# Série 8 - statistique suffisante

Thèmes: statistique suffisante, variance, biais, minimum de variance, inégalité de Cramér-Rao, théorème de factorisation, modèle exponentiel.

# Exercice 1

Un processus de fabrication industriel produit des fibres de différentes longeurs. La longueur $X$ d'une telle fibre est supposée obéir à la densité de probabilité

$$f(x) = 2\,\lambda\, e^{-\lambda\, x^2} \quad \text{pour} \quad x > 0$$

avec $\lambda > 0$. Supposons que $n$ fibres soient sélectionnées au hasard, ce qui donne $n$ variables aléatoires $X_1$, $X_2$, …, $X_n$

- Montrer que $T = \sum X_i^2$ est une stastistique suffisante pour $\lambda$

# Exercice 2

Un expérimentateur prend $n$ mesures $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ d'une constante $\mu$ en utilisant un instrument de mesure de variance $\sigma^2$ connue. (Considérer les variables aléatoires associées $X_1$, $X_2$, …, $X_n$ comme de variables indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale.) Il procède en prenant $m$ mesures additionnelles $y_1$, $y_2$, …, $y_m$ également associées à des variables aléatoires $Y_1$, $Y_2$, …, $Y_m$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale mais de variance $k\sigma^2$. Montrer que

$$T \triangleq n\,k\,\bar{X} + m\bar{Y}$$

est une statistique suffisante pour $\mu$ et déterminer sa distribution.

---

**Indication, solution partielle:** Déterminer la vraisemblance et utiliser le théorème de factorisation. Autre indication

$$\sum a_i X_i \sim \mathcal{N}(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$$

avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$

---

# Exercice 3

Supposons $X$ une variable aléatoire dont le densité de probabilité appartienne à la famille exponentielle

$$A(\theta)\,B(x)\,e^{c(\theta)\,d(x)}$$

Le paramètre $\phi = c(\theta)$ est appelé le paramètre naturel de la distribution. Déterminer le paramètre naturel des distributions binomiales, de Poisson, et exponentielles.

---

**Indication, solution partielle:** Pour la binomiale écrire sous forme exponentielle en utilisant le truc $a = \exp(\log a)$. Pour la loi de Poisson, effectuer une astuce similaire.

---

# Exercice 4

Soit $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ des variables aléatoires distribuées selon une loi de Bernouilli de paramètre inconnu $p$. Montrer que la variance de n'importe quel estimateur non biaisé de $(1-p)^2$ doit être au moins

$$4p(1-p)^3/n$$