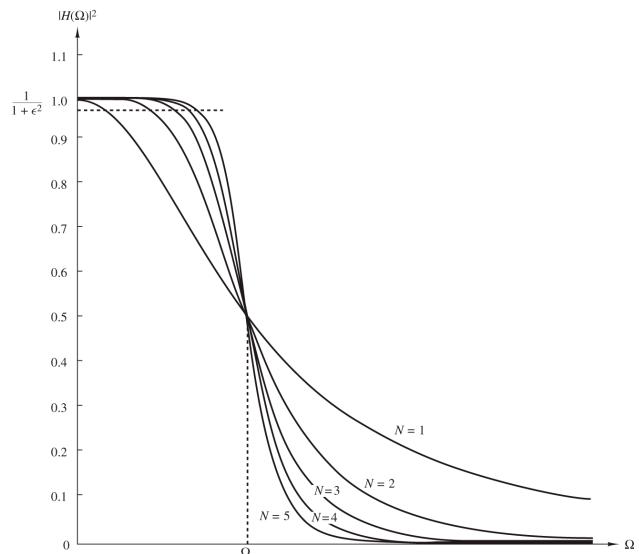


Figure 10.3.10 Frequency response of Butterworth filters.

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Filtres de Chebyshev

- 2 types de filtres

- filtre tout-pôle avec des oscillations dans la bande passante (Type I)

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)^{2N}}$$

- filtre avec pôles et zéros, oscillations dans la bande coupée (Type II)

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)), & \text{pour } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)), & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'ordre des filtres est donné par $N = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\epsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)}$

- Spécifications atteintes avec moins de pôles que Butterworth
 - Bande de transition plus petite pour le même nombre de pôles



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres de Chebyshev, illustration

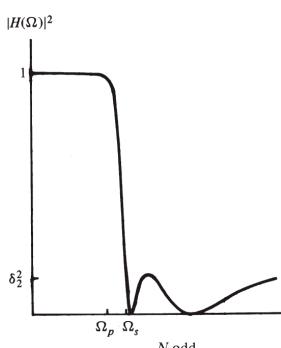


Figure 10.3.13 Type II Chebyshev filters.

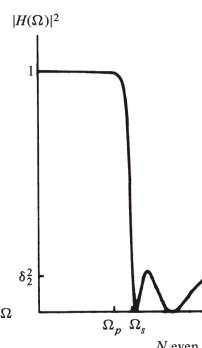
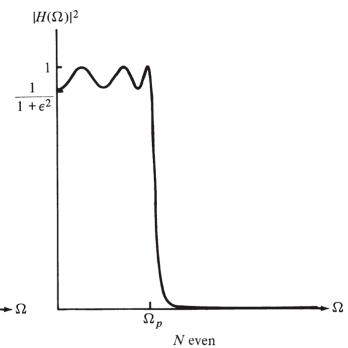
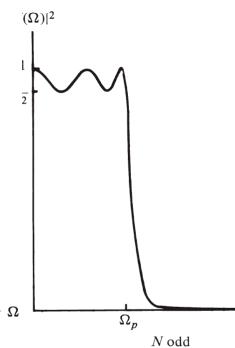


Figure 10.3.11 Type I Chebyshev filter characteristic.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres elliptiques

- Les filtres elliptiques (Cauer) ont un comportement ‘equiripple’ dans les bandes passante et coupée

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N(\Omega/\Omega_p)}$$

$U_N(x)$ est la fonction elliptique (Jacobian) d'ordre N

- L'erreur d'approximation est répartie dans les deux bandes
 - Filtre d'ordre le plus petit pour des spécifications données
 - Pour un ordre donné, bande de transition la plus petite

$$N = \frac{K(\Omega_p/\Omega_s)K\left(\sqrt{1 - (\epsilon^2/\delta^2)}\right)}{K(\epsilon/\delta)K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p/\Omega_s)^2}\right)} \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}$$

- La réponse de phase est très non-linéaire dans la bande passante



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres elliptiques, illustration

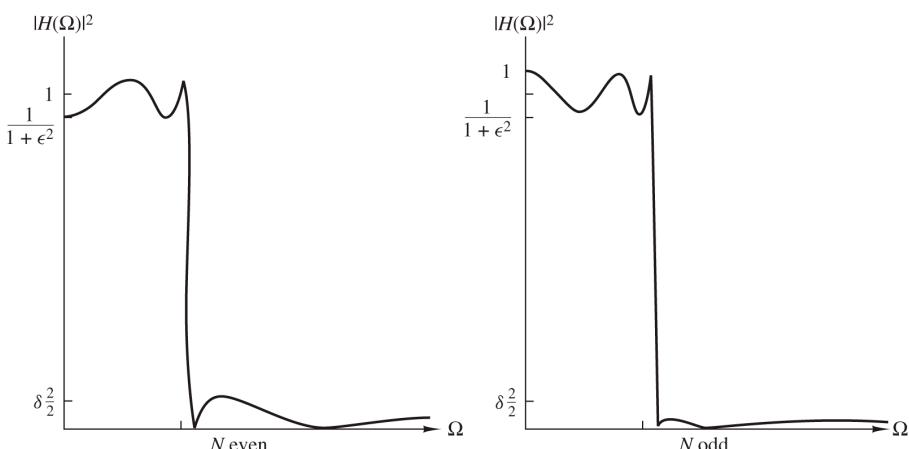


Figure 10.3.14 Magnitude-squared frequency characteristics of elliptic filters.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Filtres de Bessel

- Filtre tout-pôle $H(s) = \frac{1}{B_N(s)}$

donné par les polynômes de Bessel

$$B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s)$$

avec $B_0(s) = 1$ et $B_1(s) = s + 1$

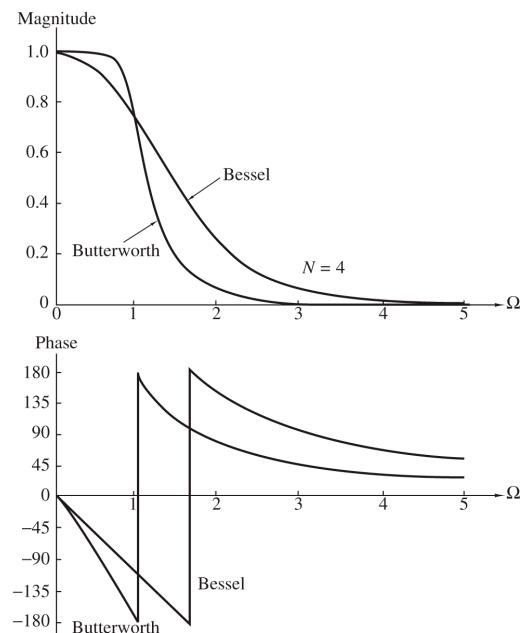


Figure 10.3.15 Magnitude and phase responses of Bessel and Butterworth filters of order $N = 4$.
Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

120

Illustrations: filtre passe-bas

- Construction par transformation bilinéaire d'un filtre passe-bas avec les spécifications suivantes

$$\delta_1 = 60dB \quad \omega_s = 0.30\pi \quad \omega_p = 0.25\pi$$

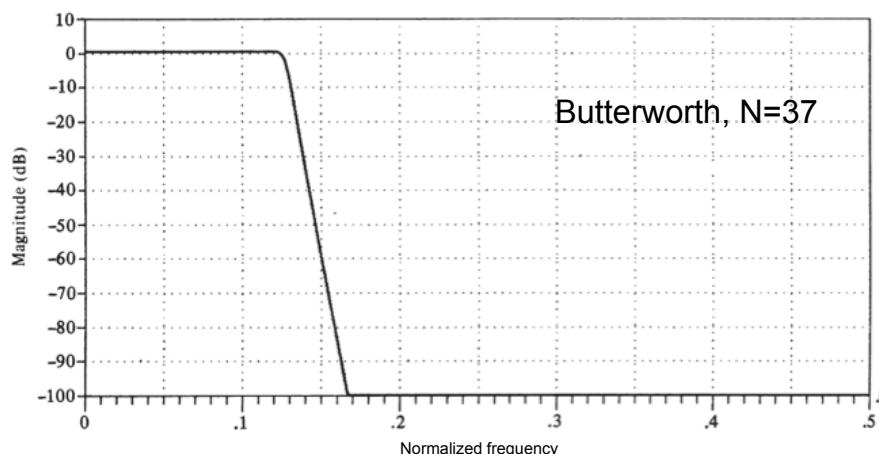


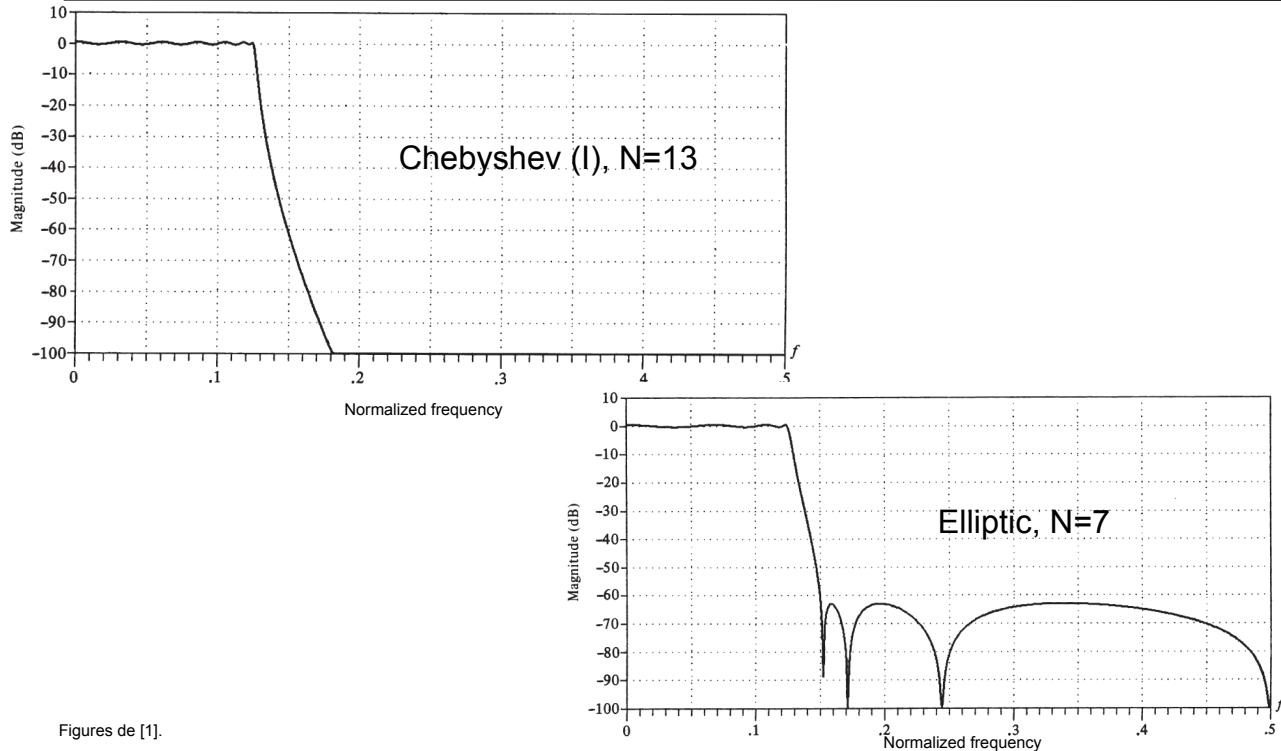
Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Illustrations: filtre passe-bas (2)



Figures de [1].

Réal. de filtres non passe-bas



- Réalisation de filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande
 - prototype passe-bas
 - transformation de fréquence
- Transformation de fréquence
 - analogique, puis conversion $s \leftrightarrow z$
 - conversion $s \leftrightarrow z$ pour le filtre passe-bas, puis transformation de fréquence numérique
- Les deux méthodes ne sont pas équivalentes en général
- Si la transformation bilinéaire est utilisée, elles sont équivalentes
 - dans ce cas, il n'y a pas de problème dû au recouvrement
- Pour les méthodes d'échantillonnage de $h(n)$ et d'équivalence de la dérivation
 - filtre passe-bas numérique, puis conversion de fréquence numérique

Transformation de fréq. analogique

TABLE 10.7 Frequency Transformations for Analog Filters (Prototype Lowpass Filter Has Band Edge Frequency Ω_p)

Type of transformation	Transformation	Band edge frequencies of new filter
Lowpass	$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
Highpass	$s \rightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Bandpass	$s \rightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Bandstop	$s \rightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$	Ω_l, Ω_u

Table de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

Transformation de fréq. numérique

- Conversion de z^{-1} en $g(z^{-1})$
- Le cercle unité est ‘invariable’

$$|g(\omega)| = 1, \forall \omega$$

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}}$$

$$|a_k| < 1$$

TABLE 10.8 Frequency Transformation for Digital Filters (Prototype Lowpass Filter Has Band Edge Frequency ω_p)

Type of transformation	Transformation	Parameters
Lowpass	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	$\omega'_p = \text{band edge frequency new filter}$ $a = \frac{\sin[(\omega_p - \omega'_p)/2]}{\sin[(\omega_p + \omega'_p)/2]}$
Highpass	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	$\omega'_p = \text{band edge frequency new filter}$ $a = -\frac{\cos[(\omega_p + \omega'_p)/2]}{\cos[(\omega_p - \omega'_p)/2]}$
Bandpass	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l = \text{lower band edge frequency}$ $\omega_u = \text{upper band edge frequency}$ $a_1 = 2\alpha K/(K+1)$ $a_2 = (K-1)/(K+1)$ $\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$
Bandstop	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-1} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l = \text{lower band edge frequency}$ $\omega_u = \text{upper band edge frequency}$ $a_1 = 2\alpha/(K+1)$ $a_2 = (1-K)/(1+K)$ $\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}$ $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \frac{\omega_p}{2}$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

Exemple 13: Conv. de fréquence

- Convertissons le filtre Butterworth passe-bas ($\omega_p = 0.2\pi$) en un filtre passe-bande entre ω_l et ω_u

$$H(z) = \frac{0.245(1 + z^{-1})}{1 - 0.509z^{-1}}$$

- On utilise la transformation de fréquence suivante

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$$

$$H(z) = \frac{0.245(1 - a_2)(1 - z^{-2})}{(1 + 0.509a_2) - 1.509a_1 z^{-1} + (a_2 + 0.509)z^{-2}}$$

- Si $\omega_u = 3\pi/5$ et $\omega_l = 2\pi/5$

$$H(z) = \frac{0.245(1 - z^{-2})}{1 + 0.509z^{-2}} \quad p_k = \pm j0.713$$

Résonance à $\omega = \pi/2$



Conception typique d'un filtre RII ←

- Choix du filtre analogique (par transformation des contraintes numériques)
- Détermination de l'ordre du filtre à partir des spécifications (gabarit)
- Détermination du filtre passe-bas analogique avec une fréquence de coupure $\Omega_c = 1$
- Transformation de fréquence (fréquence de coupure + type de filtre)
- Transformation bilinéaire



Et la phase?...



- Dans le design des filtres numériques, on s'est concentré sur les caractéristiques du module de la réponse fréquentielle
- La réponse de phase est généralement donnée par les contraintes de stabilité, et de causalité

- Pour avoir un système à phase linéaire, on doit avoir un filtre RIF
 - causalité et phase linéaire implique $H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$
 - on ne peut avoir un filtre RII à phase linéaire stable, puisque les pôles seraient présents hors du cercle unité

- On peut par contre influencer la réponse de phase d'un filtre RII
 - la réponse de phase reste liée à la réponse d'amplitude pour un système causal



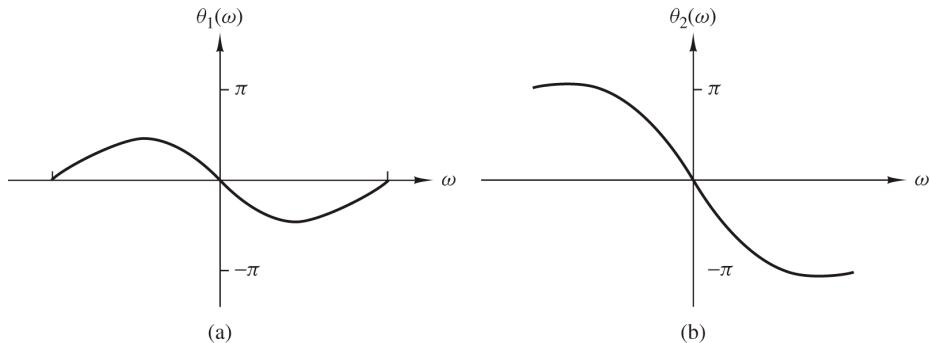
Systèmes à phase minimum

- Il y a beaucoup de systèmes qui sont équivalents dans l'amplitude de la réponse fréquentielle, et qui diffèrent dans la phase

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$
 - si on remplace un zéro z_k par son inverse $1/z_k$, la réponse d'amplitude ne change pas
 - on peut donc inter-changer des zéros à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité
- Lorsque tous les zéros sont à l'intérieur du cercle unité: phase minimum
 - son inverse est alors aussi stable



Exemple de phases différentes (RIF)



$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}(z + \frac{1}{2})$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}(\frac{1}{2}z + 1)$$

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \omega}$$

$$\Theta_1(\omega) = -\omega + \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{\frac{1}{2} + \cos \omega}$$

$$\Theta_2(\omega) = -\omega + \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega}$$

Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Phase minimale (RIF)

- Filtre RIF simple à phase minimale (zéro dans le cercle unité)

$$\Theta_1(\pi) - \Theta_1(0) = 0$$

- Filtre RIF simple à phase maximale (zéro hors du cercle unité)

$$\Theta_2(\pi) - \Theta_2(0) = \pi$$

- Par extension, pour un système RIF d'ordre M

$$H(\omega) = b_0(1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega}) \dots (1 - z_M e^{-j\omega})$$

- phase minimale: tous les zéros dans le cercle unité
- phase maximale: tous les zéros hors du cercle unité
- Par extension, un système RII stable a une phase minimale si tous les zéros et tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Systèmes à phase minimale



- Tout système à phase non minimale peut mener à un système à phase minimale par un filtre passe-tout

$$H(z) = H_{min}(z)H_{pt}(z)$$

- Le filtre passe-tout transfert les zéros hors du cercle unité, sans modifier la réponse fréquentielle d'amplitude

$$H(z) = \frac{B_1(z)B_2(z)}{A(z)}$$

- $B_1(z)$ ne contient que des zéros dans le cercle unité
- $B_2(z)$ ne contient que des zéros hors du cercle unité
- $B_2(z^{-1})$ ne contient que des zéros dans le cercle unité

$$H_{min} = \frac{B_1(z)B_2(z^{-1})}{A(z)} \quad H_{pt}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

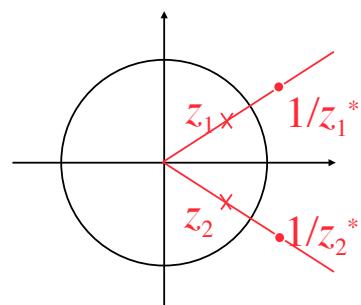
Exemple 14

- Considérons le système suivant

$$H_{min}(z) = 1 - 1.386z^{-1} + 0.640z^{-2}$$

- 2 zéros en $z_1 = 0.8 \exp(j\pi/6)$ et $z_2 = 0.8 \exp(-j\pi/6)$
- Comme les zéros sont à l'intérieur du cercle unité: phase minimum
- On peut le transformer en un autre système à phase non-minimum par un filtre passe-tout

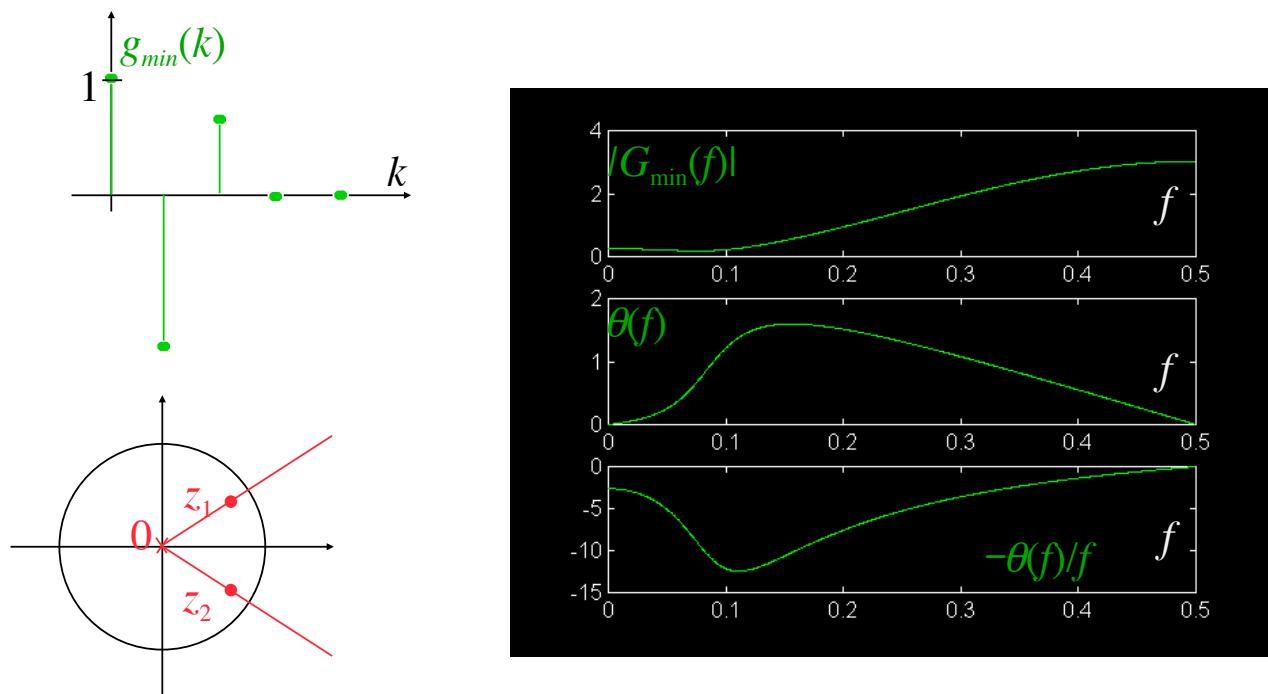
$$H_{pt}(z) = \frac{z^{-1} - z_1^*}{1 - z_1 z^{-1}} \frac{z^{-1} - z_2^*}{1 - z_2 z^{-1}}$$



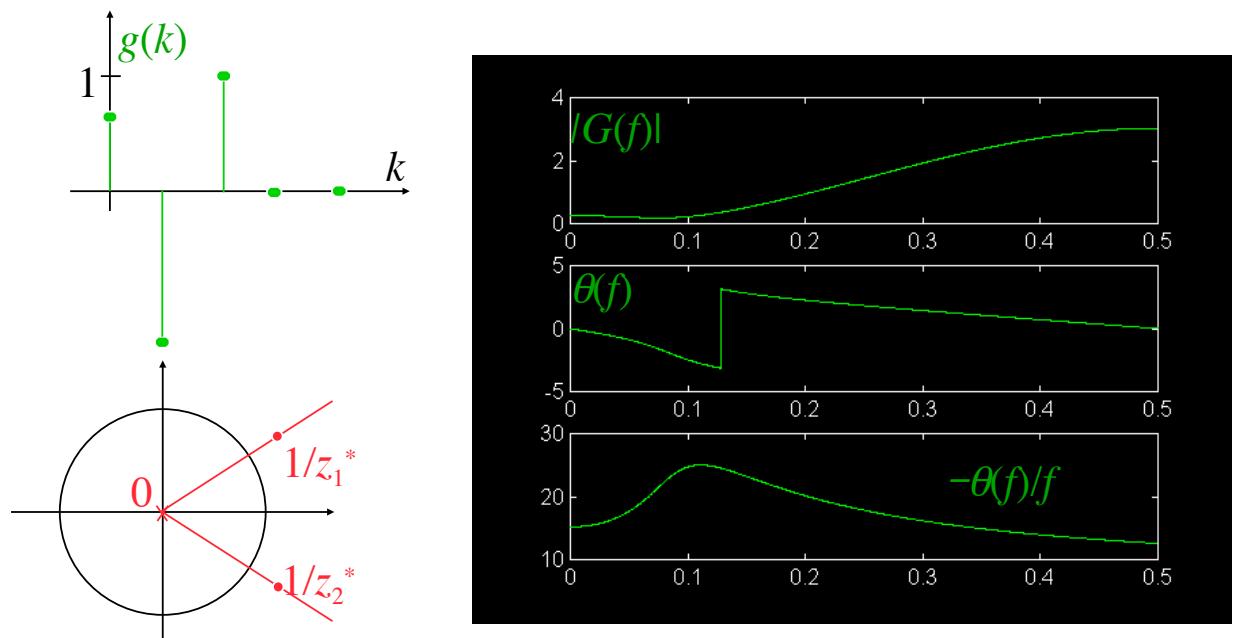
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

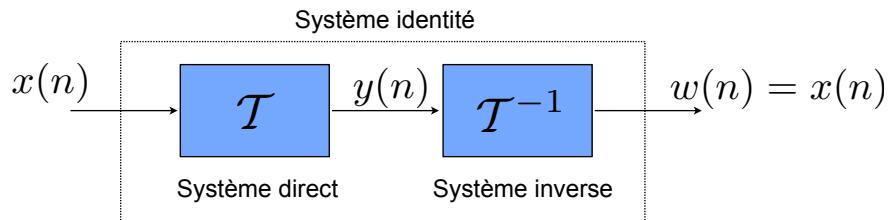
Exemple: système à phase min.



Exemple: système à phase non-min.



Inverse d'un filtre



$$w(n) = \mathcal{T}^{-1}[y(n)] = \mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}[x(n)]\} = x(n)$$

- Un système a un inverse s'il y a une correspondance entre les signaux d'entrée et de sortie
- Pour les systèmes linéaires et invariants

$$H(z)H_I(z) = 1 \Leftrightarrow H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

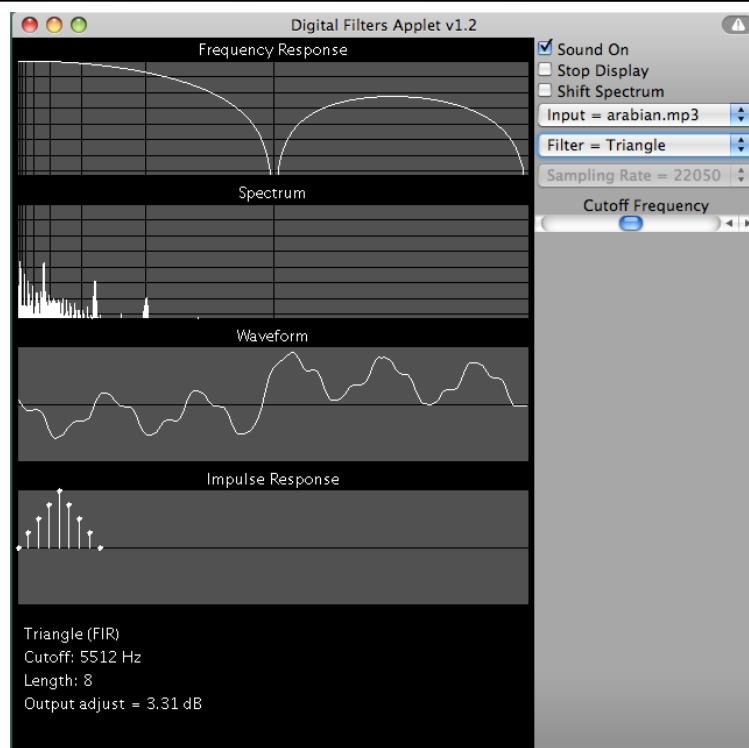
- Les filtres numériques à phase minimum ont un inverse stable, qui est aussi à phase minimum



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Let's play a last time...



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Résumé - filtrage



- Stabilité et causalité sont les conditions nécessaires pour un design pratique
- RIF utilisés dans les applications qui ont besoin d'une phase linéaire
 - échantillonnage de fréquence et méthodes optimales sont les meilleurs choix
- RII utilisés quand la distorsion de phase est tolérée
 - filtres elliptiques sont préférés (ordre plus faible), ou méthodes optimales
 - RII pas idéal pour filtre à phase linéaire: même mis en cascade avec un passe-tout pour corriger la phase, le nombre de coefficients est plus grand qu'un RIF
- Les transformations de fréquence sont utilisées seulement pour les filtres RII
 - le résultat d'une transformation de fréquence est un filtre RII



Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard



[VideoDSP2.11-end](#) 138

Références

1. *Digital Signal Processing* (Proakis): chapitres 5, 9-10
2. *Traitemennt numérique des signaux* (Kunt): chapitre 5
3. *Digital Signal Processing* (Mitra): chapitres 8-10



Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard



Estimation et prédition linéaire

(Chapitre 7)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement de signal (LTS4)
EPFL



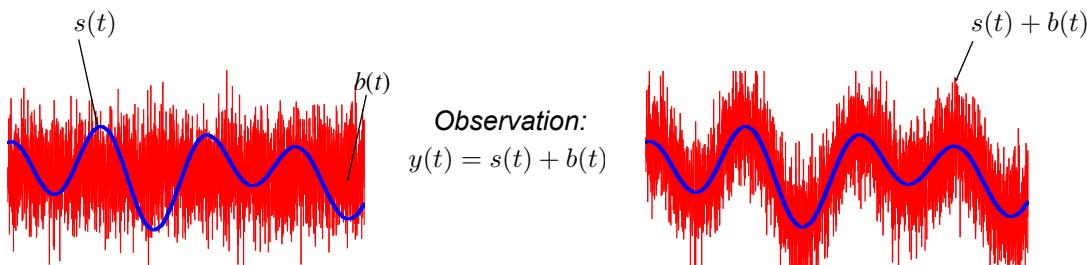
Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

140

Estimation de signal

- Observation et interprétation de signaux perturbés par du bruit
 - Antennes, astrophysique, recherche biomédicale, compression par prédition



- Avec un modèle statistique du signal observé
 - Méthodes du maximum de vraisemblance, ou de risque minimum, etc.
- Sans modèle à priori, on peut faire de l'estimation linéaire
 - besoin seulement de connaître ou mesurer l'auto/inter-corrélation
 - si l'observation est à statistique gaussienne, l'estimateur linéaire optimum donne la plus faible erreur quadratique moyenne (vs méthodes non-linéaires)



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Plan

- Rappel - signaux aléatoires, stationnarité, ergodicité
- Processus aléatoires AR, MA, ARMA
- Filtrage linéaire de signaux aléatoires
- Estimation et prédition par filtrage linéaire
- Filtres optimaux: filtres de Wiener



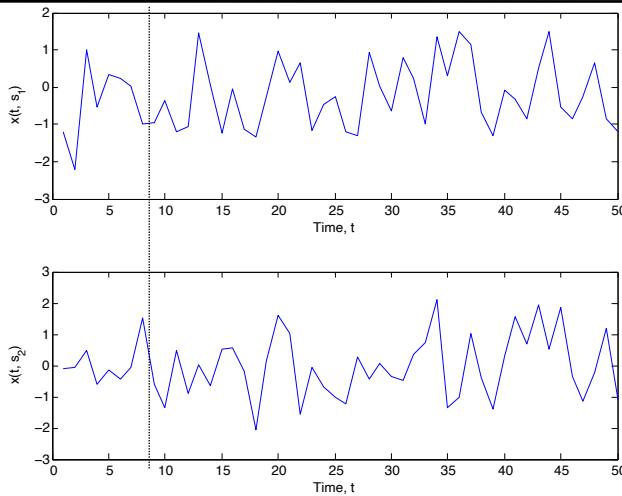
[VideoDSP2.12-start](#) 142

Signaux aléatoires

- Un processus stochastique (ou aléatoire) est représenté par un signal aléatoire à temps **continu** $x(t)$.
- Un signal aléatoire à temps **discret** $x[n]$ peut se voir comme un vecteur de variables aléatoires, de dimension infinie
 - En prenant $T \rightarrow 0$, $(..., x[(n-1)T], x[nT], x[(n+1)T], ...)$ devient un signal à temps continu
- Ces signaux sont caractérisés par une **densité de probabilité**, et un opérateur d'espérance. Pour pouvoir travailler avec ces signaux, on fait des hypothèses d'**ergodicité**, et de **stationnarité**.
- Les signaux déterministes sont parfois considérés comme des signaux aléatoires en l'absence d'information sur leur génération.



Signaux aléatoires



- Les phénomènes physiques naturels sont souvent caractérisés en termes statistiques
 - Les réalisations possibles forment un ensemble de fonctions aléatoires $\{x(t, s)\}$
 - Une réalisation $x(t)$ est une série de variables aléatoires $x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$
 - Elle est caractérisée par une densité de probabilité jointe $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Stationnarité



- Un processus caractérisé par $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ (densité de probabilité jointe), est dit stationnaire au sens strict si $\forall \tau, \forall n$

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau})$$

- Dans ce cas, les propriétés statistiques du signal sont invariantes par rapport à une translation dans le temps. Elles ne dépendent pas des instants auxquels les n échantillons successifs sont considérés.



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Moyennes statistiques



- Les moyennes statistiques sont calculées sur différentes réalisations du processus aléatoire
- Par exemple, l'échantillon à l'instant t_i , $X(t_i)$ est une variable aléatoire avec un densité de probabilité $p(x_{t_i})$
- Le moment d'ordre l de la variable aléatoire est donné par

$$E(X_{t_i}^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^l p(x_{t_i}) dx_{t_i}$$

- Si le processus est stationnaire ($p(x_{t_i}) = p(x_{t_i+\tau})$, $\forall \tau$), le moment d'ordre l est constant (indépendant du temps)



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Autocorrélation



- Considérons 2 variables aléatoires $X_{t_i} = X(t_i)$, $i = 1, 2$ qui correspondent à des échantillons pris à des instants différents
- Le moment joint est défini comme

$$E[X_{t_1}, X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} p(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2}$$

- Si le processus est stationnaire, la fonction d'autocorrélation est

$$\gamma_{xx}(\tau) = E[X_{t_1+\tau}, X_{t_1}] = E[X_{t'_1-\tau}, X_{t'_1}] = \gamma_{xx}(-\tau)$$

- La valeur en 0 est la puissance moyenne du signal $\gamma_{xx}(0) = E[X_{t_1}^2]$

- Stationnarité au sens large si

$$E[X_{t_i}] = \text{const} \quad \text{et} \quad \gamma_{xx}(t_1, t_2) = \gamma_{xx}(t_1 - t_2) = \gamma_{xx}(\tau)$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Autocovariance



- La fonction d'autocovariance est liée à l'autocorrélation

$$\begin{aligned} c_{xx}(t_1, t_2) &= E\{[X_{t_1} - E(X_{t_1})][X_{t_2} - E(X_{t_2})]\} \\ &= \gamma_{xx}(t_1, t_2) - E(X_{t_1})E(X_{t_2}) \end{aligned}$$

- Si le processus est stationnaire, on a

$$c_{xx}(t_1, t_2) = c_{xx}(t_1 - t_2) = c_{xx}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) - m_x^2$$

avec $m_x = E[X_{t_i}] = \text{const}$ et $\tau = t_1 - t_2$

- On peut alors définir la variance comme

$$\sigma_x^2 = c_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) - m_x^2$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Processus aléatoires joints

- 2 processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ sont caractérisés statistiquement par une fonction de densité de probabilité jointe

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m})$$

- On définit alors l'intercorrélation et l'intercovariance comme

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) \equiv E[X_{t_1}, Y_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} p(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$$

$$c_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(t_1, t_2) - E(X_{t_1})E(Y_{t_2})$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Caractérisation de processus joints

- Si les processus sont conjointement et individuellement stationnaires

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(\tau) = \gamma_{xy}(-\tau) \quad \text{et} \quad c_{xy}(t_1, t_2) = c_{xy}(\tau) \\ \forall n, \forall m, \forall t_i, \forall t'_i$$

- Si les processus sont statistiquement indépendants,

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m}) = p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) p(y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m})$$

- Finalement, deux processus sont non-corrélates si

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1})E(Y_{t_2}) \quad \text{ou} \quad c_{xy}(t_1, t_2) = 0$$



Densité spectrale de puissance



- La transformée de Fourier n'est pas directement exploitable pour un signal aléatoire, généralement de durée et énergie infinies
- On peut obtenir la transformée $X_A(\omega)$ d'une réalisation donnée par fenêtrage $x_A(t) = \text{rect}(t/A) x(t)$
- La densité spectrale de puissance (DSP) est alors donnée par

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} E[|X_A(\omega)|^2]$$

- Interprétation

- l'énergie moyenne du signal par unité de temps est donnée par $P = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} |x(t)|^2 dt$
- Par Parseval

$$P = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi A} \int_{-\infty}^{\infty} |X_A(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(\omega) d\omega$$

- Cela montre que $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Gamma_{xx}(\omega) / (2\pi) d\omega$ est la contribution des fréquences $[\omega_1, \omega_2]$ à la puissance moyenne du signal \rightarrow densité spectrale de puissance



Théorème de Wiener-Khintchine

- Un calcul direct de la DSP est très laborieux !
- Pour les signaux aléatoires stationnaires au sens large, on peut heureusement utiliser le théorème de Wiener-Khintchine:

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt$$

- la DSP s'obtient en calculant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation



Norbert Wiener



Aleksandr Khinchin



Traitements des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Preuve...

- Théorème de Wiener-Khintchine:

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Preuve $\frac{1}{A} E[|X_A(\omega)|^2] = \frac{1}{A} E \left[\int \int x(t) \text{rect}(t/A) e^{-j\omega t} x(t')^* \text{rect}(t'/A) e^{j\omega t'} dt dt' \right]$
 $= \frac{1}{A} \int \int \text{rect}(t/A) \text{rect}(t'/A) E[x(t)x(t')^*] e^{-j\omega(t-t')} dt dt'$
 $= \int \gamma_{xx}(u) e^{-j\omega u} du \int \text{rect}(u/A + u') \text{rect}(u') du' \quad (\text{chgt variables: } u = t - t', u' = t'/A)$
 $= \int \text{tri}(u/A) \gamma_{xx}(u) e^{-j\omega u} du$
- Comme $\lim_{A \rightarrow \infty} \text{tri}(u/A) = 1$ on a effectivement $\frac{1}{A} E[|X_A(\omega)|^2] = \int \gamma_{xx}(u) e^{-j\omega u} du$



Traitements des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Propriétés de la DSP

- On a les relations suivantes pour la distribution de puissance

$$\Gamma_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow \gamma_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(\omega) d\omega = E[X_t^2] \geq 0$$

- La DSP est toujours réelle. Si le processus aléatoire prend des valeurs réelles, elle est aussi paire.
- Par extension, on obtient la densité inter-spectrale de puissance pour deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$

$$\Gamma_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(t) e^{-j\omega t} dt$$

- On a $\Gamma_{xy}^*(\omega) = \Gamma_{yx}(-\omega)$, et $\Gamma_{xy}(\omega) = \Gamma_{yx}(-\omega)$ pour les processus réels



Signaux aléatoires à temps discret

- On peut étendre les définitions précédentes aux signaux discrets
 - Généralement par échantillonnage uniforme des processus continus
 - L'échantillonnage d'un processus stationnaire forme un signal stationnaire
- On a les relations suivantes pour le processus discret $X(n)$ et les échantillons $x(n)$

$$\gamma_{xx}(n, k) = E[X_n, X_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_k p(x_n, x_k) dx_n dx_k$$

$$c_{xx}(n, k) = \gamma_{xx}(n, k) - E(X_n)E(X_k)$$



Processus discrets stationnaires

- Si le processus discret est stationnaire

- $m = n - k$

$$\gamma_{xx}(n, k) = \gamma_{xx}(m)$$

$$c_{xx}(n, k) = c_{xx}(m) = \gamma_{xx}(m) - E(X_n)^2$$

$$\sigma^2 = c_{xx}(0) = \gamma_{xx}(0) - E(X_n)^2$$

$$E(X_n^2) = \gamma_{xx}(0)$$

- Par Wiener-Khintchine

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(m) e^{-j2\pi fm} \Leftrightarrow \gamma_{xx}(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(f) e^{j2\pi fm} df$$



Moyennes temp. et ergodicité



- En pratique, une seule réalisation est disponible en général
 - Cependant, nous avons caractérisé les processus aléatoires en termes de moyennes statistiques
- Comment obtenir les moyennes du processus avec une seule réalisation?
 - Condition: le processus doit être ergodique
- **Définition:** $X(n)$ est **ergodique** si les moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles (obtenues à partir d'une seule réalisation du processus)
 - Dans ce cas, on peut estimer les moyennes d'ensemble à l'aide des moyennes temporelles calculées sur une seule réalisation
 - Un signal ergodique est toujours stationnaire au sens strict (l'inverse n'est pas vrai!)



Ergodicité de la moyenne

- Pour un processus stationnaire $X(n)$, les moyennes statistiques et temporelles sont données resp. par

$$m_x = E[X_n] \quad \text{et} \quad \hat{m}_x = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

- \hat{m}_x est une estimation statistique calculée sur une seule réalisation

- Son espérance calculée sur toutes les réalisations du processus devient

$$E[\hat{m}_x] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E[x(n)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m_x = m_x$$

- C'est un estimateur **non biaisé**.

- La variance de l'estimateur est donnée par

$$\text{var}(\hat{m}_x) = E(|\hat{m}_x|^2) - |m_x|^2$$

- si la variance tend vers 0 quand N devient très grand, l'estimation \hat{m}_x converge avec une probabilité 1 vers la moyenne statistique m_x



Var. de l'estimation de la moyenne

$$\begin{aligned} E(|\hat{m}_x|^2) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N E[x^*(n)x(k)] = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \gamma_{xx}(k-n) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(m) \\ \text{var}(\hat{m}_x) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) \gamma_{xx}(m) - |m_x|^2 \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) c_{xx}(m) \end{aligned}$$

- Les moyennes statistiques et temporelles sont égales si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|m|}{2N+1}\right) c_{xx}(m) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{xx}(m)| < \infty$$

- on a alors $m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$



Ergodicité de la corrélation

- On peut aussi calculer une estimation de la corrélation

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+m)$$

- L'estimateur est à nouveau **non biaisé**, puisque

$$E[r_{xx}(m)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E[x^*(n)x(n+m)] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \gamma_{xx}(m) = \gamma_{xx}(m)$$

- La variance de l'estimation est donnée par

$$\text{var}(r_{xx}(m)) = E(|r_{xx}(m)|^2) - |\gamma_{xx}(m)|^2$$

- Si la variance tend vers 0 pour N très grand, l'estimation converge avec une probabilité 1 vers l'autocorrélation statistique



Var. de l'estimation de corrélation

$$\begin{aligned} E(|r_{xx}(m)|^2) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N E[x^*(n)x(n+m)x(k)x^*(k+m)] \\ &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \gamma_{vv}^m(n-k) \quad \text{avec } v_m(n) = x^*(n)x(n+m) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) \gamma_{vv}^m(n) \\ \text{var}(r_{xx}(m)) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) \gamma_{vv}^m(n) - |\gamma_{xx}(m)|^2 \end{aligned}$$

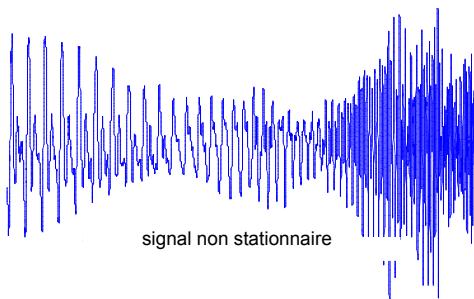
- La condition pour que le processus soit ergodique en terme de corrélation est donc $\text{var}(r_{xx}(m)) \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$. On a alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E[x^*(n)x(n+m)] = \gamma_{xx}(m)$$



Illustrations: stationnarité, ergodicité

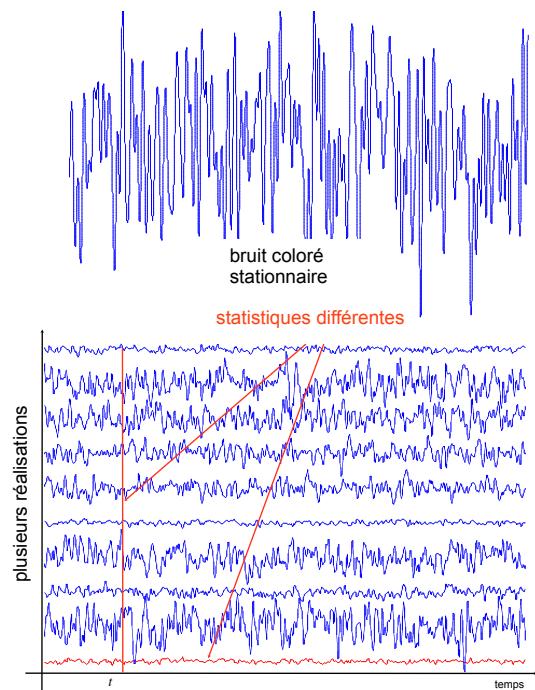
- Stationnarité



- Ergodicité

$$x(t) = a \ x_0(t)$$

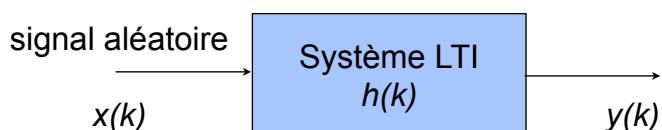
- $x_0(t)$ est un processus ergodique
- a : variable aléatoire (indép. de $x_0(t)$)
- $x(t)$: signal stationnaire non ergodique



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Réponse de systèmes linéaires



$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l)$$

- Signal aléatoire x , donné par m_x , γ_{xx} et Γ_{xx}
- La moyenne du signal de sortie est donnée par

$$m_y = E[y(k)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)E[x(k-l)] = m_x \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Rép. de systèmes linéaires



- Fonction d'autocorrélation du signal de sortie:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yy}(k) &= E[y(l)y(l+k)] = E \left[\sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u)x(l-u) \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(v)x(l+k-v) \right] \\
 &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u) \sum_{v=-\infty}^{\infty} h(v) E[x(l-u)x(l+k-v)] \\
 &\stackrel{\text{stationnarité de } x(k)}{=} \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(u+m) \gamma_{xx}(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k-m) \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u)h(u+m) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k-m) \gamma_{hh}(m)
 \end{aligned}$$

- Densité spectrale de puissance $\Gamma_{yy}(z) = H(z)H(1/z)\Gamma_{xx}(z)$

$$\Gamma_{yy}(f) = H(f)H^*(f) \quad \Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \quad \Gamma_{xx}(f)$$



Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Signal intéressant: bruit blanc

- Un bruit blanc est l'idéalisatoin mathématique d'un signal stationnaire à moyenne nulle dont la DSP est constante

$$\Gamma_{xx}(\omega) = N_0 \Leftrightarrow \gamma_{xx}(t) = N_0 \delta(t)$$

- Un tel signal a une puissance moyenne finie, et ses échantillons sont décorrélés.
- On peut générer toutes sortes de bruits colorés par filtrage de bruit blanc
- Dans le cas discret, un bruit blanc $b(n)$ est un signal à moyenne nulle, stationnaire et caractérisé par l'indépendance des échantillons

$$\gamma_{bb}(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ N_0 & n = 0 \end{cases}$$

- La DSP reste constante:

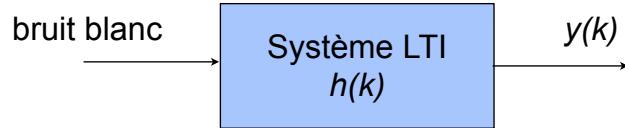
$$\Gamma_{bb}(\omega) = N_0$$



Traitement des signaux, automne 2021
 Prof. Jean-Philippe Thiran
 Prof. Pascal Frossard

EPFL

Syst. linéaires et bruit blanc



- La fonction d'autocorrélation de y dépend de la variance du bruit blanc

$$\begin{aligned}
 \gamma_{yy}(k) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{bb}(k-m) \gamma_{hh}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_b^2 \delta(k-m) \gamma_{hh}(m) \\
 &= \sigma_b^2 \gamma_{hh}(k) = \sigma_b^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) h(m+k)
 \end{aligned}$$

- La densité spectrale de puissance est alors simplement donnée par

$$\Gamma_{yy}(f) = |H(f)|^2 \sigma_b^2$$



Représentation de l'innovation

- Un processus stationnaire au sens large $\{x(n)\}$ peut être représenté comme la sortie d'un système linéaire causal et invertible excité par un bruit blanc.
- Preuve

$$\Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(m) z^{-m} \quad \xrightarrow{\text{série de Laurent (fonction analytique)}} \quad \log \Gamma_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-m}$$

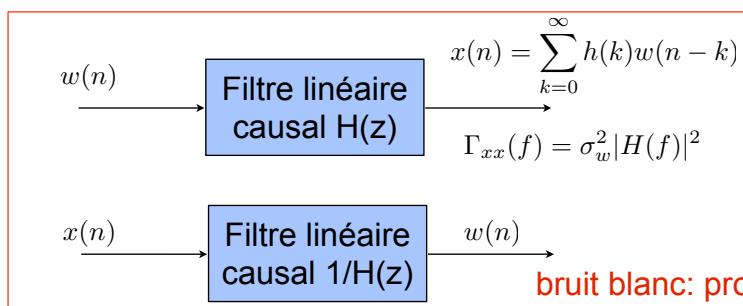
$$\Gamma_{xx}(z) = \exp \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-m} \right] = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1})$$

avec $\sigma_w^2 = \exp[v(0)]$

$$\text{et } H(z) = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} v(m) z^{-m} \right], |z| > r_1$$

↓
fonction analytique système causal

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$



Processus stationnaires par filtrage

- On considère les processus stationnaires $\{x(k)\}$ ayant une DSP rationnelle

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}$$

- Par la représentation de l'innovation, ces processus peuvent être générés par un bruit blanc $\{w(k)\}$, filtré par $H(z)$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Processus particuliers



- Processus AR (auto-régressif)

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) = w(n)$$

$$H(z) = 1/A(z)$$

- Processus MA (moyenne glissante)

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

$$H(z) = B(z)$$

- Processus ARMA (AR + MA)

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

$$H(z) = B(z)/A(z)$$

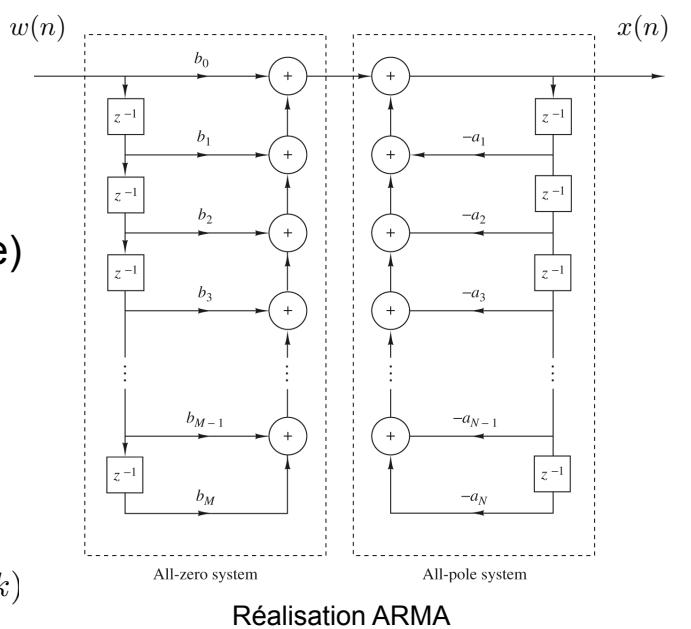


Figure de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Calcul de l'autocorrélation

- On peut obtenir l'autocorrélation à partir des paramètres du filtre qui génère le signal aléatoire à partir d'un bruit blanc
- Pour un processus ARMA (quand $\Gamma_{xx}(z)$ est rationnelle):

$$E[x(n)x^*(n-m)] = - \sum_{k=1}^p a_k E[x(n-k)x^*(n-m)] + \sum_{k=0}^q b_k E[w(n-k)x^*(n-m)]$$

$$\gamma_{xx}(m) = - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sum_{k=0}^q b_k \gamma_{wx}(m-k)$$

$$\gamma_{wx}(m) = E[x^*(n)w(n+m)] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)w^*(n-k)w(n+m)\right] \xrightarrow{\text{bruit blanc}} \sigma_w^2 h(-m)$$

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > q \\ - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

VideoDSP2.14-end 170

Equations de Yule-Walker



ARMA:

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > q \\ - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_{k+m} h(k) & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases}$$

- On peut aussi obtenir la fonction d'autocorrélation pour un processus AR

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > 0 \\ - \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad \text{équations de Yule-Walker}$$

- ... et MA

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_{k+m} b_k & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases}$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Prédiction linéaire et filtrage

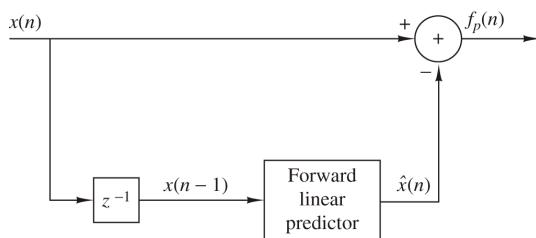


Figure 12.3.1 Forward linear prediction.

- On veut prédire la valeur du processus aléatoire $x(n)$ à partir de ses valeurs passées

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k)$$

Coefficients de prédiction

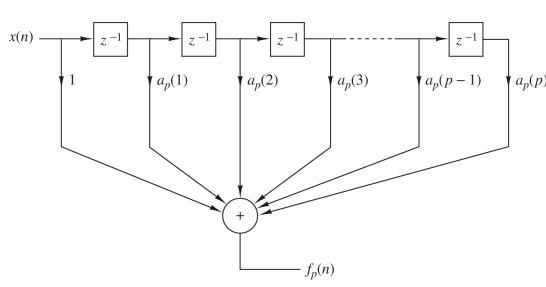


Figure 12.3.2 Prediction-error filter.

$$\text{Erreur: } e(n) = f_p(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

$$f_p(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k)$$

- Cela correspond à un filtre RIF

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^p a_p(k)z^{-k} \quad \text{avec} \quad a_p(0) = 1$$

Figures de [1].



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

172

Erreur de prédiction minimale



- L'erreur quadratique moyenne s'écrit comme:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^f &= E[|f_p(n)|^2] \\ &= \gamma_{xx}(0) + 2\mathcal{R} \left[\sum_{l=1}^p a_p^*(l) \gamma_{xx}(l) \right] + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p^*(l) a_p(k) \gamma_{xx}(l-k) \end{aligned}$$

- La minimisation de cette fonction quadratique des coefficients donne

$$\gamma_{xx}(l) = - \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{xx}(l-k), \quad l = 1, 2, \dots, p$$

Équations normales

- L'erreur minimale est donc:

$$\min[\mathcal{E}_p^f] \equiv E_p^f = \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{xx}(-k)$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Processus AR vs prédition linéaire

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}(m-k) + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad \text{Equations de Yule-Walker}$$

Equations normales $\gamma_{xx}(l) = -\sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{xx}(l-k), \quad l = 1, 2, \dots, p$

- Il y a une correspondance entre les coefficients des 2 systèmes
 - si $x(n)$ est un processus AR, les coefficients de prédition sont les $\{a_k\}$
 - l'erreur minimale du prédicteur est équivalente à la variance σ_w^2 du bruit blanc (séquence d'innovation)
 - le filtre de prédition est en fait l'équivalent du filtre qui génère le bruit blanc à partir d'un processus stationnaire AR



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Solutions des équations normales

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xx}(l) &= -\sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{xx}(l-k), \quad l = 1, 2, \dots, p \\ E_p^f &= \gamma_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{xx}(-k) \end{aligned} \right\} \sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{xx}(l-k) = \begin{cases} E_p^f, & l = 0 \\ 0, & l = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad \text{avec } a_p(0) = 1$$

- Les équations normales augmentées prennent la forme $\Gamma_p \mathbf{a}_p = \mathbf{e}_p$

- avec

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}^*(1) & \dots & \gamma_{xx}^*(p) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad \text{Matrice Toeplitz!}$$

- Solution par des méthodes récursives, comme l'algorithme de *Levinson-Durbin* (ou l'algorithme de *Schur*)

LD: $a_m(k) = a_{m-1}(k) + a_m(m) a_{m-1}^*(m-k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad m = 1, 2, \dots, p$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Levinson-Durbin

- Algorithme efficace pour résoudre les équations normales, en utilisant les propriétés de la matrice Γ_p qui est Toeplitz
- En combinant les équations normales, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(p) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(p) & \gamma_{xx}(p-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_p(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_p(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p^f \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γ_p \mathbf{a}_p \mathbf{e}_p

- On établit une relation de récurrence, en calculant la solution pour un filtre d'ordre i , à partir de celle pour un filtre d'ordre ($i-1$)

Signes de coefficients inversés par rapport aux relations précédentes - sans perte de généralité



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Récurrence dans Levinson-Durbin

- Solution pour le filtre d'ordre ($i-1$)

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(i-1) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(i-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(i-1) & \gamma_{xx}(i-2) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{i-1}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{i-1}(i-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i-1}^f \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut augmenter le système

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(i) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(i-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(i) & \gamma_{xx}(i-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{i-1}(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{i-1}(i-1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i-1}^f \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{i-1} \end{bmatrix}$$

- avec $\lambda_{i-1} = \gamma_{xx}(i) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1}(k)\gamma_{xx}(i-k)$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Astuce...

- La dernière relation n'est pas sous la forme idéale $\Gamma_p a_p = e_p$
- Mais, grâce aux propriétés Toeplitz, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(i) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(i-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{xx}(i) & \gamma_{xx}(i-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}(i-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{i-1}(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ E_{i-1}^f \end{bmatrix}$$

- En combinant les 2 dernières relations, on se rapproche de $\Gamma_p a_p = e_p$

$$\Gamma_i \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{i-1}(1) \\ \vdots \\ -a_{i-1}(i-1) \\ 0 \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}(i-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{i-1}(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i-1}^f \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{i-1} \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} \lambda_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ E_{i-1}^f \end{bmatrix}$$



Finalement

- Pour obtenir une forme $\Gamma_p a_p = e_p$ il ne faut qu'une seule valeur non nulle dans le terme de droite, donc:

$$k_i = \frac{\lambda_{i-1}}{E_{i-1}^f} = \frac{\gamma_{xx}(i) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1}(k) \gamma_{xx}(i-k)}{E_{i-1}^f} \quad E_i^f = E_{i-1}^f - k_i \lambda_{i-1} = E_{i-1}^f (1 - k_i^2)$$

- Avec ce choix, le vecteur de coefficients pour le filtre d'ordre i devient

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -a_i(1) \\ \vdots \\ -a_i(i-1) \\ -a_i(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{i-1}(1) \\ \vdots \\ -a_{i-1}(i-1) \\ 0 \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}(i-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{i-1}(1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

- On obtient donc les relations de récurrence suivantes

$$a_i(j) = a_{i-1}(j) - k_i a_{i-1}(i-j), \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \quad \text{et} \quad a_i(i) = k_i$$



L'algorithme de Levinson-Durbin

$$E_0^f = \gamma_{xx}(0)$$

For $i = 1, 2, \dots, p$

$$k_i = \frac{\gamma_{xx}(i) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1}(k)\gamma_{xx}(i-k)}{E_{i-1}^f}$$

$$a_i(i) = k_i$$

if $i > 1$ then for $j = 1, 2, \dots, i-1$

$$a_i(j) = a_{i-1}(j) - k_i a_{i-1}(i-j)$$

end

$$E_i^f = (1 - k_i^2) E_{i-1}^f$$

end

$$a(j) = a_p(j) \quad j = 1, 2, \dots, M$$



Filtrage de signaux bruités

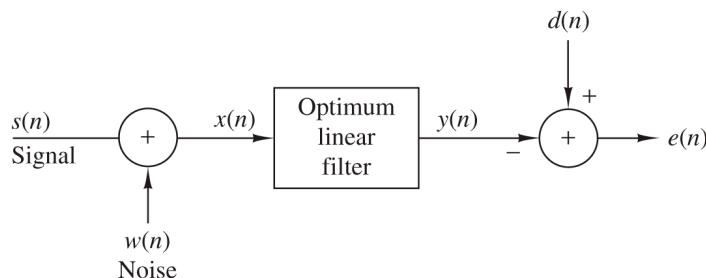


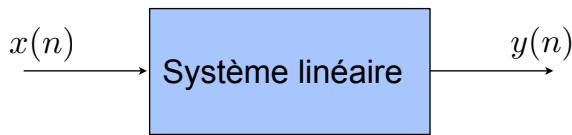
Figure 12.7.1 Model for linear estimation problem.

- But: retrouver le signal d dans le signal bruité: $x(n) = s(n) + w(n)$
- Méthode: construire un filtre linéaire h tel que sa sortie y soit aussi proche que possible de d
 - Filtrage: $d(n) = s(n)$
 - Prédition: $d(n) = s(n+D)$, $D > 0$
 - Erreur: $e(n) = d(n) - y(n)$
- Hypothèses: s , w et d sont stationnaires au sens large et à moyenne nulle.

Figure de [1].



Estimation linéaire



- L'estimation linéaire à partir de x peut être représentée par un filtre linéaire qui agit sur le signal x

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k)$$

- les échantillons de la réponse impulsionnelle représentent les coefficients de l'estimateur linéaire
- L'erreur d'estimation est donnée par

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

- on cherche généralement à minimiser l'erreur quadratique moyenne $E[|e(n)|^2]$
- filtrage optimal obtenu par les filtres de Wiener (RIF, RII)



Principe d'orthogonalité

- Estimation linéaire de y en fonction de x : $y = Ax + B$
- L'erreur quadratique est: $e = E[(\mathbf{d} - (Ax + B))^2]$
- L'erreur est minimale quand

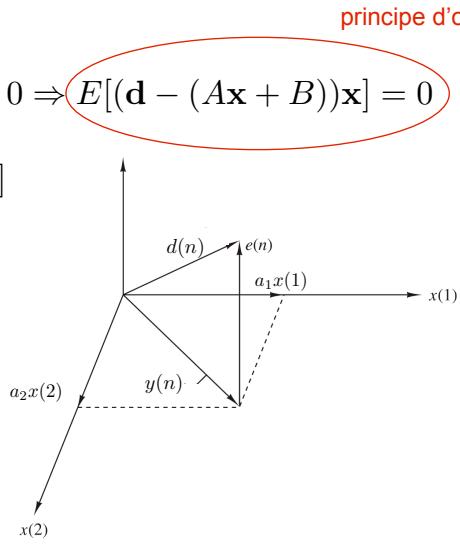
$$\frac{\partial e}{\partial A} = E[2(\mathbf{d} - (Ax + B))(-x)] = 0 \Rightarrow E[(\mathbf{d} - (Ax + B))x] = 0$$

$$E[(\mathbf{d} - y)x] = 0 \Rightarrow E[\mathbf{dx}] = E[yx]$$

- L'interprétation géométrique

- L'erreur $e(n)$ est minimale lorsque le vecteur est perpendiculaire au plan des données $x(n)$

$$\begin{aligned} MMSE &= E[e^2(n)] \\ &= E[e(n)(d^*(n) - y^*(n))] \\ &= E[e(n)d^*(n)] \end{aligned}$$



Équations de Wiener-Hopf



- Si la longueur du filtre linéaire est limitée à M , la sortie du filtre est

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

- L'erreur quadratique moyenne s'écrit alors

$$\mathcal{E} = E[|e(n)|^2] = E \left[\left| d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \right|^2 \right]$$

- L'erreur minimale (au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale) est orthogonale au signal, $E[(d - y)x] = 0$
- La minimisation de l'erreur quadratique conduit à un système d'équations

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \quad l = 0, 1, \dots, M-1.$$

- Ce sont les équations de Wiener-Hopf, ou équations normales



Filtres de Wiener RIF



- Lorsque le filtre a une longueur M , on peut ré-écrire les équations comme

$$\boldsymbol{\Gamma}_M \mathbf{h}_M = \boldsymbol{\gamma}_d$$

- avec $\boldsymbol{\Gamma}_M$ une matrice Toeplitz où $\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}(l-k)$

- Le filtre (de Wiener) optimum est donc donné par

$$\mathbf{h}_{opt} = \boldsymbol{\Gamma}_M^{-1} \boldsymbol{\gamma}_d$$

- L'erreur minimale est donnée par $MMSE = E[e(n)d^*(n)]$

$$MMSE_M = \min_{\mathbf{h}_M} \mathcal{E}_M = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} h_{opt}(k)\gamma_{dx}^*(k) = \sigma_d^2 - \boldsymbol{\gamma}_d^{*t} \boldsymbol{\Gamma}_M^{-1} \boldsymbol{\gamma}_d$$

- Solutions par méthodes exploitant les propriétés de symétrie de la matrice (Toeplitz) de corrélation (Levinson-Durbin)



Filtrage et prédition par Wiener

- En pratique, le bruit et le signal sont généralement non corrélés

$$\gamma_{xx}(k) = \gamma_{ss}(k) + \gamma_{ww}(k)$$

- Filtrage:** $d(n) = s(n)$

- si le signal et le bruit sont non corrélés: $\gamma_{dx}(k) = \gamma_{ss}(k)$

- les équations normales deviennent alors

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)[\gamma_{ss}(l-k) + \gamma_{ww}(l-k)] = \gamma_{ss}(l), \quad l = 0, 1, \dots, M-1.$$

- Prédiction:** $d(n) = s(n+D)$, $D > 0$

- si le signal et le bruit sont non corrélés: $\gamma_{dx}(k) = \gamma_{ss}(k+D)$

- on a donc

$$\sum_{k=0}^{M-1} h(k)(\gamma_{ss}(l-k) + \gamma_{ww}(l-k)) = \gamma_{ss}(l+D), \quad l = 0, 1, \dots, M-1.$$



Exemple 10: filtrage RIF

- Considérons un signal $x(n) = s(n) + w(n)$ où $s(n) = 0.6s(n-1) + v(n)$ et $\{v(n)\}$ et $\{w(n)\}$ sont des bruits blancs de variance $\sigma_v^2 = 0.64$ et $\sigma_w^2 = 1$ respectivement. On veut un filtre de Wiener de longueur $M = 2$ pour estimer $\{s(n)\}$.

- Comme $\{s(n)\}$ est en fait la sortie d'un filtre à un pôle, excité par un bruit blanc, on a la DSP

$$\Gamma_{ss}(f) = \sigma_v^2 |H(f)|^2 = \frac{0.64}{|1 - 0.6e^{-j2\pi f}|^2} = \frac{0.64}{1.36 - 1.2 \cos 2\pi f} \Rightarrow \gamma_{ss}(m) = (0.6)^{|m|}$$

- On a donc les équations de Wiener-Hopf

$$\begin{aligned} 2 h(0) + 0.6 h(1) &= 1 \\ 0.6 h(0) + 2 h(1) &= 0.6 \end{aligned}$$

- Les coefficients du filtre sont donc $h(0) = 0.451$ et $h(1) = 0.165$
- L'erreur quadratique (minimum) est donc

$$MMSE_2 = 1 - h(0)\gamma_{ss}(0) - h(1)\gamma_{ss}(1) = 0.45$$



Filtres de Wiener RII



- On peut avoir un filtre de Wiener à réponse impulsionnelle infinie

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Il faut trouver les coefficients qui minimisent l'erreur quadratique

$$\mathcal{E}_{\infty} = E[|e(n)|^2] = E \left[\left| d(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|^2 \right]$$

- Ce qui donne les équations de Wiener-Hopf

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\gamma_{xx}(l-k) = \gamma_{dx}(l), \quad l \geq 0.$$

- Et l'erreur minimale suivante

$$MMSE_{\infty} = \min_{\mathbf{h}_M} \mathcal{E}_{\infty} = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{opt}(k)\gamma_{dx}^*(k)$$

- Par contre, on ne peut pas résoudre les équations directement par la transformée en z (les équations ne sont définies que pour $l \geq 0$)



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

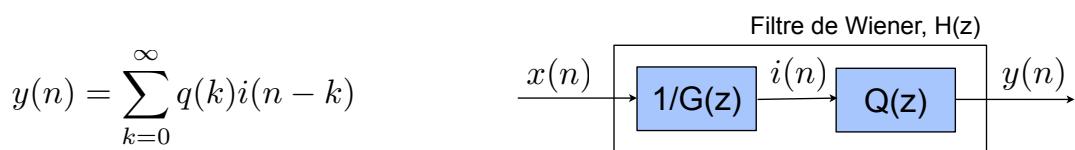
EPFL

Calcul du filtre de Wiener RII

- On peut utiliser un processus d'innovation $\{i(n)\}$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z)G(z^{-1})$$

- Le filtre de Wiener peut alors être représenté par la mise en cascade d'un filtre $1/G(z)$, et d'un filtre $Q(z)$



- Les équations de Wiener-Hopf deviennent

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k)\gamma_{ii}(l-k) = \gamma_{di}(l), \quad l \geq 0.$$

- Puisque $\{i(n)\}$ est un bruit blanc, on a $\gamma_{ii}(l-k) = 0$ sauf si $l = k$

$$q(l) = \frac{\gamma_{di}(l)}{\gamma_{ii}(0)} = \frac{\gamma_{di}(l)}{\sigma_i^2}, \quad l \geq 0$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Calcul du filtre de Wiener RII (2)

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)z^{-k} = \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{di}(k)z^{-k} = \frac{1}{\sigma_i^2} [\Gamma_{di}(z)]_+$$

- On pose $1/G(z) \equiv V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^{-k}$
- On a donc

$$\begin{aligned} \Gamma_{di}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{di}(k)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[d(n)i^*(n-k)]z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v(m)E[d(n)x^*(n-m-k)] \right] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v(m)\gamma_{dx}(k+m) \right] z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k+m)z^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} v(m)z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{dx}(k)z^{-k} \\ \Gamma_{di}(z) &= V(z^{-1})\Gamma_{dx}(z) = \frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \end{aligned}$$

- Et finalement: $H_{opt}(z) = \frac{Q(z)}{G(z)} = \frac{1}{\sigma_i^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Exemple 11: filtrage RII

- Considérons un signal $x(n) = s(n) + w(n)$ où $s(n) = 0.6s(n-1) + v(n)$ et $\{v(n)\}$ et $\{w(n)\}$ sont des bruits blancs de variance $\sigma_v^2 = 0.64$ et $\sigma_w^2 = 1$ respectivement. On veut un filtre de Wiener RII pour estimer $\{s(n)\}$.

- On factorise d'abord la DSP

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{ss}(z) + 1 = \frac{1.8(1 - 1/3z^{-1})(1 - 1/3z)}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

- D'où $\sigma_i^2 = 1.8$ et $G(z) = \frac{1 - 1/3z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$

- Ensuite

$$\Gamma_{dx}(z) = \Gamma_{ss}(z) = \frac{0.64}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

- Et

$$\left[\frac{\Gamma_{dx}(z)}{G(z^{-1})} \right]_+ = \left[\frac{0.64}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 1/3z)} \right]_+ = \left[\frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}} + \frac{0.266z}{1 - 1/3z} \right]_+ = \frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}}$$

- Finalement

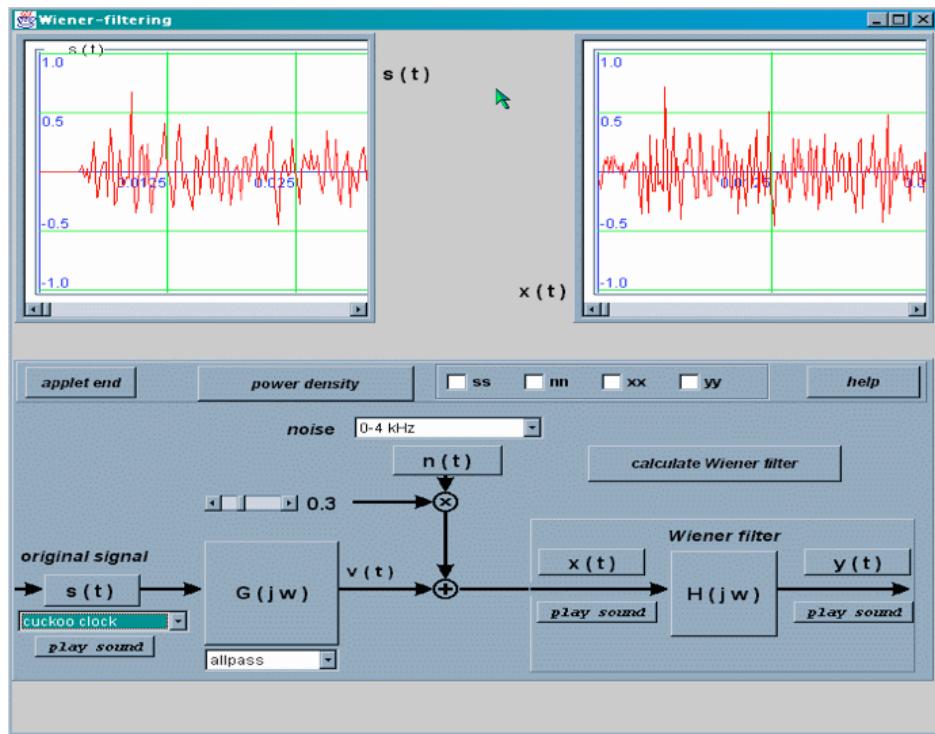
$$H_{opt}(z) = \frac{1}{1.8} \frac{1 - 0.6z^{-1}}{1 - 1/3z^{-1}} \frac{0.8}{1 - 0.6z^{-1}} = \frac{4/9}{1 - 1/3z^{-1}} \quad \text{ou} \quad h_{opt}(n) = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad n \geq 0$$



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard



Demo



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

Résumé



- Estimation et prédition linéaires peuvent être réalisées par filtrage
- Processus stationnaires particuliers: AR, MA, ARMA
 - Génération par filtrage de bruit blanc
- Prédition linéaire optimale en résolvant les équations normales
- Les filtres de Wiener RIF ou RII sont optimaux pour l'estimation au sens de l'erreur quadratique moyenne
 - nécessitent la connaissance de fonctions d'auto/inter-corrélation
 - généralisation aux systèmes dynamiques: filtres de Kalman



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

EPFL

References

1. **Digital Signal Processing** (Proakis): chapitre 12
2. *Traitement numérique des signaux* (Kunt): chapitre 7
3. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Estimation Theory* (S.M. Kay): chapitres 12-14



Traitement des signaux, automne 2021
Prof. Jean-Philippe Thiran
Prof. Pascal Frossard

