Signaux et systèmes (pour EL)
Prof. Jean-Philippe Thiran

Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne
28.02.2025

Série d'exercices 2

Problème 1: Propriétés des systèmes

a) Considérer un système à temps discret avec entrée $x[n]$ et sortie $y[n]$ lié par

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

où n_0 est un entier positif fini.

Déterminer si le système est (i) linéaire, (ii) invariant dans le temps, (iii) sans mémoire, (iv) causal et (v) stable. Dans chaque cas, donner une brève justification en utilisant les définitions de ces propriétés.

Un système linéaire à temps continu $\mathcal{H}\{\cdot\}$ donne les paires entrées-sorties suivantes:

$$e^{j3t} = \mathcal{H}\{e^{j2t}\} \quad \text{and} \quad e^{-j3t} = \mathcal{H}\{e^{-j2t}\}.$$

b) Si $x_1(t) = \cos(2t)$, déterminer la sortie correspondante $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(t)\}$.

c) Si $x_2(t) = \cos(2(t - \frac{1}{2}))$, déterminer la sortie correspondante $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(t)\}$.

Problème 2: Réponse impulsionnelle

Considérer un système à temps discret du problème 1 avec entrée $x[n]$ et sortie $y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

où n_0 est un entier positif fini. Trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ de ce système. Indice: tracez $h[n]$.

Problème 3: Convolution

Calculer la convolution $(h * x)[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$, où

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2 & \text{if } n = 3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $x[n] = u[n-1]$ où $u[n]$ est la fonction de Heaviside (également fonction échelon unité, fonction marche d'escalier) que nous avons définie dans le cour.

Problème 4: Propriétés des systèmes, l'opérateur différentiel

Un système d'une certaine importance pour le reste de cette classe est l'opérateur différentiel: Pour un signal d'entrée $x(t)$ différentiable, la sortie est donnée par $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

a) Déterminer si ce système est (i) linéaire et (ii) invariant dans le temps.

(b) Déterminer si ce système est (i) sans mémoire, (ii) causal et (iii) stable. *Conseil:* Écrivez la définition de la dérivée telle que vous l'avez apprise dans votre classe d'Analyse :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{m \to 0} \frac{x(t) - x(t-m)}{m}.$$