Série 2 - probabilités discrètes

Thèmes: Axiomes de probabilité, moyenne, distribution discrètes, dénombrement, cardinalité, combinatoire, indépendance, jeu de hasard.

Exercice 1

Dans cet exercice, la variable X désigne une variable aléatoire discrète c.-à-d. pouvant prendre des valeurs dans un ensemble $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable avec une distribution discrète P_X. Soit également deux nombres réels positif $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Quelles sont les propositions vraies parmi celles listées ci-dessous ? Justifiez votre réponse.

1. La variable aléatoire X peut prendre uniquement des valeurs non négatives.
2. P_X prends des valeurs non-négatives.
3. $\mathrm{var}(X) \geq 0$
4. $\mathbb{E}(X) \in \mathcal{X}$
5. $\mathbb{E}(aX^2 + b) = a(\mathbb{E}(x))^2 + 2$
6. Si deux évènements A et B sont disjoints (i.e. $A \cap B = \emptyset$), alors les évènements sont indépendants.
7. Si deux évènements A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
8. Si deux évènements A et B sont disjoints, alors $P(A|B) = P(B)$.

Exercice 2

Soit un jeu de hasard qui consiste à lancer deux dés à six faces. Un dé est rouge, l'autre est noir. On considère les évènements suivants:

- $A_1 \triangleq \{$"chaque dé donne la valeur 1"$\}$
- $A_2 \triangleq \{$"aucun dé donne la valeur 1"$\}$
- $A_3 \triangleq \{$"un des dés donne la valeur 1"$\}$
- $A_4 \triangleq \{$"exactement un seul dé donne la valeur 1"$\}$
- $A_5 \triangleq \{$"la somme des valeurs des deux dés donne la valeur 7"$\}$

1. Calculer la probabilité associée à chaque évènement A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.

2. Quelle est la probabilité de $A_3 \cap A_5$? Est-ce que les deux évènements A_3 et A_5 sont-ils indépendants ?
3. Considérer la variante $A_3' \triangleq \{$"le dé rouge donne la valeur 1"$\}$. Est-ce que les deux évènements A_3' et A_5 sont-ils indépendants ?

Exercice 3

Un club de bridge a douze membres (six couples, mariés homme et femme). Quatre personnes sont sélectionnées au hasard pour former le comité du club. Déterminer la probabilité que le comité comporte deux hommes et deux femmes.

Indication, solution partielle:

$$P = 0.455$$

Exercice 4

Un jeu de quatre cartes distinctes ayant sur chaque carte, face visible, un des éléments Terre, Vent, Eau et Feu. Chaque élément est représenté par une et une seule carte. Le jeu de quatre carte est mélangé et toutes les cartes sont posées sur la table face cachée. L'objectif du jeu est de tourner les cartes jusqu'à ce que le joueur gagne ou perde. Le joueur gagne s'il retourne dans un ordre quelconque Terre et Eau. Le joueur perd s'il retourne la carte Feu. Quelle est la probabilité de gain ?

Indication, solution partielle: $P = \frac{1}{3}$

Exercice 5

Voici les règles du jeu de hasard de Casino appelé 'Craps'. Un joueur prends deux dés qui sont jetés avec un jet groupé (les deux dés sont lancés ensembles) sur une longue table creuse munie d'un tapis vert avec des paris divers et variés inscrits sur le tapis. Si le total est 7 ou 11 en additionnant les deux faces qui sont apparues après le lancé, le joueur gagne (on appelle cela un 'naturel'). S'il lance un 2, 3 ou 12, il perd (un jet 'crap'). Si le résultats est différent, le lanceur note la somme des deux faces qui sont apparues suite à ce lancé. Cette somme devient le 'point'. Le lanceur continue alors de lancer les deux dés jusqu'à ce que :

- il lance un 7 et il perd;
- il relance le 'point' et il gagne.

Montrer que la probabilité de perdre est de 251/495, ce qui en fait un jeu relativement équilibré, mais tout de même biaisé en faveur du Casino. Comme à la roulette, des joueurs situés autour de la table peuvent effectuer les paris inscrits sur la table en y mettant des jetons pendant que le lanceur est en action.

Indication, solution partielle: Pour $0 < b < 1$ on a

$$\begin{aligned} a + b(a + b(a + b(\cdots))) &= a + ab + ab^2 + ab^3 \cdots \\ &= a \cdot (1 + b + b^2 + b^3 + \cdots) \\ &= a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{a}{1-b} \end{aligned}$$

]

Exercice 6

Pour un paramètre p donné avec $p \in]0;1]$ et pour un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$, les lois de probabilité discrètes (distributions) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ et $Y \sim \mathrm{Poi}(\theta)$ sont données respectivement par

$$\begin{aligned} P_X(k) &= (1-p)^{k-1} p \\ P_Y(k) &= \frac{\theta^k \, e^{-\theta}}{k\,!} \end{aligned}$$

Montrer que ces expressions correspondent bien à des lois de probabilité (i.e. vérifier les propriétés que doivent satisfaire une loi de probabilité, positivité et sommation à 1).