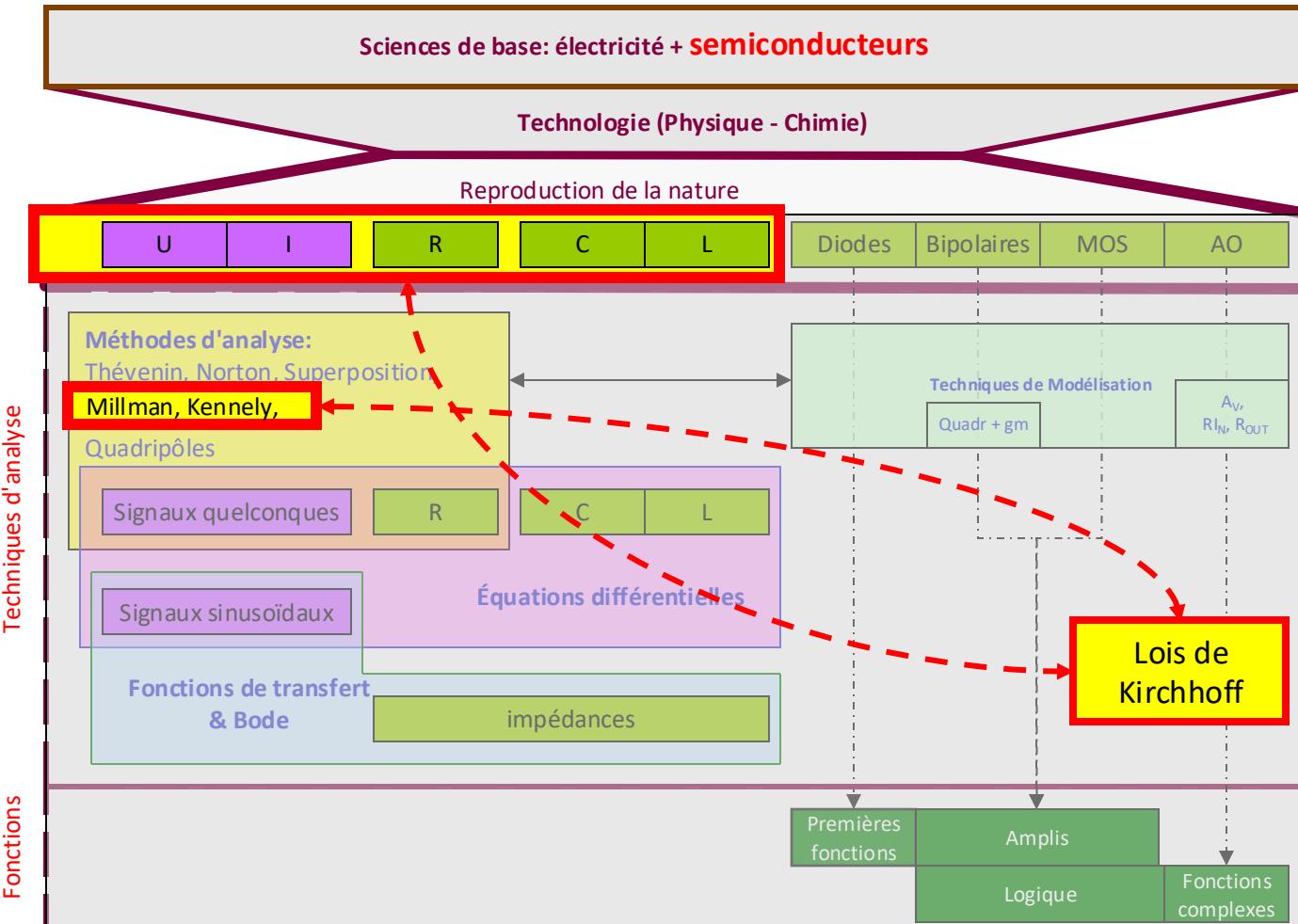


Relations entre les différentes notions



Circuits à composants passifs linéaires R, C, L

Composants : Les lois fondamentales pour **R**, **C** et **L**

Circuits : Énoncé des lois de **Kirchhoff** (loi des **mailles** et loi des **nœuds**)

Exploitation des lois de **Kirchhoff** pour :

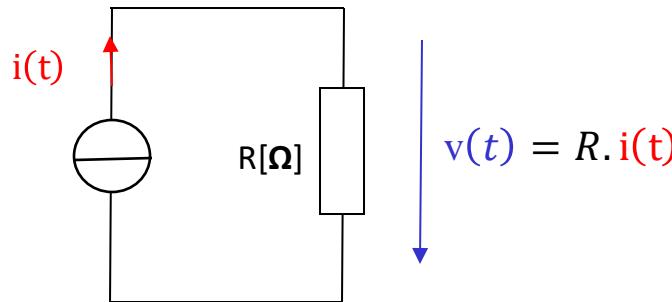
- Démontrer des techniques de **réduction** du nombre de composants (composants équivalents)
- Démontrer des théorèmes complémentaires (**Millman, Kennely**)
- Analyser nos premiers circuits

Rappel : Composants de base (La résistance)

Montages caractéristiques de base

Si la source de courant est continue
(valeur constante)

$$V = R \cdot I$$

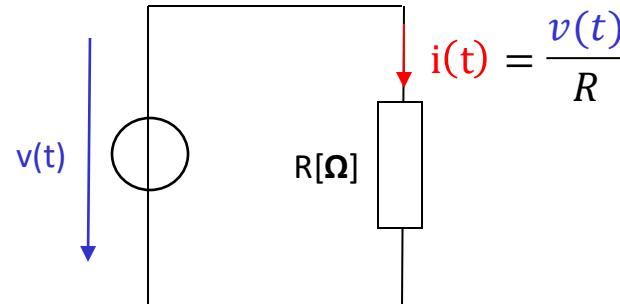


$$v(t) = R \cdot i(t)$$

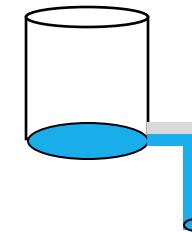
Si la source de tension est continue
(valeur constante)

$$I = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{V}{R}$$



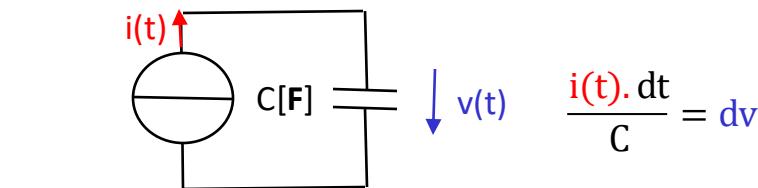
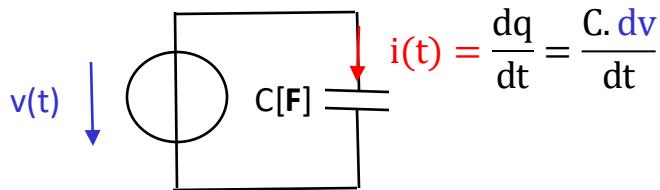
$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$



analogie de base

Rappel : Composants de base (Le condensateur)

Le condensateur (appelé abusivement Capacité)



$$\frac{i(t) \cdot dt}{C} = dv$$

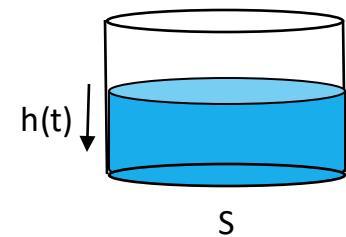
supposons $I = \text{constante}$

$$\int \frac{I \cdot dt}{C} = \int dv = \frac{I \cdot t}{C} + k = v(t)$$

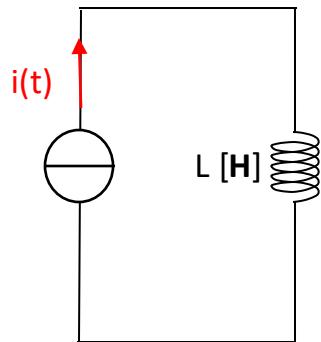
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{I \cdot dt}{C} = \int_{V(t_0)}^{V(t_1)} dv = \frac{I \cdot (t_1 - t_0)}{C} = v(t_1) - v(t_0)$$

Allure: équation d'une droite

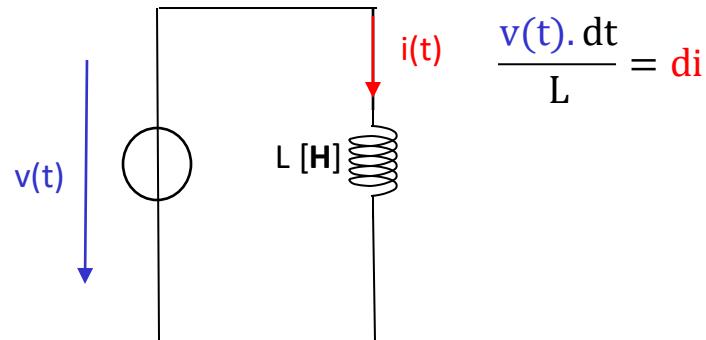
Parcours



Rappel : Composants de base (L'inductance)



$$v(t) = \frac{L \cdot di}{dt}$$



supposons $V = \text{constante}$

$$\int \frac{V \cdot dt}{L} = \int di = \frac{V \cdot t}{L} + k = i(t)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{V \cdot dt}{L} = \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} di = \frac{V \cdot (t_1 - t_0)}{L} = i(t_1) - i(t_0)$$

Allure: équation d'une droite

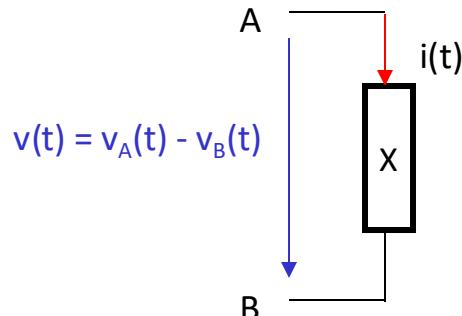
Parcours

Analogie plus subtile entre énergie magnétique $\frac{1}{2} L \cdot I^2$ et énergie cinétique $\frac{1}{2} m \cdot v^2$

Les composants passifs

Lois fondamentales

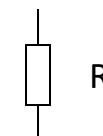
Composant passif quelconque



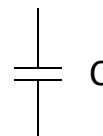
Composants R, L, C

$$v(t) = f_1(i(t))$$

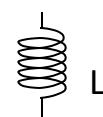
$$i(t) = f_2(v(t))$$



R



C



L

$$R \cdot i(t)$$

$$\frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + k$$

$$L \frac{di}{dt}$$

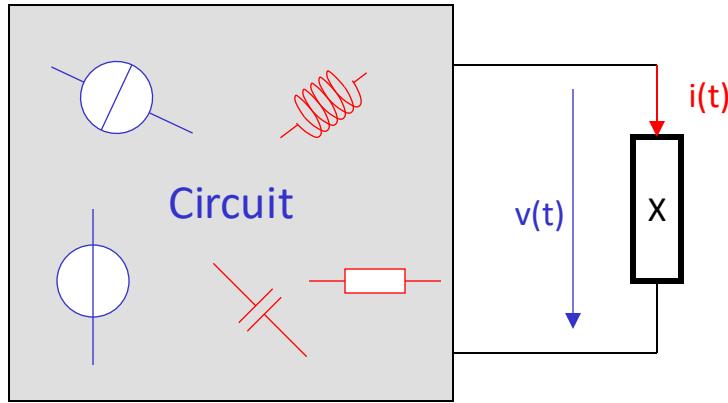
$$\frac{v(t)}{R}$$

$$C \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{L} \int v(t) \cdot dt + k$$

Assemblage de composants

Analyse de circuits



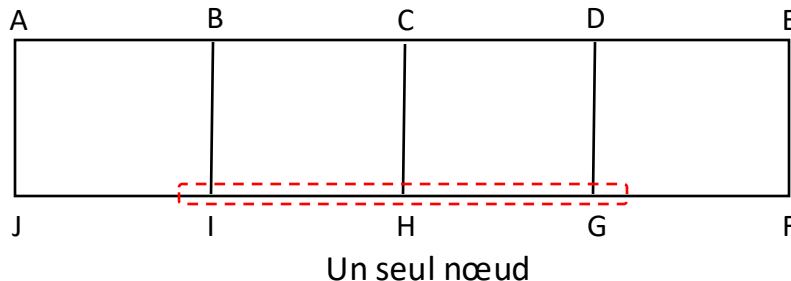
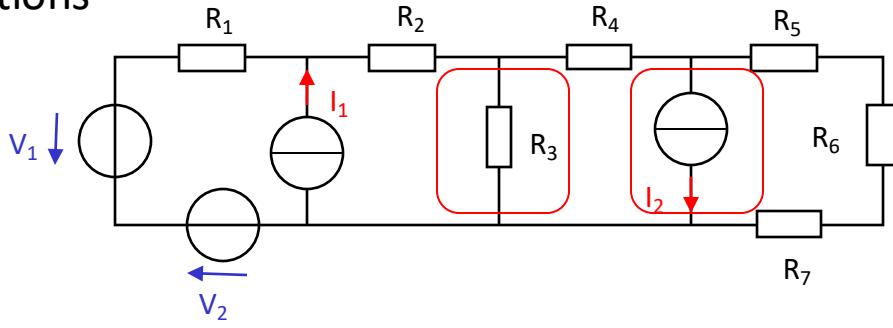
$$v(t) = F_1(X, \text{composant}_1, \dots, \text{composant}_n, \text{source}_1, \dots, \text{source}_m)$$

$$i(t) = F_2(X, \text{composant}_1, \dots, \text{composant}_n, \text{source}_1, \dots, \text{source}_m)$$

Première série de méthodes: les lois de Kirchhoff

Lois de Kirchhoff

Définitions



On observe un réseau où l'on identifie :

Des **nœuds** : Connexion entre deux segments au moins. Exemple : A (2 segments) et B (3 segments)

Des **branches** : Succession de segments connectés deux par deux. Exemple : ABCD

Des **mailles** : Parcours fermé, constitué de branches, ne passant qu'une seule fois par un nœud donné

On trouve des **segments** :

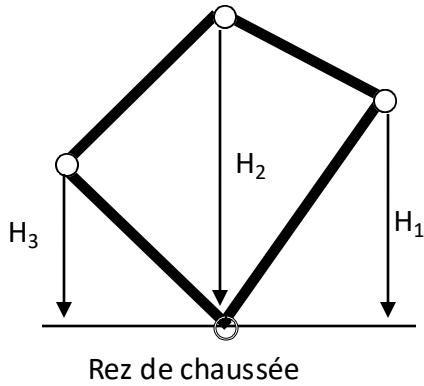
- Ils portent des composants
- Se connectent entre eux

On nomme les extrémités des **segments** :

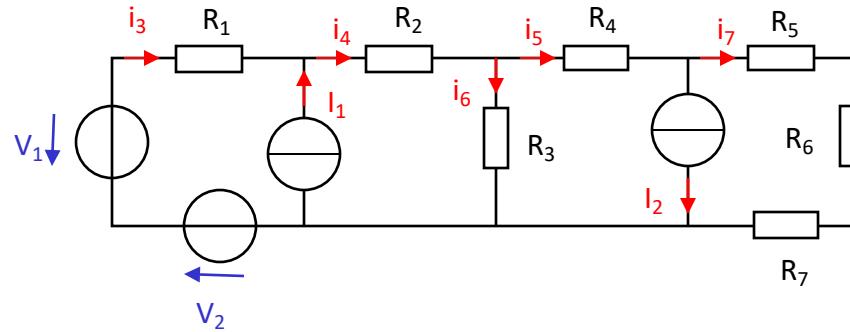
- Les **nœuds**.

Lois de Kirchhoff : Loi des mailles

Loi des mailles



Dans un cycle $\sum U_i = 0$



Objectif : on veut calculer toutes les tensions ou tous les courants du circuit

Attention: Pour être calculable, une maille ne doit pas inclure de sources de courant

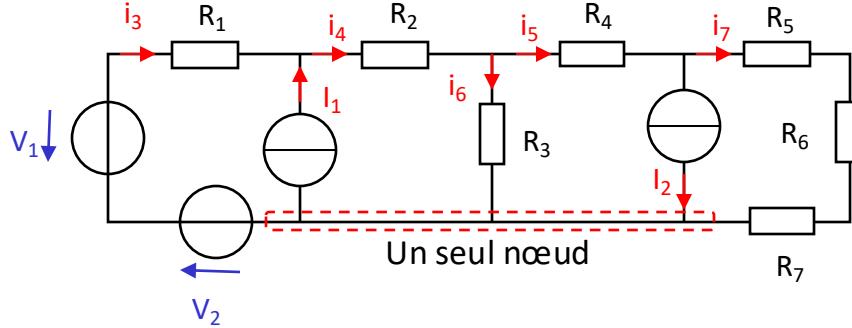
Conséquence: Trois mailles possibles

Description des mailles (se rappeler des conventions)

- ✓ $R_1 \cdot i_3 + R_2 \cdot i_4 + R_3 \cdot i_6 + V_2 - V_1 = 0$
- ✓ $R_4 \cdot i_5 + R_5 \cdot i_7 + R_6 \cdot i_7 + R_7 \cdot i_7 - R_3 \cdot i_6 = 0$
- ✓ $R_1 \cdot i_3 + R_2 \cdot i_4 + R_4 \cdot i_5 + R_5 \cdot i_7 + R_6 \cdot i_7 + R_7 \cdot i_7 + V_2 - V_1 = 0$ (pas indépendante)

Lois de Kirchhoff : Loi des nœuds

Lois des nœuds



Dans un nœud:
 $\sum I_{\text{sortants}} - \sum I_{\text{entrants}} = 0$
ou encore $\sum I_{\text{sortants}} = \sum I_{\text{entrants}}$
Rien ne se perd, rien ne se crée

Attention: Pour être calculable, un nœud ne doit pas être relié à une source de tension
Un nœud intéressant doit regrouper au minimum trois courants

Exemples:

- ✓ $i_3 + i_1 - i_4 = 0$
- ✓ $i_4 - i_6 - i_5 = 0$
- ✓ $i_5 - i_2 - i_7 = 0$
- ✓ $i_7 + i_2 + i_6 - i_1 - i_3 = 0$
(pas indépendantes)

Poser l'ensemble des équations indépendantes satisfaisant la loi des mailles et la loi des nœuds: **Calcul matriciel**

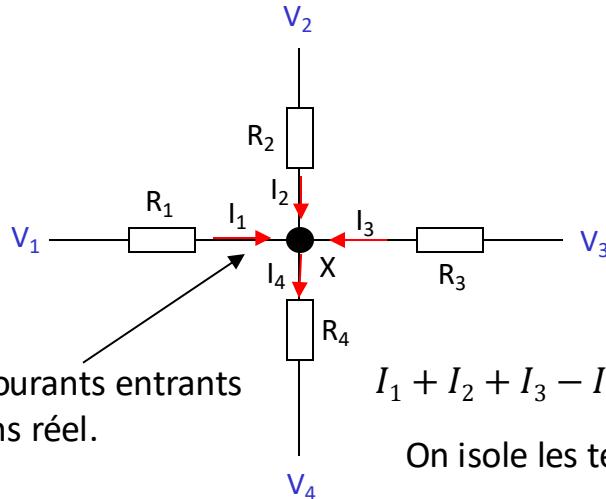
CONSTAT:

Avec un ordinateur: calcul rapide
A la main: rapidement très long
Au moins on comprend à quoi cela sert

Techniques de simplification

Théorème de Millman [1]

Théorème de Millman est issu des lois de Kirchhoff. Il permet de calculer une tension d'un nœud quelconque en fonction de son voisinage



Physiquement cela semble être une erreur, mais algébriquement des courants peuvent être négatifs ou positifs. S'ils sont négatifs c'est qu'en réalité ils allent dans l'autre sens

$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4}$$

On isole les termes en V_X

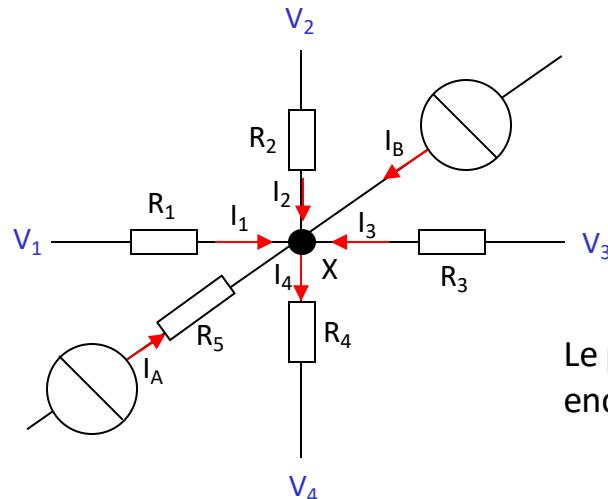
$$\frac{V_X}{R_1} + \frac{V_X}{R_2} + \frac{V_X}{R_3} + \frac{V_X}{R_4} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}$$

Il ne reste plus qu'à factoriser et isoler V_X pour retrouver la formule proposée

Techniques de simplification

Théorème de Millman [2]

Le théorème de Millman inclut aussi la présence de sources de courants.



$$V_X = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4} + I_A + I_B}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Le principe pour poser l'équation, repose encore sur la loi des nœuds de Kirchhoff.

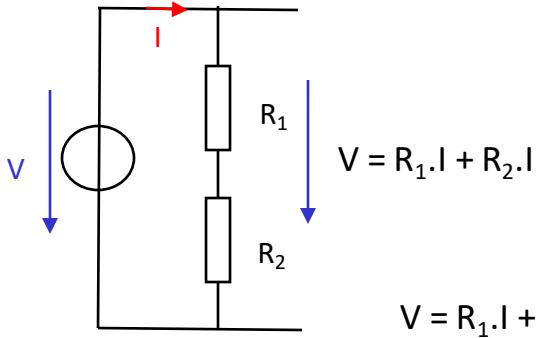
$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_A + I_B = 0 = \frac{V_1 - V_X}{R_1} + \frac{V_2 - V_X}{R_2} + \frac{V_3 - V_X}{R_3} - \frac{V_X - V_4}{R_4} + I_A + I_B$$

Suite identique à la diapositive précédente

Remarque : Si une tension $V_i = 0$? Il faut tenir compte de $1/R_i$ au dénominateur

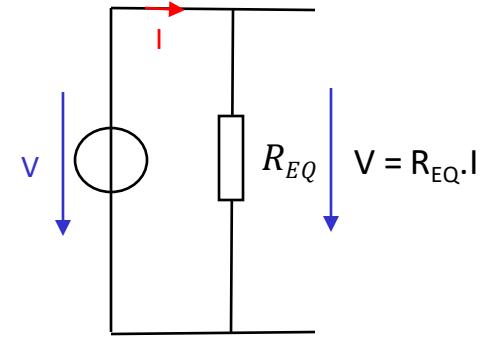
Simplifications intermédiaires (Résistances)

Les résistances en série



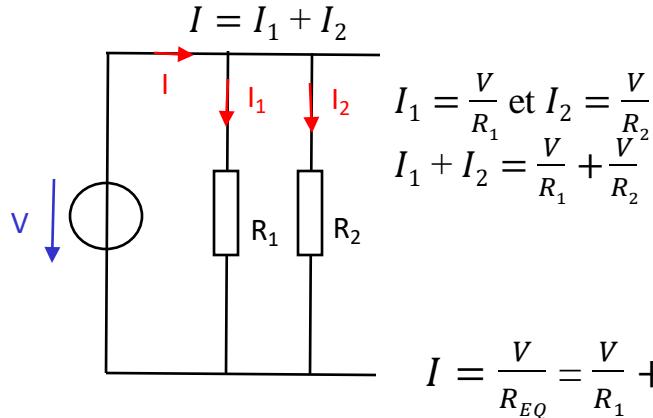
$$V = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$$

$$V = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = R_{EQ} \cdot I \Rightarrow R_{EQ} = R_1 + R_2$$



$$V = R_{EQ} \cdot I$$

Les résistances en parallèle

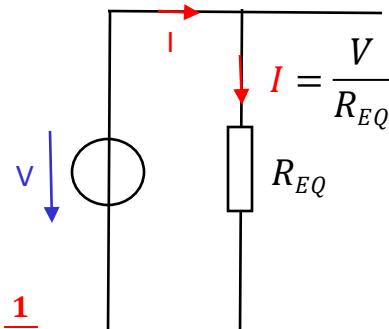


$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \text{ et } I_2 = \frac{V}{R_2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

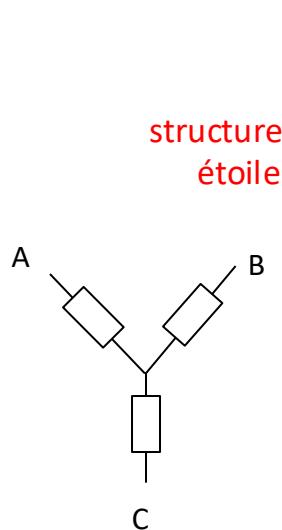
$$I = \frac{V}{R_{EQ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Simplifications intermédiaires (Résistances)

Théorème de Kennely

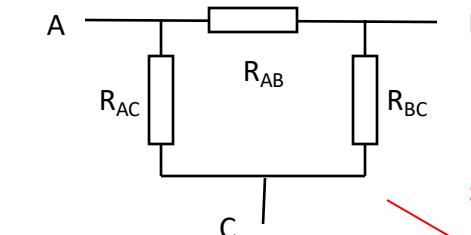
Théorème de Kennely utile pour des transformations de structures en étoile vers triangle et réciproquement



$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

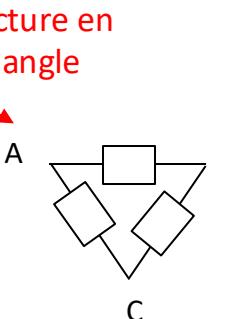
$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$



$$R_{BC} = \frac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_B \cdot R_C}{R_A}$$

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_B \cdot R_C}{R_C}$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_B \cdot R_C}{R_B}$$

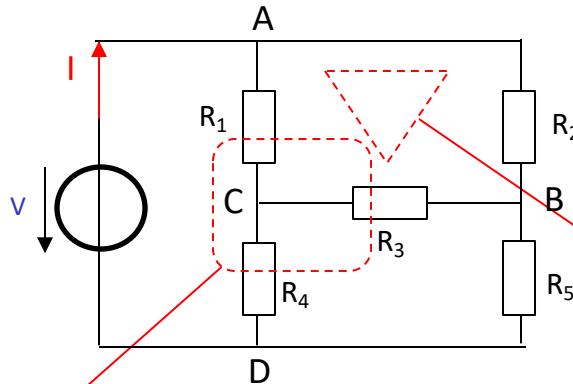


Méthode de démonstration :

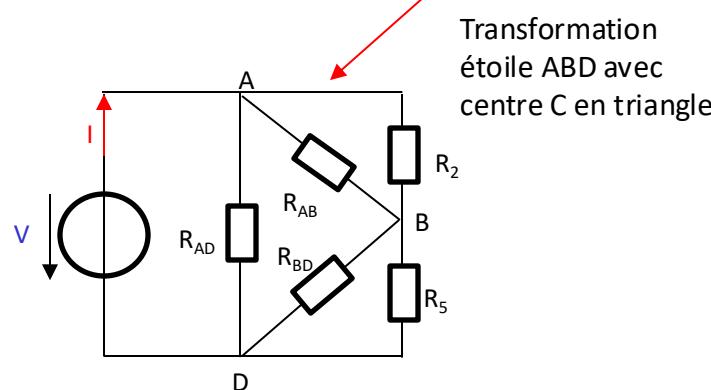
1. Déconnecter une borne
2. Regarder la résistance entre les deux autres bornes

Justification avec un exemple, de la transformation étoile – triangle ou triangle - étoile

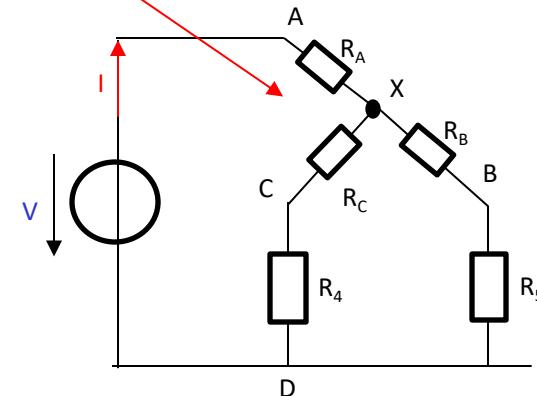
Imaginons qu'on veuille calculer le courant I



Dans ce circuit, il n'y a ni résistances en série, ni résistances en parallèle. Sans réduction, il faudrait poser les équations à partir des lois de Kirchhoff

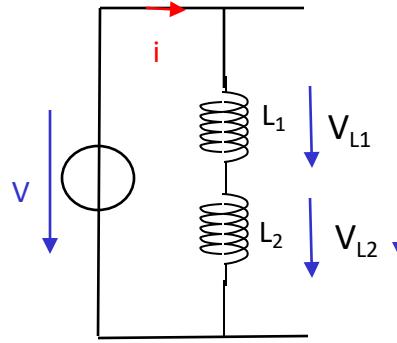


Transformation triangle ABC en étoile



Une fois que l'on obtient par transformation, l'un des deux circuits, on voit que la situation est débloquée car des résistances se retrouvent en série et/ou en parallèle et peuvent donc fusionner

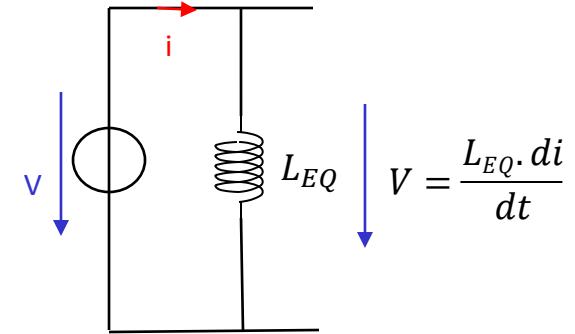
Simplifications intermédiaires (Les inductances)



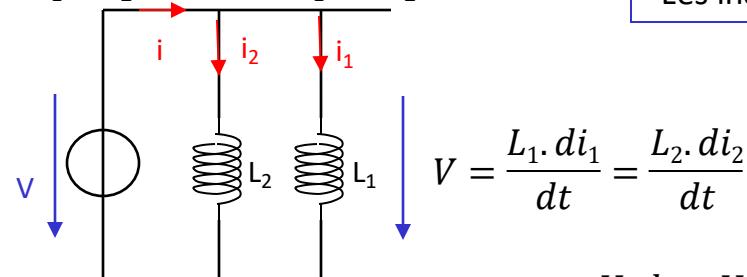
Les inductances en série

$$V = V_{L1} + V_{L2} = \frac{L_1 \cdot di}{dt} + \frac{L_2 \cdot di}{dt}$$

$$\frac{L_{EQ} \cdot di}{dt} = \frac{L_1 \cdot di}{dt} + \frac{L_2 \cdot di}{dt} \Rightarrow \mathbf{L_{EQ} = L_1 + L_2}$$



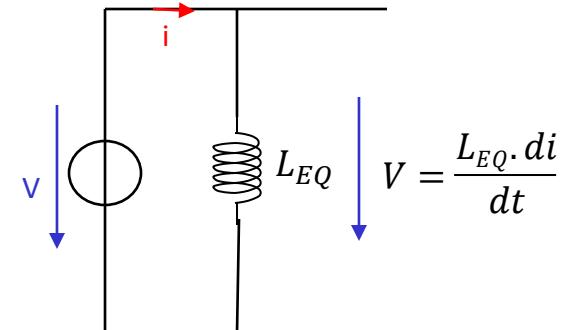
$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow di = di_1 + di_2$$



Les inductances en parallèle

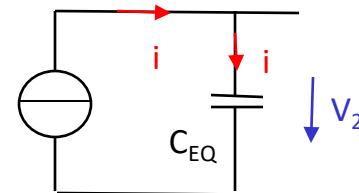
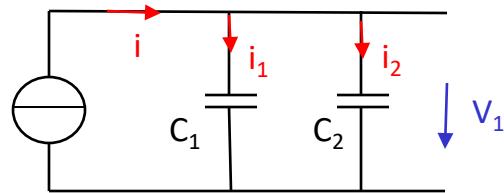
$$V = \frac{L_1 \cdot di_1}{dt} = \frac{L_2 \cdot di_2}{dt}$$

$$di_1 + di_2 = \frac{V \cdot dt}{L_1} + \frac{V \cdot dt}{L_2} = di = \frac{V \cdot dt}{L_{EQ}} \Rightarrow \frac{1}{L_{EQ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$



Simplifications intermédiaires (Capacités parallèles)

$i = i_1 + i_2$ pas utile ici



$V_1 = V_2$ car si la source est identique, les équipotentielles le sont aussi

$Q_{EQ} = Q_1 + Q_2$ La charge totale qui sera déplacée, et donc stockée, est la même

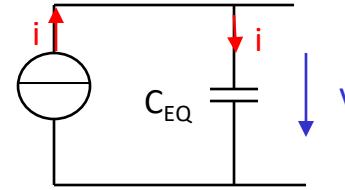
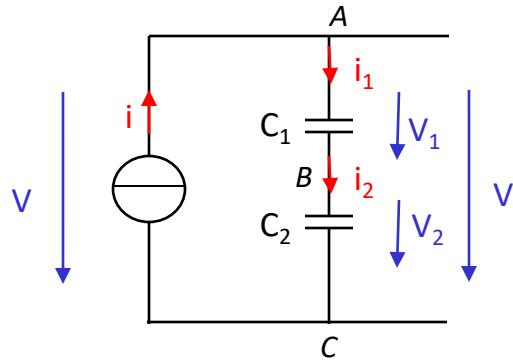
$$Q_{EQ} = C_{EQ} \cdot V_2 = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_1 \Rightarrow C_{EQ} \cdot V_2 = (C_1 + C_2) V_1$$

Finalement

$$C_{EQ} = C_1 + C_2$$

Comparer avec l'expression des résistances en parallèle

Simplifications intermédiaires (Capacités séries)



$$i = \frac{C_{EQ} \cdot dV}{dt} = i_1 = \frac{C_1 \cdot dV_1}{dt} = i_2 = \frac{C_2 \cdot dV_2}{dt} \Rightarrow dV = \frac{i \cdot dt}{C_{EQ}}, dV_1 = \frac{i \cdot dt}{C_1}, dV_2 = \frac{i \cdot dt}{C_2}$$

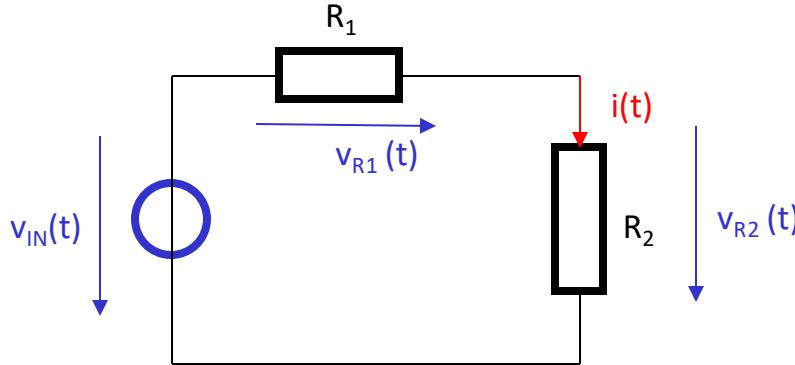
$$V = V_1 + V_2 \text{ et } dV = dV_1 + dV_2 \Rightarrow \frac{i \cdot dt}{C_{EQ}} = \frac{i_1 \cdot dt}{C_1} + \frac{i_2 \cdot dt}{C_2} = \frac{i \cdot dt}{C_1} + \frac{i \cdot dt}{C_2}$$

Or $i = i_1 = i_2$, on peut factoriser par i et on a directement

$$\frac{1}{C_{EQ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Exploitation des lois de Kirchhoff cas particulier: Le diviseur résistif

$$v_{R1}(t) = R_1 \cdot i(t)$$
$$v_{R2}(t) = R_2 \cdot i(t)$$



$$v_{IN}(t) = v_{R1}(t) + v_{R2}(t)$$
$$v_{IN}(t) = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2}$$

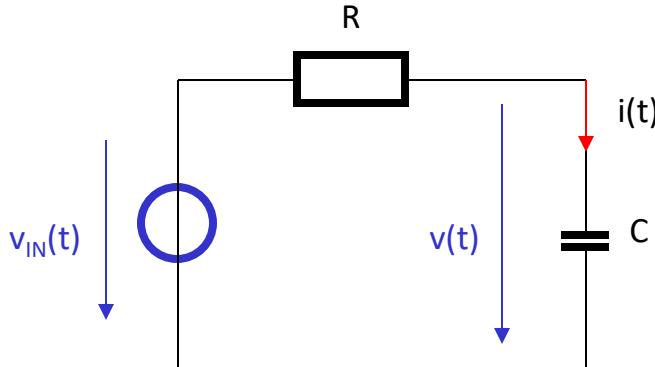
$$v_{R2}(t) = R_2 \cdot i(t) = R_2 \cdot \frac{v_{IN}(t)}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$v_{R2}(t) = v_{IN}(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Exploitation des lois de Kirchhoff

cas particulier: Circuit RC

équation différentielle du premier ordre



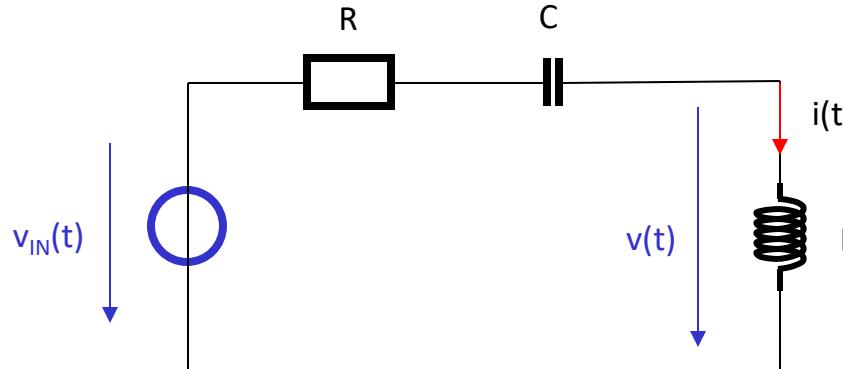
$$\text{méthode 1 : } R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt - v_{IN}(t) = 0 \Rightarrow i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{dv_{IN}}{dt}$$

$$\text{méthode 2 : } i(t) = \frac{v_{IN}(t) - v(t)}{R} = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{Ou encore} \quad v_{IN}(t) = v(t) + RC \cdot \frac{dv}{dt}$$

Exploitation des lois de Kirchhoff

cas particulier: Circuit RLC

équation différentielle du second ordre



$$v_{IN}(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$C \cdot \frac{dv_{IN}}{dt} = RC \frac{di}{dt} + i(t) + LC \frac{d^2i}{dt^2} = i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} + LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2}$$

Cas particulier si $V_{IN} = \text{cte}$ $\Rightarrow 0 = i(t) + RC \cdot \frac{di}{dt} + LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2}$