Série d'exercices 1

Problème 1: Révision des nombres complexes

Tout nombre complexe z peut être écrit sous la *forme cartésienne (rectangulaire)* suivante

$$z = \alpha + j\beta,$$

où $\alpha = Re\{z\}$ est la partie réelle, $\beta = Im\{z\}$ est la partie imaginaire, et $j \equiv \sqrt{-1}$.

Un nombre complexe z peut aussi être représenté sous la *forme polaire* suivante

$$z = ae^{j\theta},$$

où $a = |z|$ ($a > 0$) est la *magnitude* de z et $\theta = arg(z)$ est l'*angle* (phase) de z.

La *relation d'Euler* relie ces deux représentations:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta.$$

(a) Convertir les nombres complexes suivants de la forme cartésienne à la forme polaire:

$$1 - j, \quad -\sqrt{5}j, \quad \sqrt{3} + j, \quad -1. \tag{1}$$

Commentaire: L'angle θ doit être exprimé en termes de π et se situe entre $-\pi < \theta \leq \pi$.

(b) Convertir les nombres complexes suivants en la forme cartésienne :

$$e^{j\pi/2}, \quad \frac{1}{3}e^{j\pi}, \quad \sqrt{2}e^{-j\pi/4}, \quad 2e^{-j3\pi/4}. \tag{2}$$

Attention à bien simplifier votre réponse.

(c) En considérant les deux nombres complexes $z_1 = 2e^{j\pi/6}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$, exprimer les nombres complexes suivants en coordonnées cartésiennes et polaires:

$$(z_1)^*, \quad z_2(z_2)^*, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 + z_2. \tag{3}$$

Rappel: $(z)^*$ désigne le *complexe conjugué* de z.

Problème 2: Signaux: opérations de base

(a) Considérant le signal à valeurs complexes $y(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ où $A \neq 0$ et ω_0 sont des nombres réels, exprimer (en fonction de t): $Re\{y(t)\}$, $Im\{y(t)\}$, $|y(t)|$, et $\arg(y(t))$.

(b) Considérant la fonction suivante:

$$x[n] \quad = \quad \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Esquisser $y[n] = x[n-1] + x[2n] + x[-1-n]$.

Commentaire: Ne pas oublier de nommer les axes de la représentation graphique.

(c) Considérant la fonction suivante:

$$x(t) \quad = \quad \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & 1 < t \leq 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

Esquisser $y(t) = x(t) + x(t/2 + 2)$.

Commentaire: Ne pas oublier de nommer les axes de la représentation graphique.

Problème 3: Propriétés des signaux

(a) Déterminer si chacun des signaux à temps discret suivants est périodique ou non. Si le signal est périodique, déterminer sa période fondamentale.

$$x[n] = \cos\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right), \quad x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad x[n] = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right) \tag{6}$$

Pour les points ***(b)*** et ***(c)*** ci-dessous, déterminer si les signaux suivant sont à énergie ou puissance finie:

(b) Le signal à temps discret $y[n]$, défini par

$$y[n] \quad = \quad \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 6, \\ 2, & 6 < n \leq 8, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \tag{7}$$

(c) Le signal à temps continu $z(t)$, défini entre $-\infty < t < \infty$ par

$$z(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t - kT), \tag{8}$$

où $A_k = \sqrt{2}$ si $|k|$ est un nombre premier et $A_k = -\sqrt{2}$ autrement, et où $g(t)$ est la "fonction d'impulsion carrée", *i.e.,* $g(t) = 1$ for $0 \leq t < T$ et $g(t) = 0$ sinon.

Indice: Esquisser $z(t)$ pour $0 \leq t \leq 4T$.

Problème 4: Propriétés des systèmes

Les systèmes suivants sont-ils linéaires ? Sont-ils invariants dans le temps ? Dans chaque cas, **donner une justification complète** en utilisant les définitions de ces propriétés.

(a) $\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t-b)$, où b peut être n'importe quel nombre réel non nul (positif ou négatif)

(b) $\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) - b$, où b peut être n'importe quel nombre réel non nul (positif ou négatif)

(c) $\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t^2 - 1)$,

(d) $\mathcal{H}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$, où $h(t)$ est une fonction arbitraire.

Rappels: Un système est linéaire lorsque $\mathcal{H}\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1\mathcal{H}\{x_1(t)\} + c_2\mathcal{H}\{x_2(t)\}$, pour deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et deux constantes c_1 et c_2 , alors qu'il est invariant dans le temps lorsqu'une translation du temps appliquée à son entrée se retrouve à la sortie.