Série d'exercices 3

Problème 1: Systèmes LIT et delta de Dirac

a) Un signal d'entrée $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$ est appliqué à un système LIT avec une réponse impulsionnelle $h(t) = 2^t\left(\delta(t) + \delta(t-T)\right)$, où T est une constante.

Trouvez la sortie $y(t)$ du système.

b) Considérer deux systèmes LIT caractérisés par les relations entrées-sorties

i)

$$y(t) = \int_0^\infty e^{-5\tau} x(t-2-\tau)d\tau, \tag{1}$$

ii) et

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(x\left(\tau+2\right) + x\left(\tau-2\right)\right)d\tau. \tag{2}$$

Trouvez la réponse impulsionnelle de chacun de ces systèmes.

Problème 2: Convolution analytique

Calculer analytiquement la convolution des paires de signaux suivantes:

a) $h(t) = e^{-2t}u(t)$ et

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $x[n] = \alpha^n u[n]$ et $h[n] = \beta^n u[n]$, $\alpha, \beta \neq 0$

Problème 3: Convolution graphique

Réaliser la convolution graphique (par retournement et translation), les paires suivantes de signaux. Vous n'avez pas besoin d'écrire les équations pour vos résultats, mais marquez clairement vos axes. Nous concentrons notre attention sur deux formes d'onde très particulières : la fonction step (Heaviside) et la fonction rectangle, définies de la manière suivante:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

et

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les signaux suivants, esquissez (à la main) l'entrée $x(t)$, le filtre $h(t)$ et la convolution $(x * h)(t)$.

a) $h(t) = \mathrm{rect}(t)$, $x(t) = u(t)$

b) $h(t) = u(t)$, $x(t) = u(t)$

c) $h(t) = \mathrm{rect}(t)$, $x(t) = \mathrm{rect}(t)$

Réaliser la convolution graphique (méthode flip-and-drag) la paire suivante de signaux. Encore une fois, les dessins suffisent.

d)

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases} \qquad\qquad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t + 5k)$$

Problème 4: Composition des systèmes

Considérez le système LIT à temps discret $\mathcal{G}$ suivant, qui est une composition des systèmes LIT à temps discret $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$.

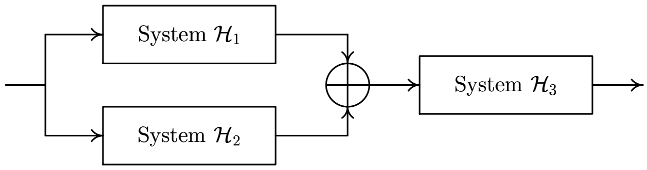

Figure 1: Composition of systems.

a) Montrez que si $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont stables, $\mathcal{G}$ est également stable.

Ensuite, nous considérons la causalité. Un système à temps discret $\mathcal{H}$ est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h[n]$ satisfait $h[n] = 0$ pour tous $n < 0$.

b) *Supposons que $\mathcal{H}_3\{x[n]\} = x[n]$. Si les systèmes $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ ne sont pas causaux, est-ce que cela implique que $\mathcal{G}$ est également non causal? Si cela est correct, fournir une preuve; sinon, fournir un contre-exemple.*

c) *Supposons que $\mathcal{H}_2\{x[n]\} = 0$. Si $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_3$ (pas les deux) n'est pas causal, cela signifie-t-il que $\mathcal{G}$ est non causal? Si cela est correct, fournir une preuve; sinon, fournir un contre-exemple.*