Série d'exercices 6

Problème 1: Difficile et facile

a) Une séquence de temps discret $x[n]$ est donnée comme suit:

$$x[n] = x_1[n] - x_1[n+3]$$

où

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Trouver $X(\omega)$

b) Calculer la valeur de $\int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) dw$

Indice: Il existe une façon très facile de procéder!

Problème 2: Réponse fréquentielle

a)] Soit un système LIT continu avec une réponse fréquentielle $H(\omega)$ et réponse impulsionelle réelle et paire $h(t)$ (c'est-à-dire $h(t) = h(-t)$). Supposons que nous appliquions une entrée $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ à ce système. La sortie résultante peut être montrée comme étant

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t)$$

où A est un nombre réel. Trouver A en fonction de $H(\omega)$, et ω_0. Essayez de le faire sans prendre la transformée de Fourier de $x(t)$.

(b) *Soit un système LIT continu avec réponse fréquentielle $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j \arg H(\omega)}$ et réponse impulsionnelle réelle $h(t)$. Supposons que nous appliquions une entrée $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ à ce système. La sortie résultante peut être montrée comme étant*

$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

où A est un nombre réel non négatif représentant une multiplication de l'amplitude et t_0 un délai. Trouver A et t_0 en fonction de $H(\omega)$, ω_0 et ϕ_0. Essayez de le faire sans prendre la transformée de Fourier de $x(t)$.

Problème 3: Filtre idéal

a)] Un filtre passe-bas idéal continu a une réponse fréquentielle

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \frac{\pi}{5} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

Trouver la sortie lorsque le filtre est appliqué à chacune des entrées suivantes

$$x(t) = \cos\frac{\pi}{3}t, \quad x(t) = 1, \quad x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{6}\right), \quad x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4}\right). \tag{1}$$

(b) Un filtre passe-bas idéal à temps discret a une réponse fréquentielle

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \frac{\pi}{5} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

sur l'intervalle $-\pi < \omega \le \pi$ Trouver la sortie lorsque le filtre est appliqué à chacune des entrées suivantes

$$x[n] = \cos\frac{13\pi}{6}n, \quad x[n] = (-1)^n, \quad x[n] = \delta[n]. \tag{2}$$

Problème 4: Composition des systèmes

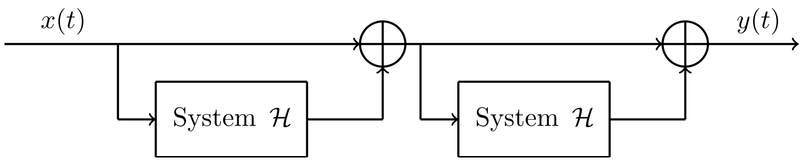

Figure 1: Système composé.

Dans ce cas, nous étudions la composition du système illustrée à la figure 1 avec entrée $x(t)$ et sortie $y(t)$, où nous supposons que le système $\mathcal{H}$ est LIT et stable.

a) Prouvez que le système composé indiqué dans la figure est stable.

b) Donnez la réponse fréquentielle du système global dans la figure 1 avec entrée $x(t)$ et sortie $y(t)$ en termes de réponse fréquentielle $H(\omega)$ du sous-système $\mathcal{H}$.

c) Pour le cas particulier où $\mathcal{H}$ est le système LIT avec réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-|t|}$, donnez une formule explicite pour la réponse fréquentielle du système global (exprimée en rapport de deux polynômes dans ω).