Analyse Matricielle

P. Vandergheynst

Exercice 1

Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $\epsilon > 0$ est un paramètre.

1. Calculez le noyau et l'image de A. Discutez du rang de A.
2. Calculez les matrices de projection sur l'image et le noyau de A.
3. Calculez explicitement la décomposition en valeurs singulières (SVD) de A et discutez de la relation entre les vecteurs singuliers et les matrices de projection précédemment calculées.
4. Soit le vecteur $b = [0, 0, 1]^T$. Résolvez le problème aux moindres carrés $x^* = \text{argmin}_x \|Ax - b\|_2$.

Exercice 2

Deux matrices A et B dans $\mathbb{R}^{n\times m}$ sont dites unitairement équivallentes si $A = QBQ^T$ pour $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ orthogonale. Est-il vrai ou faux que A et B sont unitairement équivallentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières.

Exercice 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et sa SVD $A = U\Sigma V^T$. Montrez que la norme spectrale de A satisfait $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$. Exprimez $\|\Sigma\|_2$ en termes des valeurs singulières. Soit la perturbation suivante de A : $A_\epsilon = U(\Sigma + \epsilon \mathbb{I}_{m\times n})V^T$. Quel est le rang de A_ϵ ? Montrez que $\lim_{\epsilon\to 0} \|A - A_\epsilon\|_2 = 0$.