EE-205 - Signaux et systèmes (pour EL)
Prof. Jean-Philippe Thiran

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
01.07.2024

Examen Final

NOM : .... PRENOM : ....

Numéro SCIPER : ....

Problème 1: Un système de télécommunication

Heike a récemment décidé de faire son propre réseau de télécommunication. Après avoir conçu l'antenne, elle décide de s'occuper de la partie signaux et systèmes. Elle prévoit de faire de la modulation en amplitude (voir figure 1).

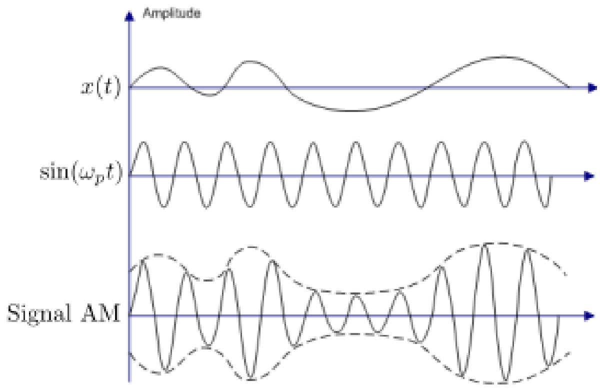


Figure 1: Exemple d'une modulation en amplitude (AM).

a) Admettons que la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ existe et est notée $X(\omega)$.

Donnez l'expression de la transformée de Fourier $Y(\omega)$ du signal modulé $y(t) = x(t)\sin(\omega_p t)$ en fonction de $X(\omega)$.

b) Donnez l'expression de la transformée de Fourier du signal $x(t) = u(t)\sin(\omega_0 t)$, $u(t)$ étant la fonction échelon bien connue.

c) Posons $\mathcal{M}(\omega) = \delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)$ la transformée de Fourier d'un signal $m(t)$

et supposons $X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ pour } |\omega| < \omega_0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$ avec $\omega_0 << \omega_p$

Donnez l'expression de la transformée de Fourier $Y(\omega)$ du signal $y(t) = m(t)x(t)$. Représentez graphiquement le spectre résultant.

d) La figure 2 illustre comment moduler et démoduler le signal $y(t)$.

$\mathcal{D}(\omega)$ est un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure $\omega_c << \omega_p$.

$m(t)$ et $x(t)$ sont des signaux ayant comme spectre $\mathcal{M}(\omega)$ et $X(\omega)$ définis comme précédemment.

Montrez que le système liant $y_{\mathcal{D}}(t)$ et $x(t)$ est LIT, causal et stable, justifiez.

Indice: Commencez par simplifier la fonction $m(t)\cos(\omega_p t)$.

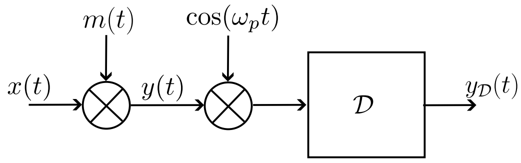


Figure 2: Circuit pour modulation et démodulation.

e) Heike souhaite désormais tester son système en changeant la fréquence de la porteuse ω_p.

Supposons $X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ pour } |\omega| < \omega_0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$ avec $\omega_c = \omega_0 = 2\omega_p$.

i. Donnez la transformée de Fourier $Y(\omega)$ du signal $y(t) = m(t)x(t)$. Représentez graphiquement le spectre résultant.

ii. Que se passe-t-il si l'on utilise le signal $x(t)$ dans le système de la figure 2 ? Est-ce que $y_{\mathcal{D}}(t) \equiv x(t)$? Pourquoi ?

Indice: Vous pouvez vous référer à l'allure du spectre $Y(\omega)$ *pour justifier sans faire de calculs.*

f) Considérons maintenant le système composé uniquement du filtre passe-bas idéal $\mathcal{D}$.

On suppose qu'un signal $x(t) = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}\omega_0 t)$ a été échantillonné par multiplication par un peigne de Dirac de période $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$, avec $\omega_s = 2\omega_0$. On notera le signal résultant $x_s(t)$.

i. Donnez l'expression de $x_s(t)$ et celle de sa transformée de Fourier $X_s(\omega)$.

ii. Esquissez le spectre de $X_s(\omega)$ (pour $|\omega| \leq \omega_s$) et montrez graphiquement l'effet du filtre $\mathcal{D}(t)$ ayant une fréquence de coupure $\omega_c = \omega_0$.

iii. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

Indice: Contentez vous d'esquisser les termes du peigne de Dirac en fréquence pour $k = 0$, $k = 1$ *et* $k = -1$.

Solution

a) *(0.5 point)* On peut utiliser la table des transformées de Fourier et la propriété de convolution. On obtient donc:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2j}(X(\omega - \omega_p) - X(\omega + \omega_p))$$

b) *(1 point)* Nous pouvons ré-écrire la fonction $\sin(\omega_0 t)$ en somme d'exponentielles complexes:

$$x(t) = u(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}u(t) - e^{-j\omega_0 t}u(t)\right)$$

En utilisant la propriété de décalage dans les fréquences, on obtient la transformée de Fourier:

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{1}{2j}\left(U(\omega-\omega_0) - U(\omega+\omega_0)\right)\\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0) - \frac{1}{j(\omega+\omega_0)} - \pi\delta(\omega+\omega_0)\right)\\
&= \frac{1}{2j}\left(\pi\delta(\omega-\omega_0) - \pi\delta(\omega+\omega_0) + \frac{2\omega_0}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right)
\end{aligned}
$$

c) *(1 point)* Utilisons la propriété de multiplication/convolution de la transformée de Fourier.

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}M(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega-\omega_p) + X(\omega+\omega_p)\right)$$

On a donc au final:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } \omega \in\,]-\omega_0-\omega_p,\ \omega_0-\omega_p[\,\cup\,]-\omega_0+\omega_p,\ \omega_0+\omega_p[\\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Et le spectre:

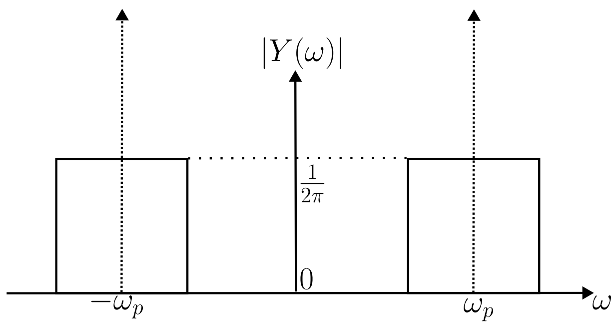


Figure 3: Spectre $Y(\omega)$.

d) *(1.5 points)* Pour faciliter les calculs nous allons d'abord étudier la fonction $m(t)\cos(\omega_p t)$:
La transformée de Fourier inverse de $\mathcal{M}(\omega) = \delta(\omega-\omega_p) + \delta(\omega+\omega_p)$ est:

$$m(t) = \frac{1}{\pi}\cos(\omega_p t)$$

On obtient donc le système suivant:

$$y_{\mathcal{D}}(t) = d(t) * \left(\frac{1}{\pi}x(t)\cos(\omega_p t)^2\right) = d(t) * \left(\frac{1}{2\pi}x(t)\left(1+\cos(2\omega_p)\right)\right)$$

On se rappelle que le filtre $\mathcal{D}$ est un filtre passe bas idéale avec une fréquence de coupure $\omega_c << \omega_p$ et un gain de 1. On obtient donc:

$$y_{\mathcal{D}}(t) = \frac{1}{2\pi}x(t)$$

La réponse impulsionelle de ce système est simplement $h(t) = \frac{1}{2\pi}\delta(t)$. Il est évident que le système est LIT, stable et causal de la propriété de la fonction Dirac et du fait que le système ne dépend pas de temps future. Cependant, en pratique le filtre idéale $\mathcal{D}$ n'est pas réalisable et est aussi non-causal.

e) *(1.5 points)* Le raisonnement est similaire à la question (c), on a:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p) \right)$$

Mais cette fois-ci:

$$X(\omega + \omega_p) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } |\omega + \omega_p| < \omega_0 = 2\omega_p \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } |\omega| < 3\omega_p \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$X(\omega - \omega_p) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } |\omega - \omega_p| < \omega_0 = 2\omega_p \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } |\omega| < \omega_p \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

On remarque que le spectre se superpose sur lui-même (repliement), on a au final:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \text{ pour } \omega \in]-3\omega_p, -\omega_p[\cup]\omega_p, 3\omega_p[\\ \frac{1}{\pi}, \text{ pour } \omega \in]-\omega_p, \omega_p[\\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

On obtient la figure (4) pour le spectre.

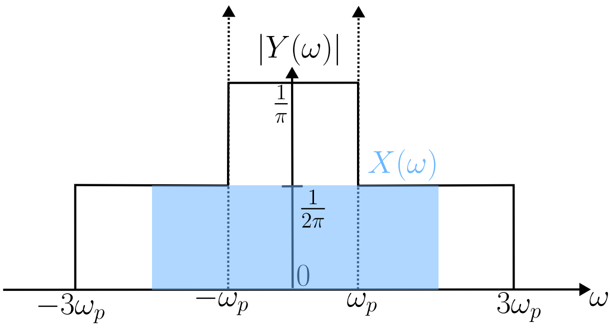


Figure 4: Spectre $Y(\omega)$ pour $\omega_0 = 2\omega_p$.

Si on utilise le signal $x(t)$ dans le système de la figure (2) on va observer des distorsions à cause du repliement spectral. Le filtre idéale va aussi extraire l'information de la porteuse ce qui peut interférer avec le signal d'origine.

f) *(1.5 points)* On a par définition du peigne de Dirac:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \text{ , avec } T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

En utilisant la table des transformée de Fourier nous avons:

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2k\omega_0) \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \left(2k - \frac{\pi}{2}\right)\omega_0\right) + \delta\left(\omega - \left(2k + \frac{\pi}{2}\right)\omega_0\right) \end{aligned}$$

On obtient alors l'esquisse du spectre suivante:

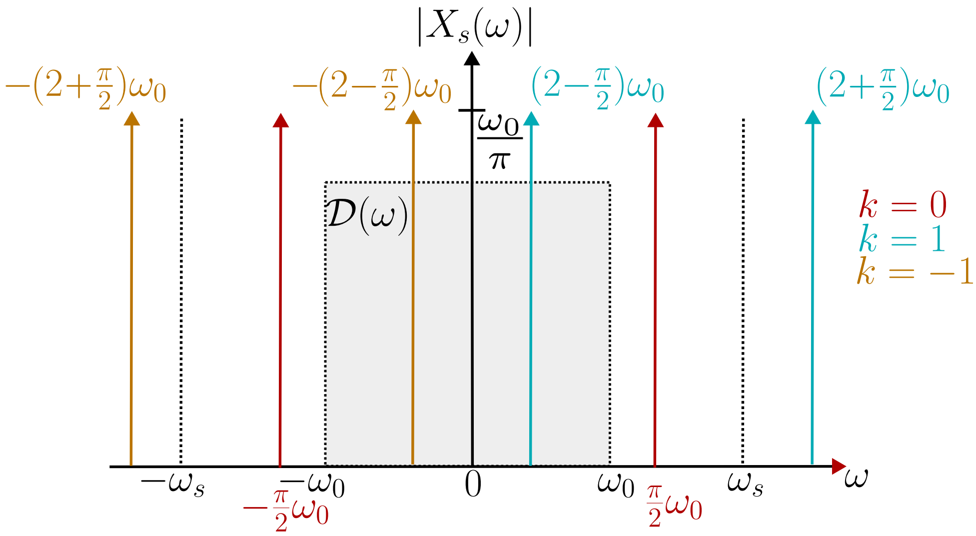


Figure 5: Spectre $X_s(\omega)$ lors de l'échantillonage.

On peut constater qu'il y eu un repliement du spectre. En effet, on ne respecte pas le critère de Nyquist, la fréquence du signal est $\omega_1 = \frac{\pi}{2}\omega_0$ et dès lors on a pas $\omega_s \geq 2\omega_1$. Il est donc impossible de reconstituer le signal d'origine.

Problème 2: Transformée en Z

Partie 1

Soit un système LIT à temps discret dont la fonction de transfert est donnée par:

$$H(z) = \frac{2z^{-1} - 7}{z^{-2} - 7z^{-1} + 12}.$$

a) Donnez la réponse impulsionnelle causale de ce système.

b) Ce système est-il stable? Justifiez.

c) Donnez l'équation aux différences associée.

Partie 2

Soit le signal x[n], tel que:

$$x[n] = n(\frac{1}{2})^n u[n]$$

a) Nous savons tout d'abord que, T_Z étant la transformée en Z appliquée à un signal:

$$a^n u[n] \overset{T_Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Calculez la dérivée première des termes de chaque côté de l'égalité de droite ci-dessus en fonction de z^{-1}.

b) Sur la base de votre réponse précédente, calculez $X(z)$, la transformée en Z de $x[n]$.

c) Considérons à présent le système LIT défini à la Partie 1 et le signal $x[n]$ défini ci-dessus. Quelle est la région de convergence de $Y(z)$, la transformée en Z du signal de sortie $y[n]$ du système pour une entrée $x[n]$? Justifiez.

Solution

Partie 1

a) *(2 points)* Posons $p = z^{-1}$, on peut tout d'abord factoriser le dénominateur de $H(p)$:

$$p^2 - 7p + 12 = (p - 3)(p - 4).$$

On peut ensuite décomposer $H(z)$ en éléments simples:

$$H(p) = \frac{A}{(p-3)} + \frac{B}{(p-4)}, \text{ avec } \begin{cases} A + B = 2 \\ -4A - 3B = -7 \end{cases},$$

ce qui implique :

$$H(z) = \frac{1}{(z^{-1} - 3)} + \frac{1}{(z^{-1} - 4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

On retrouve alors la transformée en Z inverse de $\frac{1}{1-az^{-1}}$ qui est égale à $x[n] = a^n\epsilon[n]$ ou $x[n] = -a^n\epsilon[-n-1]$ avec une ROC égale à $|z| > |a|$ ou $|z| < |a|$ respectivement.
Nous savons que $h[n]$ est causal. Il n'y a donc qu'une seule solution:

$$h[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

b) *(1 point)* La région de convergence du signal trouvé précédemment est donnée par $|z| > \frac{1}{3}$. Elle contient le cercle unité, le système est donc stable.

c) *(0.5 point)* L'équation aux différences est donnée par:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$
$$Y(z)(z^{-2} - 7z^{-1} + 12) = X(z)(2z^{-1} - 7)$$
$$y[n-2] - 7y[n-1] + 12y[n] = 2x[n-1] - 7x[n]$$

Partie 2

a) *(1 point)* On dérive de chaque côté comme demandé dans la consigne.

$$\frac{\delta}{\delta z^{-1}}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{a}{(1-az^{-1})^2} := \frac{\delta}{\delta z^{-1}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty} na^n z^{-n}$$

b) *(1 point)* On en déduit que:

$$x[n] = n\frac{1}{2}^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n z^{-n} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

c) *(2 points)* Nous avons toutes les formes factorisées de $H(z)$ et de $X(z)$, de plus nous savons que $Y(z) = H(z)X(z)$. Les pôles sont donc donnés par $|z| = \frac{1}{2}$, $|z| = \frac{1}{3}$ et $|z| = \frac{1}{4}$. Sachant que $h[n]$ est causal et qu'il s'agit d'un système LIT, que $x[n]$ est aussi causal, alors la sortie $y[n]$ est causale. Dans ce cas, la ROC est donnée par $|z| > \frac{1}{2}$.

Problème 3: Transformée de Laplace

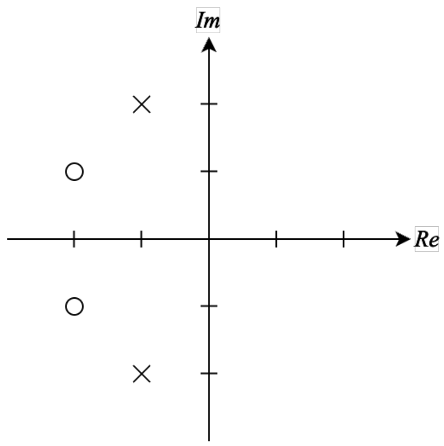
Partie 1

Déterminez si chacun des systèmes décrits ci-dessous est stable ou non. Justifiez votre réponse.

a) Un système qui, avec un signal d'entrée $x(t) = e^{-t}u(t)$, produit le signal de sortie $y(t) = e^{-2t}u(t)$.

b) Un système causal dont la fonction de transfert est la suivante $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+10}$.

c) Un système causal dont la fonction de transfert $H(s)$ présente le tracé pôles-zéros suivant:



d) Un système LIT dont la réponse impulsionnelle est la suivante $h(t) = e^t sin(2t)u(t)$.

Partie 2

Considérez la composition en boucle fermée de deux systèmes LIT continus avec les fonctions de transfert $H_1(s)$ et $H_2(s)$ (voir Figure 6).

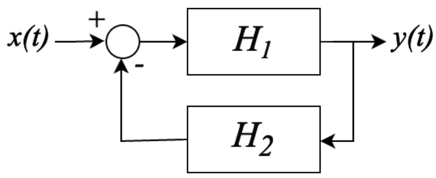


Figure 6: Composition de systèmes.

a) Supposons que $H_1(s) = \frac{1}{s+1}$ et $H_2(s) = \frac{3}{s+2}$.

   i. Quelle est la fonction de transfert $H(s)$ du système global H ?

   ii. Le système global H est supposé causal, est-il également stable ?

b) Supposons que le système global H soit causal et qu'il possède un système inverse causal G. Donnez la fonction de transfert $G(s)$ et la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système inverse.

   Indication: Au besoin, notez $\delta'(t)$ la dérivée première de la fonction $\delta(t)$ de Dirac.

Solution

Partie 1

a) *(1 point)* On calcule tout d'abord la transformée de Laplace du système avec $X(s) = \frac{1}{s+1}$ et $Y(s) = \frac{1}{s+2}$. Ainsi, $H_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/(s+2)}{1/(s+1)} = \frac{s+1}{s+2}$. On observe un zéro pour $s = -1$ et un pôle pour $s = -2$. Le partie réelle du pôle est négative, donc le système est **stable**.

b) *(1 point)* On commence par exprimer la transformée de Laplace d'une manière à mettre en évidence ses pôles et zéros. Pour ce faire, on calcule d'abord le discriminant: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$ puis les racines:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3j$$

Les pôles sont identifiés comme $s = -1 \pm 3j$ dont les parties réelles des pôles sont négatives. Le système est donc **stable**.

c) *(1 point)* Les parties réelles des pôles sont toutes négatives (-1). Par conséquent, le système est **stable**.

d) *(1 point)* Grâce à la propriété du sinus unilatéral, on trouve la transformée de Laplace du système: $H_1(s) = \frac{2}{(s-1)^2+4}$ dont on déduit les pôles : $s = 1 \pm j2$. Comme les pôles ont des parties réelles positives, le système n'est **pas stable**.

Partie 2

a) i. *(1 point)* La fonction de transfert en boucle fermée du système illustré est la suivante: $H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$. Avec $H_1(s) = \frac{1}{s+1}$ et $H_2(s) = \frac{3}{s+2}$, nous obtenons :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{3}{s+2}\right)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{3}{(s+1)(s+2)}} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{(s+1)(s+2)+3}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{s^2+3s+2+3}$$

Qui se simplifie en : $H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+5}$

ii. *(1 point)* Le système est causal, mais pour vérifier la stabilité, nous regardons les pôles de la fonction de transfert $H(s)$. Les pôles sont les racines de $s^2 + 3s + 5 = 0$.

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}j}{2}$$

Les pôles sont donc $s = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}j$ et $s = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}j$. Puisque les parties réelles de ces pôles sont négatives, le système est **stable**.

b) *(2 points)* Si le système global H est causal et a un inverse causal G, alors $H(s)G(s) = 1$. Donc,

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s^2+3s+5}{s+2}$$

La réponse impulsionnelle est la transformée inverse de Laplace de $G(s)$, que l'on peut simplifier comme suit:

$$G(s) = \frac{s^2+3s+5}{s+2} = s + 1 + \frac{3}{s+2}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace sur chacun des termes, on obtient la réponse impulsionnelle :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s + 1 + \frac{3}{s+2}\right\} = \delta'(t) + \delta(t) + 3e^{-2t}u(t)$$