Série 4 - probabilités continues

Thèmes: Distribution continue (pdf), fonction de répartition (cdf), probabilités continues, théorème de De Moivre-Laplace, fonction monotone d'une variable aléatoire $Y = h(X)$, probabilité conditionnelle, densité de probabilité jointe, probabilité marginale, convolution, fonction génératrice.

Exercice 1

Démontrer la formule

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

valable pour une fonction h monotone qui relie $Y = h(X)$, i.e. la variable aléatoire continue Y, de densité de probabilité g et de fonction de répartition G, et la variable aléatoire continue X, de densité de probabilité f et de fonction de répartition F. Pour y arriver, parter de la fonction de répartition G et considérer l'évènement $\{\omega | Y \leq y\}$ et prendre les deux cas séparément, fonction h monotone croissante et h monotone décroissante.

Indication, solution partielle: Changer de variable dans $P(Y \leq y)$ et faire attention au changement de sens de l'inégalité. Faites un graphique pour bien comprendre ce qui se passe entre x et X et y et Y. Connecter le résultat obtenu à la fonction de répartition F, puis dériver.

Exercice 2

Démontrer que le facteur de normalisation de la ditrbution normale est égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Pour y arriver, définir la distribution jointe

$$h(x,y) = k\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

et déterminer la constante k pour que l'intégrale sur tout le domaine donne 1

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) dx dy$$

Introduire les coordonnées polaires au lieu de x et y, autrement dit faire la substitution $x = r\,\cos\theta$ et $y = r\,\sin\theta$. Ensuite calculer les densités marginales $f(x)$ et $g(y)$ une fois la constante k calculée et en restant dans les coordonnées cartésiennes x et y.

Exercice 3

Une pièce de monnaie bien équilibrée est jetée trois fois. Soient les deux variables aléatoires discrètes suivantes

- X = nombre de "face".
- Y = numéro du jet dans lequel apparaît "face" pour la première fois (on posera $Y = 4$ s'il y a eu trois fois "pile").

Compléter la tableau qui fait apparaître la distribution bidimensionnelle ainsi que les probabilités marginales de X (dernière colonne) et Y (dernière ligne).

X \ Y	1	2	3	4	
0	0	0	0		
1				0	
2			0	0	
3		0	0	0	
					1

Exercice 4

Soit deux variables aléatoires continues X et Y de densité jointe $h(x,y)$. Et désignons la moyenne de X par μ_x et la moyenne de Y par μ_y. On rappelle les définitions:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) dy \right) dx \\
\mu_y &= \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) dx \right) dy
\end{aligned}$$

Soit la définition de la corrélation (parfois appelée également covariance)

$$\sigma_{XY} \triangleq \mathbb{E}[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

On demande de démontrer la formule

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\,\sigma_{XY}$$

Que devient cette dernière formule lorsque les variables sont indépendantes, c.-à-d. lorsque la densité jointe admet la factorisation $h(x,y) = f(x)g(y)$?

Indication, solution partielle: Utiliser les définitions et la propriété de linéarité de l'opérateur d'espérance mathématique $\mathbb{E}[a+b] = \mathbb{E}[a] + \mathbb{E}[b]$.

Exercice 5

Soit un dé à trois face dont les faces portent respectivement les nombres 1, 2 et 3. On s'intéresse au résultat de deux lancés en additionnant le résultat de chaque dé. Le dé n'est pas équilibré mais et on a les probabilités de chaque face données dans le tableau suivant:

1	2	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On demande de calculer à l'aide de la fonction génératrice les probabilités d'obtenir les résultats donnés dans le tableau

2	3	4	5	6

Exercice 6

Exercice sur les probabilité conditionnelle de la leçon 2. Soit le contrôle qualité suivant. D'un lot comprenant 10 pièces et dont la moitié sont défectueuses, on prélève sans remise un échantillon de taille 3. Quelle est la probabilité $P(A)$ que l'échantillon comprenne aucune pièce défectueuse ?

Indication, solution partielle: Introduire l'évènement A_k qui signifie que la $k$ième pièce prélevée est la bonne et introduire les probabilités conditionnelles $P(A_2|A_1)$ et $P(A_3|A_1 \cap A_2)$ et la probabilité absolue $P(A_1 \cap A_2 \cap A_2)$. La réponse du problème est $\frac{1}{12}$.

Exercice 7

L'objectif est de comparer la loi normale avec la loi binomiale par la correspondance donnée par le théorème de De Moivre - Laplace. Prenons la distribution binomiale avec les paramètres $p = q = 1/2$. Définissons la loi binomiale par

$$P_n(k) \triangleq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

et la fonction de répartition de la loi normale recentrée et étalée selon le résultat du théorème de de Moivre - Laplace

$$Q_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\, npq}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}$$

avec

$$x_{nk} \triangleq \frac{k - n\,q}{\sqrt{npq}}$$

et

$$y_{nk} \triangleq \sqrt{npq}\, P_n(k)$$

On demande de compléter le tableau

n	k	P_n	Q_n	$P_n - Q_n$	P_n/Q_n
25	15	0.09742	0.09679	0.0063	1.0065
100			0.04839		
400		0.024207			
1156		0.014236			

A cette fin, déterminer le nombre entier k pour chacune des lignes de telle sorte que $x_{nk} = 1$.

A partir des valeurs obtenues dans la dernière colonne, est-ce que cela suit la prédiction du théorème ?