# Série 7 - vraisemblance

Thèmes: vraisemblance, maximum de vraisemblance, vraisemblance relative, information, score, intervalle de vraisemblance.

# Exercice 1

Les feuilles d'une plante sont examinées pour la présence d'insectes. Le nombre d'insectes sur une feuille est supposée obéir à une distribution de Poisson de moyenne $\mu$, à la différence près qu'un certain nombre de feuilles ont aucun insecte parcequ'elles ne fournissent aucune nourriture pour les insectes, et non pas par les variations des chances due au hasard qui sont prises en compte par la loi de Poisson. Les feuilles qui n'ont pas d'insecte ne sont donc pas prises en compte.

1. Déterminer la propabilité conditionnelle qu'une feuille comporte un nombre d'insectes égal à $i$, sachant qu'elle contient au moins un insecte.

2. Supposons que $x_i$ feuilles soient détectées contenant $i$ insectes ($i = 1,2,3,\ldots$), avec $\sum x_i = n$. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour $\mu$ satisfait l'équation
$$\hat{\mu} = \bar{x}(1 - e^{-\hat{\mu}})$$
avec
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum i\, x_i$$

3. Déterminer $\hat{\mu}$ numériquement dans le cas $\bar{x} = 3.2$.

# Exercice 2

Dans une population dont la fréquence d'occurance de daltonisme est $\theta$, une certaine théorie génétique indique que la probabilité qu'un homme soit sujet au daltonisme est $\theta$, et que la probabilité qu'une femme soit sujet au daltonisme est $\theta^2$. Un échantillonnage est effectué avec $M$ hommes dont $m$ sont daltoniens, et $N$ femmes dont $n$ sont daltoniennes. Déterminer la fonction de vraisemblance pour $\theta$ basée sur les deux échantillons et montrer que l'on peut déterminer $\hat{\theta}$ en résolvant une équation quadratique.

---

**Indication, solution partielle:**

$$L(\theta) = \theta^m \cdot (1-\theta)^{M-m} \cdot \theta^{2n} \cdot (1-\theta^2)^{N-n}$$

condition
$$l^{'}(\theta) = 0$$

---

# Exercice 3

Supposons que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ soient indépendantes et distribuées selon des lois normales avec la même moyenne $\mu$, mais selon des variance différentes

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/a_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

où $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sont des constantes connues. Déterminer des expressions pour les estimateurs du maximum de vraisemblance pour $\mu$ et $\sigma^2$.

# Exercice 4

Un instrument de mesure donne en moyenne la mesure exacte du poids mais fluctue avec une variance unité autour de la vraie moyenne. Nous avons deux objets à disposition, le premier de poids $\mu_1$ et le second de poids $\mu_2$. Nous allons estimer $\mu_1$ et $\mu_2$ en utilisant trois mesures.

1. On place $\mu_1$ sur la balance et elle indique $x_1$.
2. On place $\mu_2$ sur la balance et elle indique $x_2$.
3. On place ensemble $\mu_1$ et $\mu_2$ et la balance indique $x_1 + x_2$.

On demande les valeurs estimées par l'estimateur du maximum de vraisemblance.

---

**Indication, solution partielle:**

$$\begin{array}{rcl} X_1 & \sim & \mathcal{N}(\mu_1,1) \\ X_2 & \sim & \mathcal{N}(\mu_2,1) \\ X_3 & \sim & \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,1) \end{array}$$

les mesures sont indépendantes et la densité de probabilité jointe est

$$p(x_1,x_2,x_3|\mu_1,\mu_2) = p(x_1|\mu_1)\,p(x_2|\mu_2)\,p(x_3|\mu_1+\mu_2)$$

$$L(\mu_1,\mu_2) = e^{-(x_1-\mu_1)^2/2}\,e^{-(x_2-\mu_2)^2/2}\,e^{-(x_3-(\mu_1+\mu_2))^2/2}$$

---

# Exercice 5

Le nombre de particules émisent d'une source radioactive obéit à une distribution de Poisson. L'intensité de la source décroit exponentiellement avec le temps et la moyenne de la distribution de Poisson au jour $j$ est

$$\mu_j = \alpha\beta^j \qquad (j = 0,1,2,\ldots,n)$$

Des mesures indépendantes au fil des jours sont effectuées avec les résultats du nombre de particules émises durant une unité de temps fixe de

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

durant les jours $j = 0,1,2,\ldots,n$ respectifs. On demande de déterminer les équations pour le maximum de vraisemblance et essayer d'expliquer une méthode pour résoudre ces équations en vue de déterminer $\hat{\alpha}$, et $\hat{\beta}$.