Série 3 - probabilités continues

Thèmes: Distribution continues (pdf), fonction de répartition (cdf), loi exponentielle, médiane, moyenne, variance. Fonction monotone d'une variable aléatoire $Y = f(X)$.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire continue avec une densité de probabilité

$$f(x) = k\,x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

1. Evaluer la constante k et trouver la fonction de répartition (la 'c.d.f.', cumulative distribution function an anglais).
2. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur entre 0.2 et 0.6 et représenter cette probabilité sur la densité de probabilité (p.d.f) et sur la fonction de répartition (c.d.f.).
3. Evaluer $P(0.39 < X < 0.41)$ à l'aide de

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(t)$$

avec t correspondant au point milieu de l'intervalle $[a; b]$. Comparer avec la vraie valeur.

4. Déterminer la médiane, la moyenne, et la variance de X.

Indication, solution partielle: $k = 6$, $F(x) = 3x^2 - 2x^3$, pour $0 < x < 1$; 0.5440; 0.0288; 0.028796; $m = \mu = 0.5$, $\sigma^2 = 0.05$

Exercice 2

Supposons que la durée de vie d'un certain type d'ampoule est distribuée exponentiellement avec une moyenne μ. La table suivante indique (en nombre de jours) la durée de vie d'un lot de 30 ampoules.

23	261	87	7	120	14	62	47	225	71	246	21	42	20	5
12	120	11	3	14	71	11	14	11	16	90	1	16	52	95

Vérifier que la moyenne d'échantillon est $\bar{\mu} = 59.6\bar{3}$.

1. En supposant une distribution exponentielle, calculer
   - $P(0 < X \leq 40)$
   - $P(40 < X \leq 100)$
   - $P(100 < X \leq 200)$
   - $P(X > 200)$
2. Comparer les fréquences observées (nombres d'ampoules ayant une durée de vie dans chaque intervalle demandé) aux fréquences théoriques (le nombre théorique d'ampoules dont la durée de vie devrait se situer dans l'intervalle demandé).

Indication, solution partielle:

Ampoules observées, par catégorie:	?	9	2	?
Ampoules théoriques, par catégorie:	14.66	?	?	1.05

Exercice 3

Un triangle isocèle a deux côtés de longueur unité 1. L'angle X entre ces deux côtés est une variable aléatoire avec une densité de probabilité (pdf)

$$f(x) = kx(\pi - x) \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

où k est une constante. Déterminer la densité de probabilité correspondant à la surface du triangle. Déterminer l'espérance mathématique de la surface du triangle.

Indication, solution partielle:

- $A \triangleq \sin\left(\frac{X}{2}\right)\cos\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin X$;
- pdf: $\frac{2k}{\sqrt{1-4a^2}}(\sin^{-1}(2a))(\pi - \sin^{-1}(2a))$ pour $0 < a < \frac{1}{2}$;
- $\mathbb{E}(A) = 12/\pi^3$.
