Signaux et systèmes (pour EL)
Prof. Jean-Philippe Thiran

Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne
04.04.2025

Série d'exercices 7

Problème 1: Échantillonnage de sinusoïdes

a) Un système échantillonne des signaux en continu avec fréquence $\omega_s = 1000\pi$. Selon le théorème d'échantillonage, lesquels des signaux suivants pourraient être reconstruits exactement s'ils étaient échantillonnés par ce système:

i. $x(t) = \cos 200\pi t$, *ii.* $x(t) = \sin 450\pi t$, *iii.* $x(t) = \sin 2500\pi t$, *iv.* $x(t) = \cos 200\pi t + \sin 800\pi t$.

(b) Un système échantillonne des signaux en continu avec une période d'échantillonage $T = 0.5 \times 10^{-3}$. Selon le théorème de l'échantillonage, lesquels des signaux suivants pourraient être reconstruits exactement s'ils étaient échantillonnés par ce système:

i. $x(t) = \cos 1000\pi t$, *ii.* $x(t) = \sin 2500\pi t$, *iii.* $x(t) = \cos 500\pi t + \sin 300\pi t$, *iv.* $x(t) = \sin 1500\pi t$.

Problème 2: Taux de Nyquist

Soit $x(t)$ un signal avec un taux de Nyquist ω_0. Déterminer le taux de Nyquist pour chacun des signaux suivants:

a) $x(t) - x(t-1)$

b) $x(t)x(t-1)$

c) $(x * z)(t)$ où $z(t) = \sin \frac{\omega_0}{3} t$

(d) $(x * z)(t)$ où $z(t) = \cos \omega_0 t$

Problème 3: Échantillonnage de sinusoïdes - Partie 2

Un signal mystère $x(t)$ est échantillonné avec la fréquence $\omega_s = 1000\pi$ à l'aide d'un peigne de Dirac, puis reconstitué avec un filtre passe-bas avec la fréquence de coupure $\omega_c = 500\pi$. Le signal reconstruit est

$$x_r(t) = \cos 200\pi t.$$

Nous ne savons rien d'autre sur $x(t)$. Lesquels des signaux suivants pourraient être $x(t)$?

i. $x(t) = \cos 300\pi t$, *ii.* $x(t) = \cos 200\pi t$, *iii.* $x(t) = \cos 1200\pi t$, *iv.* $x(t) = \cos 800\pi t$.

Problème 4: Un système de communication simple

De nombreux systèmes de communication, par exemple les téléphones mobiles et autres appareils sans fil, envoient des informations dans l'espace libre à l'aide d'ondes électromagnétiques. Pour envoyer ces ondes électromagnétiques sur de longues distances, la fréquence du signal transmis doit être très élevée par rapport à la fréquence du signal d'information. Une technique essentielle dans la conception de tels systèmes de communication est appelée modulation. Pendant la modulation, un signal d'information à transmettre est incorporé, ou modulé, sur une forme d'onde de fréquence supérieure appelée porteuse. Dans ce problème, nous analysons un système de communication simple qui utilise le principe de modulation.

Considérons $x(t)$ un signal à valeur réelle pour lequel $X(\omega) = 0$ lorsque $|\omega| \geq 2000\pi$. Afin de communiquer, une modulation est effectuée pour produire le signal transmis $g(t)$, où

$$g(t) = x(t) \cos 2000\pi t.$$

(a) Trouver la transformation de Fourier, $G(\omega)$, du signal transmis $g(t)$.

Une fois le signal $g(t)$ reçu, il doit être traité (démodulé) pour récupérer $x(t)$. Un système de démodulation proposé est illustré à la Figure 2. $\mathcal{H}$ est un filtre passe basse idéal avec une réponse de fréquence donnée par:

$$H(\omega) = \begin{cases} b, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{elswehere.} \end{cases}$$

(b) Trouvez la transformation de Fourier, $Z(\omega)$, de $z(t)$ qui sera l'entrée au filtre passe-bas.

(c) Trouvez le gain b et la fréquence de coupure ω_c telle que $y(t) = x(t)$. Il pourrait être utile de dessiner la transformation de Fourier de $Z(\omega)$ en termes de la transformation de Fourier de $X(\omega)$ pour voir ce qui se passe dans le domaine des fréquences.

Figure 1: Proposed demodulation system.

Problème 5: Echantillonnage par train d'impulsions

Soit $x(t)$ un signal avec taux de Nyquist ω_0 et $x_p(t) = x(t)p(t-1)$, où

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \text{ et } T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Préciser les contraintes sur la réponse fréquentielle d'un filtre qui donne $x(t)$ comme sortie lorsque $x_p(t)$ est l'entrée.