

---

## Série d'exercices 10

---

### Problème 1: $z$ -Transform

Trouver la  $z$ -transform de chacune des séquences suivantes et spécifier les régions de convergence correspondantes:

- a)  $x[n] = \delta[n] - \delta[n - 3] + \delta[n + 5]$ ,
- b)  $x[n] = (-2)^n u[n - 2]$ .
- c)  $x[n] = |n| \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ .

### Problème 2: Puzzles ROC

a) Soit  $x[n]$  être un signal absolument sommable avec une transformée en  $Z$  rationnelle  $X(z)$ . Si  $X(z)$  est connu pour avoir un pôle à  $z = \frac{1}{2}$ ,  $x[n]$  peut être

- i. un signal de durée finie?
- ii. un signal défini à gauche?
- iii. un signal défini à droite?
- iv. un signal bilatéral?

(b) Supposons que l'on nous donne les cinq faits suivants au sujet d'un système particulier LTI  $\mathcal{H}$  avec réponse impulsionnelle  $h[n]$  et une transformée en  $z$  rationnelle  $H(z)$ :

- i.  $h[n]$  est réel
- ii.  $h[n]$  est à droite
- iii.  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$
- iv.  $H(z)$  a deux zéros
- v.  $H(z)$  a un de ses pôles à un emplacement non réel sur le cercle défini par  $|z| = \frac{3}{4}$

Est-ce que  $\mathcal{H}$  est stable? Est-ce que  $\mathcal{H}$  causal?

### Problème 3: ROC et la transformée en $Z$ inverse

Un système LIT est caractérisé par la fonction suivante:

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}}$$

Pour ce système, spécifiez les pôles et les zéros de  $H(z)$  et donnez un diagramme pole-zero. En outre, préciser la ROC et déterminer  $h[n]$  dans les deux cas suivants :

- (a) Le système est stable
- (b) Le système est anticasual.

Pour quels cas ci-dessus (s'il y en a) la DTFT de  $h[n]$  existent-ils?

**Problème 4: Systèmes passe-tout**

a) On sait qu'un système LIT à temps discret a un pôle en  $a$  et un zéro en  $1/a$ , où nous supposons que  $a$  est une constante de valeur réelle. Autrement dit, sa fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (1)$$

Prouvez que l'amplitude de la réponse fréquentielle de ce système est constante, c'est-à-dire  $|H(e^{j\omega})| = d$  pour toutes les fréquences  $\omega$  et déterminez la constante  $d$ .

b) Un système LIT à temps discret a la fonction de transfert suivante:

$$G(z) = \frac{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{b}z^{-1}}{1 - bz^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{c}z^{-1}}{1 - cz^{-1}} \quad (2)$$

où  $a, b$ , et  $c$  sont des constantes réelles. Déterminer l'amplitude de sa réponse en fréquence  $|G(e^{j\omega})|$ .