Signaux et systèmes (pour EL)
Prof. Jean-Philippe Thiran

Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne
21.03.2025

Série d'exercices 5

Problème 1: Calcul direct d'une transformée de Fourier à temps discret

Utilisez l'équation de la transformée de Fourier pour trouver la la transformée de Fourier des signaux suivants:

a) $x[n] = \frac{j}{2}\delta[n+1] - \frac{j}{2}\delta[n-1]\,,$

b) $x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$ où $|\alpha| > 1\,.$

Utilisez l'équation de la transformée inverse de Fourier pour trouver la transformée inverse de Fourier du signal suivant:

c) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{3} - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \frac{\pi}{3} - 2\pi k)\right).$

Problème 2: Propriétés de la transformée de Fourier discrète

Étant donné que $x[n]$ a une transformée de Fourier $X(\omega)$, exprimer la transformée de Fourier des signaux suivants en termes de $X(\omega)$:

a) $y[n] = (n-n_0)x[n-n_0]\,,$

b) $y[n] = x[n]\cos(\omega_0 n)\,,$

c) $y[n] = (-1)^n x[n]\,,$

Problème 3: Caractérisation de système (discret)

Supposons qu'on nous donne une paire entrée/sortie d'un système inconnu. Plus exactement, si le signal d'entrée est

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-2],$$

nous observons alors la sortie suivante:

$$y[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n].$$

a) Trouvez la réponse impulsionnelle et la réponse fréquentielle d'un système LIT à temps discret qui donne cette sortie à l'entrée mentionnée.

Indice: $H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{A}{1-\frac{2}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{2}{3}e^{-j\omega}} + \frac{C}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$, où $A = -\frac{5}{4}$, $B = \frac{15}{44}$ et $C = \frac{21}{11}$. L'indice est donné pour vous aider dans le calcul. Prouver aussi l'indice.

b) Trouver une équation aux différences reliant $x[n]$ et $y[n]$.

Problème 4: LIT Systèmes : Relation entrée/sortie

L'un des principaux résultats de cette classe est que les systèmes LIT (stable) peuvent être traités soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine de fréquentiel (Fourier). Dans le domaine du temps, chaque système LIT peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle, et la relation entrée-sortie peut être écrite comme $y(t) = (h*x)(t)$. Dans le domaine des fréquences, chaque système stable LIT peut être caractérisé par sa réponse en fréquence, et la relation entrée-sortie peut être écrite comme $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. Selon la tâche et les signaux, l'une des deux représentations peut être beaucoup plus simple que l'autre. Il est parfois avantageux de considérer brièvement les deux approches, puis de décider laquelle choisir. Dans ce qui suit, n'hésitez pas à utiliser les formules des annexes 4.A et 4.B dans les notes de cours. Trouver $y(t)$.

a) $h(t) = e^{-at}u(t)$, $x(t) = e^{-bt}u(t)$, où $a > b > 0$.

b) $h(t) = \frac{8}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{8}{\pi}(t-2))$, et $x(t) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{sinc}(\frac{1}{\pi}t)\right)^2$.