Série 10 - tests d'hypothèses

Thèmes: tests d'hypothèses, théorie de Neyman-Pearson, rapport de vraisemblance, puissance $1-\beta$, taille α (seuil de signification), erreur de type I, erreur de type II

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs discrètes 1, 2, ..., 7 dont on a deux hypothèses concernant sa fonction de probabilité discrète, à savoir $f(x|H_0)$ sous l'hypothèse nulle, et $f(x|H_1)$ sous l'hypothèse alternative. Ces deux distributions sont données dans le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x\|H_0)$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.94
$f(x\|H_1)$	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.79

- On demande d'utiliser le lemme de Neyman-Pearson afin de déterminer le test le plus puissant pour tester H_0 par rapport à H_1 avec une taille $\alpha = 0.04$.
- Quelle est l'erreur de type II pour ce test ?

Indication, solution partielle: Montrer que l'on rejette H_0 si $x \leq 4$ en utilisant le bon rapport entre les fonctions de distributions, en accord avec Neyman-Pearson. $\beta = 0.82$.

Exercice 2

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon une loi normale

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad i = 1, \ldots, n$$

avec la variance σ^2 hypothétisée selon

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma = \sigma_0 \\ H_1 &: \quad \sigma = \sigma_1 \qquad \sigma_1 > \sigma_0 \end{aligned}$$

- Montrer que le test le plus puissant pour rejeter H_0 est donné par $\phi = 1$ avec

$$\phi\left(\sum X_i^2\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum X_i^2 > k \\ 0 & \text{si} \quad \sum X_i^2 \leq k \end{cases}$$

  Ceci suit l'intuition. En effet, si la somme des carrés des variables observées est suffisament grande, on aura tendance à décider envers la distribution qui a la plus grande variance σ_1 (représentée par H_1) plutôt que d'opter pour la distribution ayant la plus petite variance σ_0 (représentée par H_0).

- Pour une valeur fixée α (erreur de type I), déterminer la grandeur k dans le test.

Indication, solution partielle: Pour la seconde partie, utiliser le lien entre une variable gaussienne, le carré de celle-ci et la distribution χ^2.

Exercice 3

Un abus notoire des tests, est de fabriquer ceux-ci *après* que l'expérience ait eu lieu, et de les choisir de telle sorte à systématiquement rejeter l'hypothèse nulle H_0.

Afin de déterminer la vraie valeur des erreurs de type I et II de cette procédure, on demande de calculer la taille et la puissance des tests triviaux suivants:

1. Toujours rejeter H_0 quel que soit les observations (en pratique cela revient à choisir α afin de rejeter l'hypothèse H_0).

2. Toujours accepter H_0 quel que soit les observations (en pratique choisir α afin de toujours accepter H_0).

Exercice 4

Soit des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n telles que

$$X_i \sim \mathscr{B}er(p) \qquad i = 1, \ldots, n$$

On aimerait tester

$$H_0 : p = 0.49 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : p = 0.51$$

On considère le test de rejeter H_0 lorsque $\sum X_i$ est suffisament grand.

- Utiliser le théorème de Laplace-DeMoivre pour approximer la distribution binomiale résultante du test, ceci afin de déterminer la taille n de l'échantillon afin que les deux erreurs I et II soient approximativement 0.01

Indication, solution partielle:

$$\sum X_i \sim \mathscr{B}in(n, \sum X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}$$

Exercice 5

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables indépendantes et identiquement distribuée selon

$$X_i \sim \mathscr{N}(\theta, \sigma^2) \qquad \sigma^2 \text{ connu}$$

Un test de rapport de vraisemblance de l'hypothèse $H_0 : \theta = \mu$ vs. $H_1 : \theta \neq \mu$ consiste à rejeter H_0 lorsque

$$\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} > k$$

- Déterminer une fonction en terme de la distribution centrée réduite $\mathscr{N}(0{,}1)$ pour la puissance de ce test (i.e. $1 - \beta$).

- L'expérimentateur désire une erreur de type I de 0.05, et une erreur maximum de type II de 0.25 pour la valeur du paramètre $\theta = \mu + \sigma$. Déterminer n et k pour garantir ces deux erreurs.