EE-205 - Signaux et systèmes (pour EL)
Prof. Jean-Philippe Thiran

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
19.04.2024

Examen mi-semestre

NOM : .... PRENOM : ....

Numéro SCIPER : ....

Problème 1: Equation aux différences

Un système LTI stable est décrit par l'équation aux différences suivante:

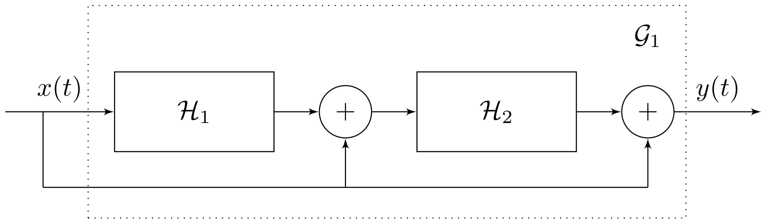
$$y[n] - 0.3y[n-1] - 0.4y[n-2] = x[n] - 2.1x[n-1]$$

a) Calculez la réponse fréquentielle du système $H(\omega)$.

b) Calculez la réponse impulsionnelle du système $h[n]$.

Problème 2: Composition de systèmes

(a) Considérez le système LTI $\mathcal{G}_1$ suivant, qui est une composition des systèmes LTI $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

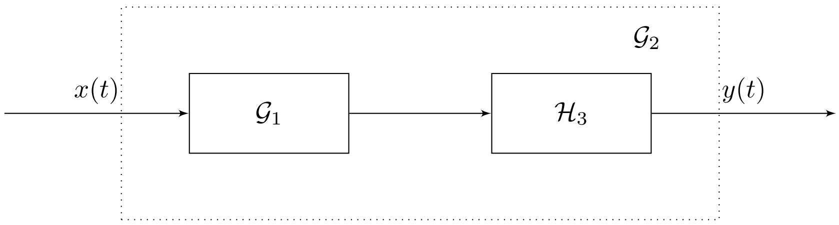


(i) Quelle est la réponse impulsionnelle $g_1(t)$ de $\mathcal{G}_1$, en fonction de $h_1(t)$ et $h_2(t)$, les réponses impulsionnelles des systèmes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement?

(ii) Considérez les fonctions $h_1(t) = -\delta(t-T)$ et $h_2(t) = 2^t(\delta(t-2T))$, $0 < T < \infty$. Explicitez la réponse impulsionnelle $g_1(t)$.

(iii) Le système $\mathcal{G}_1$ est-il causal? Justifiez.

(b) Nous considérons le nouveau système $\mathcal{G}_2$ suivant.



(i) Exprimez la nouvelle réponse impulsionnelle $g_2(t)$ de $\mathcal{G}_2$ en fonction de la réponse impulsionnelle $h_3(t)$ du système $\mathcal{H}_3$, en considérant la réponse impulsionnelle $g_1(t)$ du système $\mathcal{G}_1$ trouvée en réponse à la question a(ii) .

(ii) Sachant que $\mathcal{H}_3$ est un système causal, $\mathcal{G}_2$ est-il forcément causal? Justifiez.

(iii) Sachant que $\mathcal{H}_3$ est un système stable, tel que $\int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t)|dt < B < \infty$. Prouvez que $\mathcal{G}_2$ est forcément stable en trouvant une constante $C < \infty$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(t)|dt < C$.

(iv) Calculez la nouvelle réponse impulsionnelle $g_2(t)$ pour $h_3(t) = u(t)$, où $u(t)$ est la fonction de Heaviside.

(c) Supposons finalement que $T = 0$ et prenons le signal d'entrée $x(t) = 24t^2(u(t+1) - u(t-1))$.

Soit $y(t)$ la sortie du système $\mathcal{G}_2$ pour une entrée $x(t)$. Nous considérons l'approximation du signal $y(t)$, notée $\hat{y}(t)$. Elle est construite en interpolant linéairement la fonction $y(t)$ entre les points suivants : (-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5).

(i) Dessinez le signal $g_2(t)$ sur l'intervale $t \in [-1.5, 1.5]$.

(ii) Dessinez le signal $x(t)$ sur l'intervale $t \in [-1.5, 1.5]$.

(iii) Soit $A = \int_0^{1/2} 24\tau^2 d\tau$ et $B = \int_{1/2}^{1} 24\tau^2 d\tau$, calculez A et B.

(iv) En vous basant sur vos réponses aux points précédents, et en utilisant la méthode de la convolution graphique, dessinez la fonction $\hat{y}(t)$.

Problème 3: Équation différentielle

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\pi}{2}\frac{dy(t)}{dt} = x(t-\pi) - x(t)$$

a) Trouvez la réponse fréquentielle du système.

b) En déduire la réponse impulsionnelle et faire une esquisse de la réponse impulsionelle.

Indice: Rappelez-vous que $\sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

c) Est-ce que le système est causal? Justifiez.