Fonction génératrice des moments. Laplace bilatérale

$$M_X(u) = \mathbb{E}[e^{uX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux}\, f(x)\, dx$$

où $u \in \mathbb{R}$ et f est la densité de probabilité (la distribution de probabilité).

Cette intégrale est convergeante pour $|u| < R$ avec R un réel positif. Si on compare cette formule à la formule de la transformée de Laplace bilatérale

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

on remarque que $s \in \mathbb{C}$ devient $-u$ et que s est réel uniquement pour avoir cette correspondance.

propriété	formule
linéarité	$a_1\, f_1(x) + a_2\, f_2(x) \leftrightarrow a_1 M_1(u) + a_1 M_2(u)$
décalage en x	$f(x - x_0) \leftrightarrow e^{ux_0}\, M(u)$
décalage en u	$e^{-u_0 x}\, f(x) \leftrightarrow M(u - u_0)$
mise en échelle en x	$f(a\,x) \leftrightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} M(u)$
renversement	$f(-x) \leftrightarrow M(-u)$
dérivée par rapport á x	$\frac{df(x)}{dx} \leftrightarrow -uM(u)$
dérivée par rapport à u	$x\, f(x) \leftrightarrow \frac{dM(u)}{du}$
intégration	$\int_{-\infty}^{t} f(\xi)\, d\xi \leftrightarrow -\frac{1}{u} M(u)$
convolution	$f_1(x) \ast f_2(x) \leftrightarrow M_1(u) \cdot M_2(u)$

Table 1: Table des propriétés des fonctions génératrice des moments (propriét'es des transformées de Laplace bilatérale á un changement de signe près).

Fonction caractéristique

C'est la transformée de Fourier utilisé dans le contexte des probabilités.A nouveau, et comme pour la transformée de Laplace, il y a un changement de signe par rapport à la transformée de Fourier standard. En probabilité le phaseur est e^{+jux} par rapport au phaseur $e^{-j\omega t}$, signe positif au lieu du signe négatif.

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \phi_X(u) \\
\phi_X(u) &\triangleq \mathbb{E}[e^{+jux}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{jux}\, dx \\
f_X(x) &\triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)\, e^{-jux}\, du
\end{aligned}
$$

Quelques propriétés sont résumées dans la table 2

propriété	correspondance
linéarité	$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \leftrightarrow a_1\, \phi_1(u) + a_2\, \phi_2(u)$
décalage en x	$f(x - x_0) \leftrightarrow e^{jux_0}\, \phi(u)$
décalage en u	$e^{-ju_0 x}\, f(x) \leftrightarrow \phi(u - u_0)$
mise en échelle en x	$f(a\, x) \leftrightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} \phi\left(\frac{u}{a}\right)$
renversement	$f(-x) \leftrightarrow \phi(-u)$
dualité	$\phi(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(u)$
dérivée selon x	$\frac{df}{dx} \leftrightarrow -ju\, \phi(u)$
dérivée selon u	$j\, x\, f(x) \leftrightarrow \frac{d\phi(u)}{du}$
intégration	$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi \leftrightarrow \pi\phi(0)\, \delta(u) - \frac{1}{ju}\phi(u)$
convolution	$f_1 \, * \, f_2 \leftrightarrow \phi_1(u) \cdot \phi_2(u)$
multiplication	$f_1(x) \cdot f_2(x) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\, \phi_1(u) \, * \phi_2(u)$
Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, f_2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(u)\, X_2(-u)\, du$

Table 2: Table de quelques propriétés des fonctions caractéristiques.

probabilités et statistique		temps-fréquence, signal
x	$\leftrightarrow$	t
$u \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrow$	$-s \in \mathbb{R}$

tableau de transformées

dénomination	fonction de probabilité	fct. gén. des moments $M_X(u)$	fct. caractéristique $\phi(u)$
Ponctuelle (point massique en a)	$\delta(x-a)$	e^{ua}	e^{iua}
Bernouilli	$P(x=1)=p$	$1-p+p\cdot e^u$	$1-p+p\,e^{iu}$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\left(\begin{array}{c} n \\ \\ x \end{array}\right) p^x(1-p)^{n-x}$	$(1-p+pe^u)^n$	$(1-p+pe^{iu})^n$
Géométrique	$(1-p)^k p$	$\frac{p}{1-(1-p)e^u}$ $u<-\ln(1-p)$	$\frac{p}{1-(1-p)}e^{iu}$
Poisson $\mathcal{P}oi(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$e^{\lambda(e^u-1)}$	$e^{\lambda(e^{iu}-1)}$
Uniforme $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\left[\epsilon(x-a)-\epsilon(x-b)\right]$	$\frac{e^{ub}-e^{ua}}{u(b-a)}$	$\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$
Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{u\mu+\sigma^2\frac{u^2}{2}}$	$e^{iu\mu-\sigma^2\frac{u^2}{2}}$
$\chi^2_{(\nu)}$	$\frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\cdot x^{\frac{\nu}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$	$(1-2u)^{-\nu/2}$, $u<1/2$	$(1-2iu)^{-\nu/2}$
$\Gamma(k,1/\theta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(1/\theta)^\alpha x^{\alpha-1}\,e^{-x/\theta}$	$(1-\theta\,u)^{-k}$, $u<1/\theta$	$(1-i\theta\,u)^{-k}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda\,e^{-\lambda}$	$(1-u\lambda^{-1})^{-1}$, $u<\lambda$	$(1-ui\lambda^{-1})^{-1}$