Série d'exercices 4

Problème 1: Conditions initial au repos

a) Considérez l'équation aux différences de premier ordre

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] = x[n].$$

En supposant l'état initial au repos (c'est-à-dire si $x[n] = 0$ pour $n < n_0$, alors $y[n] = 0$ pour $n < n_0$), trouver la réponse d'impulsion $h[n]$ d'un système LIT dont l'entrée et la sortie sont liées par cette équation aux différences.

(b) Le système en partie (a) est-il stable ? Pourquoi ?

(c) Considérez l'équation aux différences de premier ordre

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + x[n-2].$$

En supposant que le système est causal (indice: c'est la même chose qu'en supposant l'état initial au repos), trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système LIT dont l'entrée et la sortie sont liées par cette équation aux différences.

d) Le système (c) est-il stable? Pourquoi ?

Problème 2: Calcul de transformée de Fourier

Dans ce problème, nous allons calculer la transformée de Fourier du signal

$$z(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & \text{if } |t| \leq a_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

en utilisant deux méthodes différentes.

a) Utilisez le tableau des transformées de Fourier à l'annexe 4.B pour trouver la transformation de Fourier des signaux $x(t) = \cos \omega_0 t$ et

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } |t| \leq a_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Notez que nous pourrions écrire $z(t) = x(t) \cdot y(t)$. Trouvez $Z(\omega)$ en utilisant cette information et les tableaux des annexes 4.A et 4.B.

b) Notez également que le signal $z(t)$ est absolument intégrable et que sa transformée de Fourier est bien définie. Trouver $Z(\omega)$ directement en utilisant la transformée de Fourier.

c) Confirmez que la partie a) est en effet la même que la partie b).

Problème 3: Propriétés de la transformée de Fourier

L'annexe 4.A des notes de cours résume les propriétés de la transformée continue de Fourier.

a) Supposons que $x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(\omega)$ et $x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(\omega)$. Exprimez la transformée de Fourier du signal

$$y(t) \quad = \quad x_1(t-3) + x_2\left(\frac{t}{2}\right)$$

en termes de $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ en utilisant l'annexe 4.A dans les notes de cours.

b) Supposons que $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega)$, $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(\omega)$ et $z(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Z(\omega)$. Pour deux fonctions absolument intégrables à valeur réelle $x(t)$ et $y(t)$,, exprimer la transformée de Fourier continue $Z(\omega)$ du signal

$$z(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t+\tau) d\tau$$

$X(\omega)$ et $Y(\omega)$.

c) Supposons que $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega)$. Exprimer la transformée de Fourier du signal

$$y(t) \quad = \quad x(2t-5)$$

en termes de $X(\omega)$.

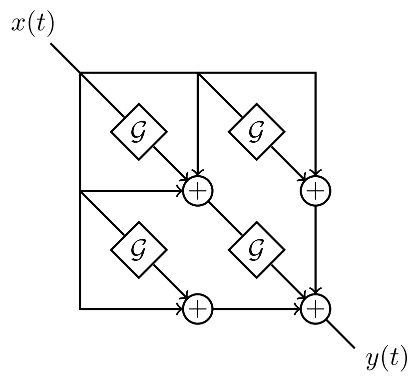
d) Supposons que $x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(\omega)$ et $x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(\omega)$. Trouver la transformation inverse de Fourier de la fonction

$$Y(\omega) \quad = \quad 2X_1^*(\omega-5) + 2\frac{d}{d\omega} X_2(\frac{\omega}{2})$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ en utilisant l'annexe 4.A dans les notes de cours.

Problème 4: Composition de systèmes

Supposons que le système $\mathcal{G}$ est linéaire stable et invariant dans le temps avec une réponse impulsionnelle $g(t)$. Nous combinons plusieurs systèmes $\mathcal{G}$ de manière systématique comme suit.



Trouver la réponse impulsionnelle globale du système avec entrée $x(t)$ et sortie $y(t)$ en termes de $g(t)$.

b (facultatif) Défi : Le système de la figure peut être interprété comme une composition 2×2, et nous pouvons naturellement l'étendre à une composition 3×3, ensuite à une composition générale $D \times D$. Trouver la réponse impulsionnelle globale correspondante $h_D(t)$.

Hint: Commencer par $D = 3$ pour observer le modèle tel que représenté dans la figure ci-dessous. Si $h_D(t)$ est la réponse générale de l'impulsion d'une concaténation $D \times D$, essayez d'écrire $h_D(t)$ en termes de $h_{D-1}(t)$.)