

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

Eléments de statistiques pour les data sciences

Cours 3 : probabilités continues

Dr. Ph. Müllhaupt

IGM - EPFL

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

Eléments de statistiques pour les data sciences

Cours 3 : probabilités continues

Dr. Ph. Müllhaupt

IGM - EPFL

Plan

1 densité de probabilité univariée

distribution uniforme

distribution normale

2 espérance mathématique

moyenne

variance

3 la distribution exponentielle

4 la distribution Γ

la distribution du χ^2

5 densité de probabilité

jointe

marginale

6 somme de variables aléatoires

7 fonction génératrice

8 produit de convolution

densité de probabilité continue univariée

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) avec la fonction de distribution cumulée

$$F(x) = P(X \leq x)$$

définition

S'il existe une fonction f telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

alors la fonction f est appelée la densité de probabilité (également appelée la distribution). Elle satisfait l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = 1$$

distribution uniforme

définition

La densité de probabilité uniforme (distribution uniforme) est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Elle représente la possibilité qu'un nombre situé dans l'intervalle $[a, b]$ puisse apparaître comme valeur de la variable aléatoire X avec autant de chance qu'un autre nombre de ce même intervalle.

densité de
probabilité
univariée

**distribution
uniforme**

distribution
normale

espérance
mathéma-
tique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

densité de probabilité uniforme

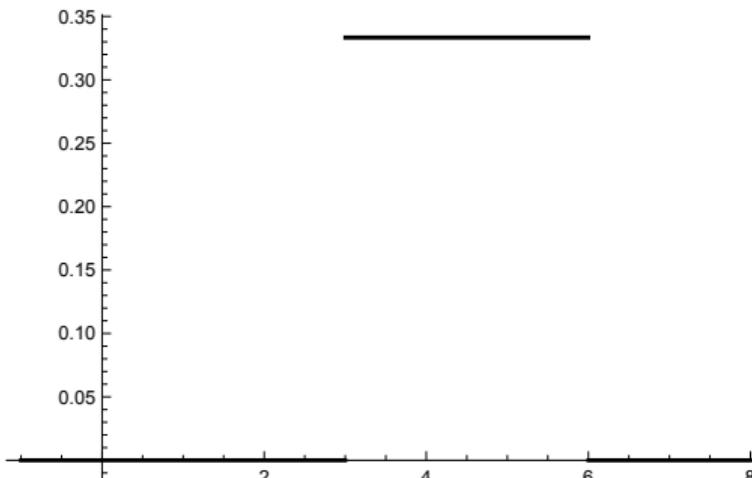


Figure – la distribution uniforme avec $a = 3$ et $b = 6$

la distribution normale (gaussienne,Laplace Gauss)

centrée à l'origine et de variance unité $\mathcal{N}(0, 1)$

définition

La distribution normale de moyenne nulle et de variance unité notée $\mathcal{N}(0, 1)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Un moyen pour s'en souvenir est de prendre le logarithme naturel et on obtient la somme d'une constante et d'une forme quadratique négative standard $-\frac{1}{2}x^2$. Le facteur devant l'exponentiel est obtenu pour forcer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

densité de
probabilité
univariée
distribution
uniforme
**distribution
normale**

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale
somme de

la distribution normale (gaussienne, Laplace-Gauss)

centrée à l'origine et de variance unité $\mathcal{N}(0, 1)$

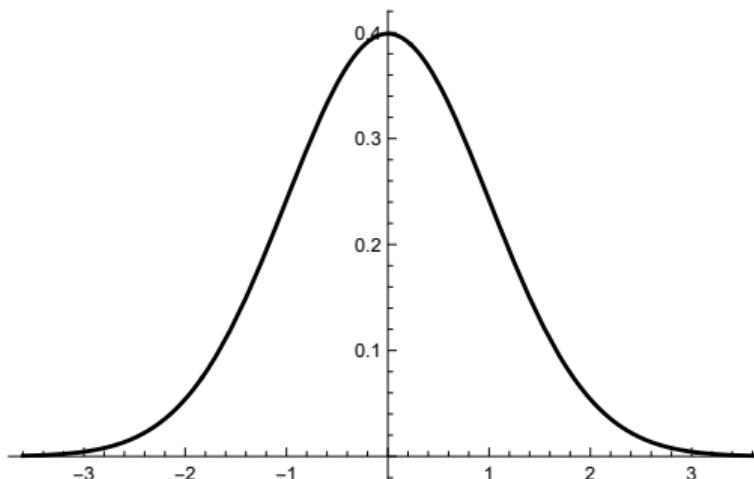


Figure – la distribution normale de moyenne nulle et de variance unité $\mathcal{N}(0, 1)$

la distribution normale

non centrée et de variance quelconque

définition

La distribution normale de moyenne μ et de variance σ^2 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Le centrage est autour de la moyenne $\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ et "l'épaisseur" est proportionnelle à l'écart type σ .

espérance mathématique

Soit une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f et une fonction ψ de la variable aléatoire X dans les nombres réels \mathbb{R}

$$\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$$

L'espérance mathématique est définie par

$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f(x) dx$$

moyenne

Soit une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f . La moyenne μ est l'espérance mathématique de la fonction identité $\psi(X) = X$

définition

$$\mu \triangleq \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

variance

Soit une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f . La variance σ^2 est l'espérance mathématique de la fonction $\psi(X) = (X - \mu)^2$

définition

$$\sigma^2 \triangleq \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Remarque : la définition $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ est identique que X soit discrète ou X continue. Ce qui change est son calcul, par série lorsque X est discrète et par une intégrale lorsque X est continue.

la distribution normale

non centrée et de variance quelconque $\mathcal{N}(\sigma, \mu)$

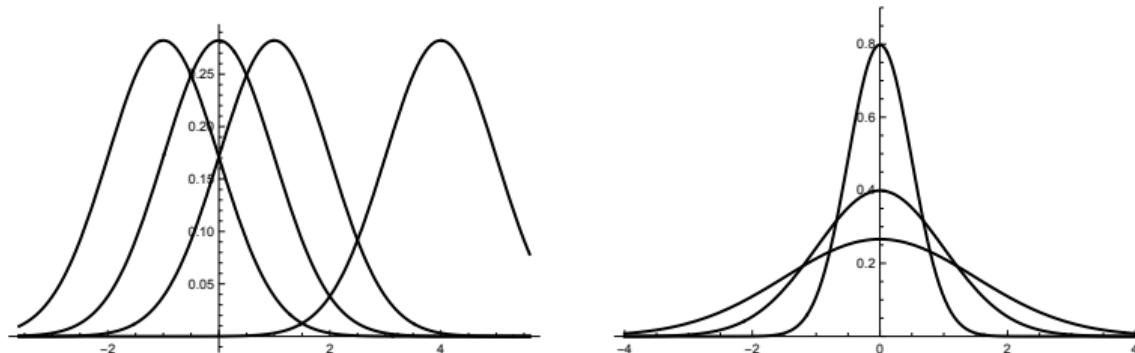


Figure – La distribution normale de moyenne nulle variable à gauche pour $\mu = -1, 0, 1, 4$ et de moyenne nulle mais de variance σ^2 variable, avec $\sigma = 0.5, 1, 1.5$

la distribution exponentielle

définition

La distribution exponentielle est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = 1$. De plus, la valeur à l'origine donne le paramètre λ .

densité de
probabilité
univariée
distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

la distribution exponentielle

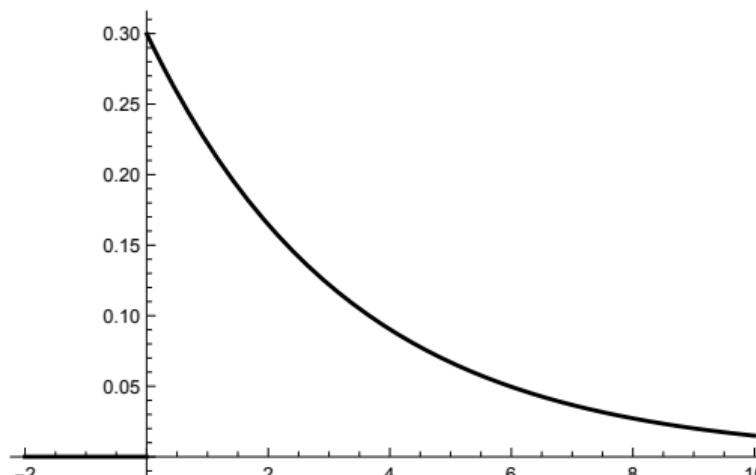


Figure – la distribution la distribution expoentielles de paramètre $\lambda = 0.3$.

densité de
probabilité
univariée
distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathéma-
tique
moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

la distribution d'Erlang

continue de paramètres $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

définition

La distribution d'Erlang de paramètres $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \geq 0$ est donnée par

$$f(x; k, \lambda) \triangleq \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad x, \lambda \geq 0$$

Remarques

intuitives, sans trop de rigueur...

- ① En comparant les courbes, on constate que la distribution exponentielle est monotone décroissante.
- ② Les distributions d'Erlang ont une tendance à croître initialement pour atteindre une valeur maximale et ensuite décroissent comme une exponentielle.
- ③ Il y a un 'combat' entre le facteur de croissance x^{k-1} la croissance monomiale et la décroissance exponentielle : pour de petite valeur de x le facteur x^{k-1} , croissance monomiale, l'emporte sur e^{-x} , la décroissance exponentielle. Pour de grande valeur de x , le facteur de décroissance exponentielle e^{-x} l'emporte sur la croissance monomiale x^{k-1} .

la fonction $\Gamma(\alpha)$

la fonction gamma généralise la factorielle

définition

La fonction $\Gamma(n)$ discrète est la fonction pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) \triangleq (n - 1) !$$

Pour une valeur $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la définition

$$\Gamma(\alpha) \triangleq \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \alpha > 0$$

la fonction Γ

propriétés

propriétés

Pour tout $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{1} \quad \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} \quad \lambda > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\textcircled{3} \quad \Gamma(n) = (n - 1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{4} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

densité de
probabilité
univariéedistribution
uniformedistribution
normaleespérance
mathématiquemoyenne
variancela
distribution
exponentiellela
distribution Γ la distribution du
 χ^2 densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

la distribution Γ (gamma)

C'est une autre façon de décrire un distribution du type de celle de Poisson où s'interpose l'effet de la croissance de la fonction d'un facteur x^α avec la décroissance de e^{-x} . L'exposant α évolue selon la fonction Γ .

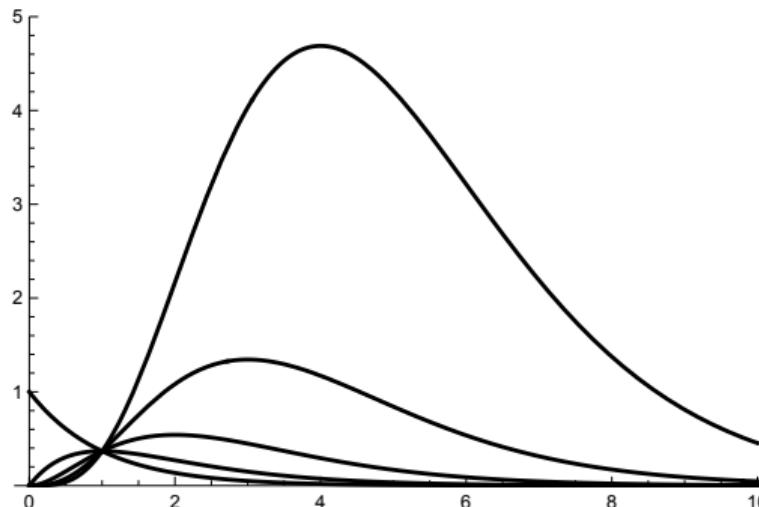


Figure – Graphiques de $x^{\alpha-1} e^{-x}$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

la distribution gamma $\Gamma(\alpha, \lambda, x)$

définition

$\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \Gamma(\alpha, \lambda, x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

densité de
probabilité
univariée
distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

la distribution gamma $\Gamma(\alpha, \lambda, x)$

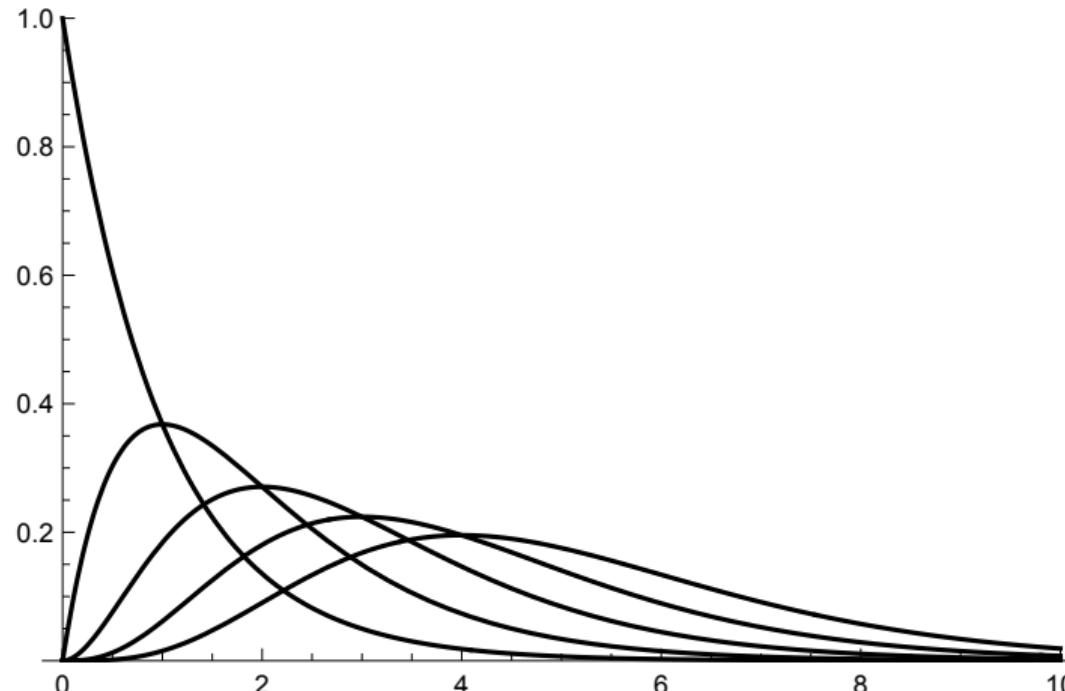


Figure – Représentation graphique de la densité de probabilité $\Gamma(\alpha, 1, x)$ pour les valeurs $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$. Remarque $\alpha = 1$ correspond à la distribution exponentielle.

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

cas particulier : la distribution du χ^2

$$X \sim \chi_{\nu}^2 \Leftrightarrow X \sim \Gamma \left(\alpha = \frac{\nu}{2}, \lambda = \frac{1}{2} \right)$$

ν désigne les degrés de liberté (grossso modo le nombre de façons que possède le hasard de perturber de manière indépendante le résultat de l'expérience). On étudiera χ_{ν}^2 à la leçon 4.

fonction d'une variable aléatoire

$$Y = h(X)$$

Soit X une variable aléatoire avec une densité de probabilité f et de fonction de répartition F . On aimerait déterminer la densité de probabilité de $Y = h(X)$ où h est une fonction réelle d'une variable réelle.

méthode recommandée

Il est commode de travailler avec la fonction de répartition

$$G(y) = P(Y \leq y)$$

à partir de la fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$. Ensuite on utilise

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$$

densité de probabilité univariée
distribution uniforme
distribution normale
espérance mathématique
moyenne
variance
la distribution exponentielle
la distribution Γ
la distribution du χ^2

densité de probabilité
jointe
marginale
somme de

exemple d'une fonction de variable aléatoire

$$Y = e^{-X}$$

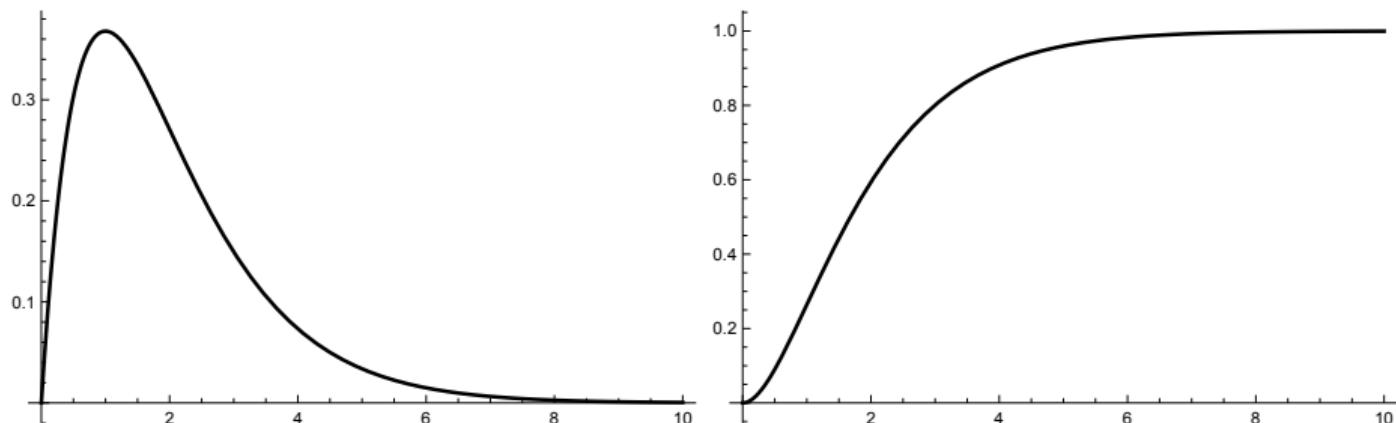


Figure – à gauche la densité de probabilité $f(x)$ et à droite la fonction de répartition $F(x)$

exemple d'une fonction de variable aléatoire

$$Y = e^{-X}$$

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{autre} \end{cases}$$

la fonction de répartition correspondante est

$$F(x) = (1 - (x + 1)e^{-x})$$

Etudions

$$Y = e^{-X}$$

exemple d'une fonction de variable aléatoire

$$Y = e^{-X}$$

Soit G la fonction de répartition de Y .

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \ln y) \\ &= P(X \geq -\ln y) = 1 - P(X < -\ln y) \\ &= 1 - F(-\ln y) \end{aligned}$$

en substituant $x = -\ln y$ cela donne

$$G(y) = y(1 - \ln y)$$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

**la distribution du
 χ^2**

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

exemple d'une fonction de variable aléatoire

$$Y = e^{-X}$$

On obtient g par dérivation

$$g(y) = \frac{dG}{dy} = \begin{cases} -\ln y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

densité de probabilité univariée
distribution uniforme
distribution normale
espérance mathématique
moyenne
variance
la distribution exponentielle
la distribution Γ
la distribution du χ^2

densité de probabilité
jointe
marginale
somme de

exemple d'une fonction de variable aléatoire

$$Y = e^{-X}$$

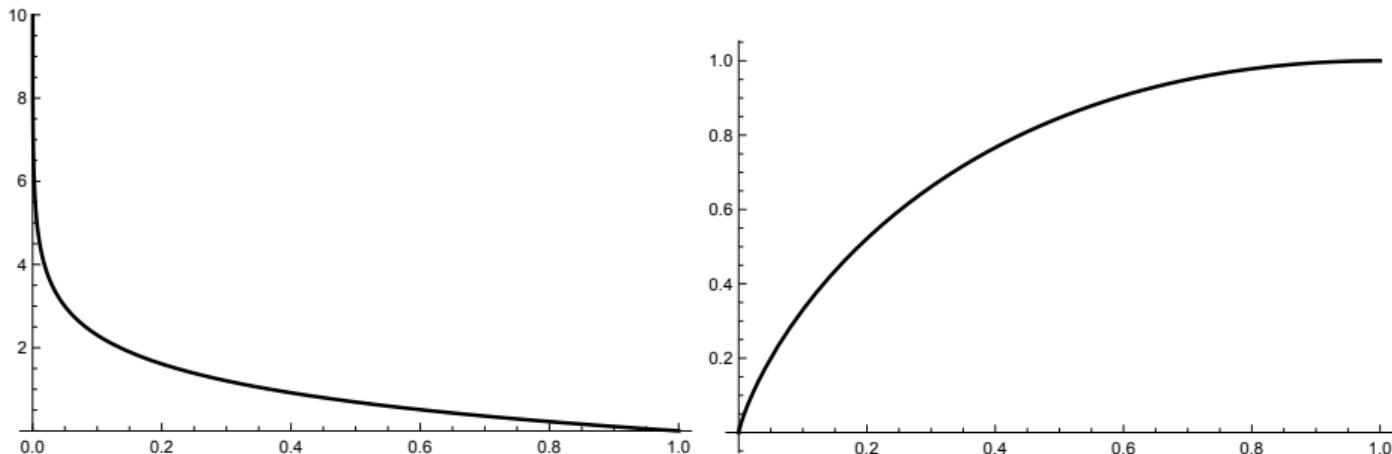


Figure – à gauche la densité de probabilité $g(y)$ et à droite la fonction de répartition $F(y)$

fonction monotone d'une variable aléatoire

croissante ou décroissante

Le résultat est général quel que soit le fonction monotone de $h(x)$ avec $Y = h(X)$.
théorème

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x)$ et Y une variable aléatoire continue de densité de probabilité $g(y)$. Soit également une fonction $Y = h(X)$ monotone dérivable (et donc continue) qui relie les deux variables aléatoires. On a le résultat

$$g(y) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$x = h(y) \quad y = h^{-1}(x) \quad dx = \frac{dh}{dy} dy$$

densité de répartition jointe

Soit un couple de variables aléatoires X et Y .

A tout évènement exprimé par X et Y correspond une région A du plan. On a

$$P(X, Y) = P(A)$$

hypothèse

L'hypothèse est que $P(A)$ puisse se représenter par une intégrale double

$$P(A) \triangleq \int \int h(x, y) dx dy$$

alors la fonction $h(x, y)$ est appelée la densité de probabilité jointe.

Poker

X : nombre d'aces
 Y : " de rois

dans 5 cartes

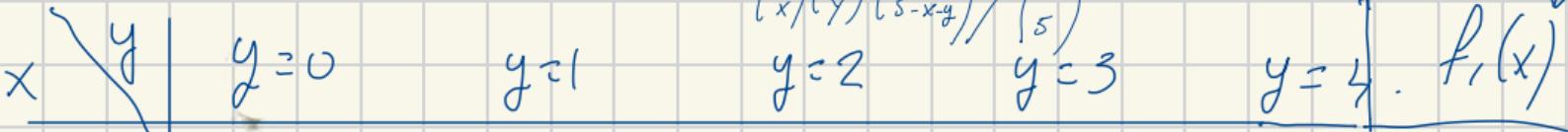
parmi les 52 cartes

$$f(x,y) = \binom{4}{x} \binom{4}{y} \binom{44}{5-x-y} / \binom{52}{5}$$

5 cartes en main

$$f_1(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f(x,y) = \binom{4}{x} \left[\sum_{y=0}^{\infty} \binom{4}{y} \binom{44}{5-x-y} \right] / \binom{52}{5}$$

$$= f_1(x) = \binom{4}{x} \binom{48}{5-x} / \binom{52}{5}$$



$x \backslash y$	0	1	2	3	4	marge
0	0,417863	0,20893	0,030575	0,001456	$1,69 \cdot 10^{-5}$	0,658842
1	0,20893	0,081534	0,008736	0,000271	$0,000002$	0,299474
2	0,030575	0,008736	0,000271	0,000009	0	0,039929
3	0,001456	$0,000271$ $(2,708 \cdot 10^{-4})$	$0,000009$ $9,234 \cdot 10^{-6}$	0	0	0,01736
4	$0,000017$ $1,69 \cdot 10^{-5}$	$0,000002$ $1,539 \cdot 10^{-6}$	0	0	0	$7,3875 \cdot 10^{-5}$

marge $\rightarrow f_2(y)$

0,658842

0,299474

0,039929

0,01736

$7,3875 \cdot 10^{-5}$

$f_1(x) = \binom{4}{x} \binom{48}{5-x} / \binom{52}{5}$

fonction de répartition jointe

Soit l'évènement

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq y\}$$

que l'on peut écrire avec un "abus de notation"

$$(X \leq x) \cap (Y \leq y)$$

définition

S'il existe une fonction $H(x, y)$ telle que

$$P(X \leq x) \cap P(Y \leq y) \triangleq H(x, y)$$

alors $H(x, y)$ est appelée la fonction de répartition jointe.

définition

Soit $h(x, y)$ la fonction de densité jointe des deux variables aléatoires X et Y . Pour une valeur de x donnée, on peut définir la fonction de densité de probabilité marginale

$$f_X(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dy$$

de même la fonction de densité marginale selon y

$$f_Y(y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx$$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

somme de variables aléatoires

Soit la somme de deux variables aléatoires continues réelles

$$Z = X + Y$$

et une fonction $\phi(x, y)$ quelconque, on a

définition

$$\mathbb{E}[\phi(x, y)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) h(x, y) dx dy$$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

somme de variables aléatoires

en particulier pour $\phi(x, y) = x + y$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) h(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dy \right) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

corrélation

variables aléatoires X et Y continues

$$\sigma_{XY} \triangleq \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) h(x, y) dx dy$$

Thm:

indépendance : $\Leftrightarrow h(x, y) = f(x)g(y)$

Thm. \Downarrow

indépendance définition $\Leftrightarrow P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$

densité de
probabilité
univariée
distribution
uniforme
distribution
normale

espérance
mathématique
moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

corrélation

variables aléatoires X et Y discrètes

$$\sigma_{XY} \triangleq \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} (k - \mu_X)(l - \mu_Y) p_{X,Y}(k,l)$$

$$p(k,l)$$

$$\text{indépendance} \Leftrightarrow p(k,l) = p_X(k)p_Y(l)$$

variable aléatoire discrète complexe

En introduisant une variable aléatoire discrète complexe

$$Z = X + j Y$$

avec $j = \sqrt{-1}$ la variable imaginaire et X et Y des variables aléatoires discrètes à valeurs dans les entiers naturels \mathbb{N} on peut définir

$$\mathbb{E}[Z] \triangleq \mathbb{E}[X] + j \mathbb{E}[Y]$$

si, et seulement si, $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}[Y] \in \mathbb{R}$ sont définis.

fonction génératrice

En introduisant le paramètre $s \in \mathbb{C}$, $|s| < 1$, on a comme cas particulier de variable aléatoire discrète complexe

$$Z = s^X$$

définition

Soit une seule variable aléatoire discrète X qui donne des nombres naturels $X \in \mathbb{N}$. La fonction génératrice est la fonction de $s \in \mathbb{C}$ et $|s| \leq 1$ qui associe à ce nombre (le paramètre $s \in \mathbb{C}$) l'espérance mathématique de la variable aléatoire discrète complexe $Z = s^X$

$$g(s) \triangleq \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k \quad \forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1$$

A l'intérieur du cercle unité, la série converge uniformément et de manière absolue pour s dans le cercle unité car $\sum_{k=1}^{\infty} p_k |s^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne

variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe

marginale

définition

produit de convolution entre distributions discrètes

$$h(k) \triangleq f * g \triangleq \sum_{l=0}^k f(l)g(k-l)$$

la convolution

Variables aléatoires X et Y et soit Z la somme des variables aléatoires

$$Z = X + Y$$

théorème de convolution

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(z - y) dy$$

On note de manière compact cette formule par le produit de convolution

$$f_Z = f_X * f_Y$$

fonction caractéristique d'une variable aléatoire

La définition de l'espérance mathématique peut-être étendue au cas où la variable X est une variable aléatoire complexe

$$X = X_1 + j X_2$$

où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires réelles. On a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + j\mathbb{E}[X_2]$$

définition

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X avec une densité de probabilité f_X est définie par

$$\phi_X(u) \triangleq \mathbb{E}[e^{iux}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_X(x) dx$$

C'est la transformée de Fourier de la densité de probabilité.

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathéma-
tique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

théorème des sommes de variables aléatoires

$$X = X_1 + X_2$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\tau} f_{X_1}(\tau) f_{X_2}(x - \tau) d\tau$$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique
moyenne

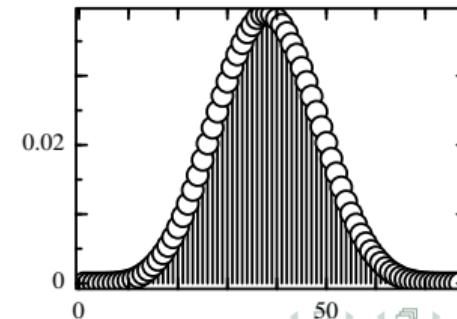
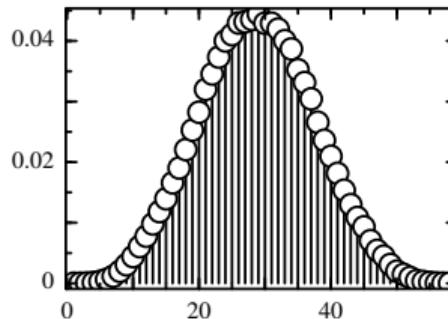
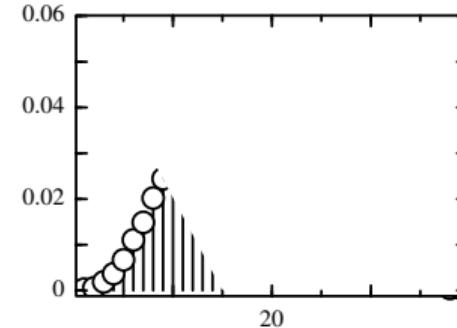
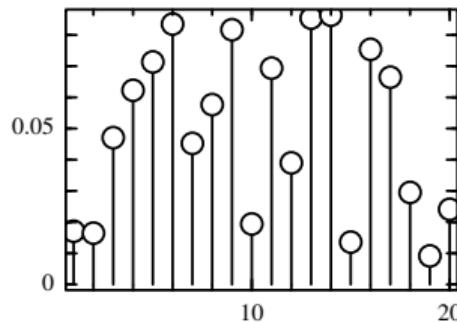
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ
la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de



convolution illustration

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

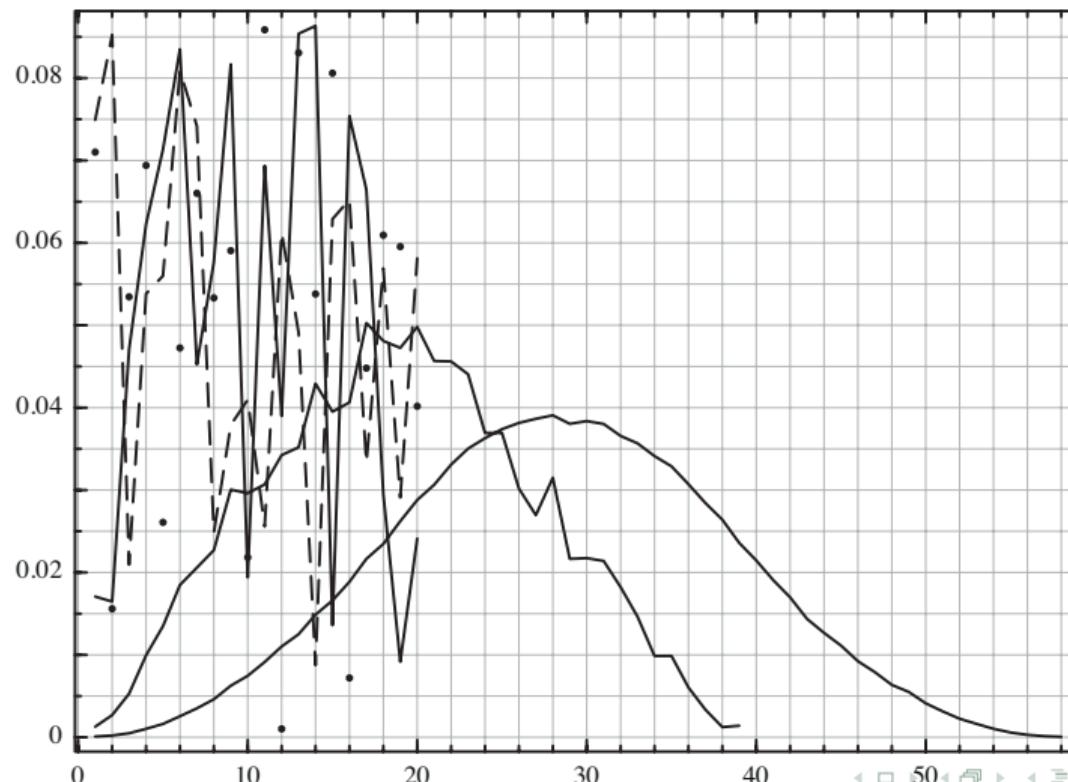
la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

somme de

convolution illustration



approximation de la distribution discrète binomiale

Théorème de De Moivre - Laplace

Si la probabilité de n expériences de Bernouilli p est constante, la probabilité d'avoir k succès parmi n durant ces expériences tend vers une distribution normale, plus précisément

$$\sqrt{npq} \mathcal{B}in(n, k) : \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \rightarrow 1$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et de manière uniforme pour tout k pour lequel la variable x est contenue dans un certain intervalle fini. Ici la correspondance

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{nkq}}$$

Rappel : $q = 1 - p$

densité de
probabilité
univariée

distribution
uniforme

distribution
normale

espérance
mathématique

moyenne
variance

la
distribution
exponentielle

la
distribution Γ

la distribution du
 χ^2

densité de
probabilité
jointe
marginale

approximation de la distribution discrète binomiale

$$\text{Bin}(n, k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi kp(1-p)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}$$