Série 11 - lien entre tests et intervalles de confiance

Thèmes: tests et intervalles de confiance, inversion des probabilités (espace des échantillons vs. espace des paramètres), variable pivot, ensemble de confiance.

Exercice 1

- Déterminer un intervalle de confiance pour une loi binomiale à partir d'un test de rapport de vraisemblance $H_0 : p = p_0$ vs. $H_1 : p \neq p_0$.

Indication, solution partielle: Rappel: l'estimateur du maximum de vraisemblance d'une loi binomiale est $\hat{p} = \frac{y}{n}$ avec y une réalisation de la variable aléatoire $Y = \sum X_i \sim \mathscr{B}in(n,p)$

Exercice 2

Soit des variables aléatoires identiquement distribuées X_1, X_2, ..., $X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ avec la variance σ^2 connue.

Pour chacune des hypothèses suivantes déterminer la région d'acceptation du test au niveau α et la région de confiance à $1 - \alpha$ probabilité qui résulte de l'inversion du test.

1. $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$
3. $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

Exercice 3

Soit le tableau des quantités

forme de la distribution	type	quantité
$f(x - \mu)$	position	$\bar{X} - \mu$
$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	échelle	$\frac{\bar{X}}{\sigma}$
$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	position et échelle	$\frac{\bar{X}-\mu}{S}$

Montrer que les quantités indiquées sont des pivots.

Indication, solution partielle: Introduire n variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ toutes distribuées selon la distribution $f(z)$. Lorsque le type est une position, on cherche à localiser la moyenne. Lorsque le type est 'échelle' on cherche à estimer la variance σ^2. Lorsque le type est position-échelle on cherche à estimer à la fois la moyenne et la variance et on utilise la variance d'échantillon s. Pour le point 1. déterminer une relation entre les moyennes des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et la moyenne des variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$, sachant que les $X_i \sim f(x-\mu)$ et les $Z_i \sim f(z)$.

Exercice 4

Soit des variables aléatoires identiquement distribuées $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ avec les deux paramètres μ et σ inconnus. Une inférence simultanée sur les deux paramètres peut être effectuée à l'aide de l'inégalité

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

- Démontrer cette inégalité.
- Utiliser l'inégalité afin de combiner les ensembles de confiance

$$\left\{ \mu \middle| \bar{x} - \frac{ks}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{ks}{\sqrt{n}} \right\}$$

  et

$$\left\{ \sigma^2 \middle| \frac{(n-1)s^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\alpha} \right\}$$

  dans un seul ensemble de confiance pour (μ, σ).

- Déterminer une méthode pour déterminer simultanément k, a et b pour constituer un ensemble de confiance de probabilité $1 - \alpha$.