# Exercices EM-II : Série 2 - Solutions

Exercice 1 : **Forme intégrale des équations de Maxwell.** En utilisant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski, voir notes de cours p.9), et le théorème du rotationnel (voir notes de cours p. 10), mettre les équations de Maxwell

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}} = \rho,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t},$$

sous leur forme intégrale. Comment sont modifiés les théorèmes de Gauss et d'Ampère dans le cas dynamique ?

On commence par rappeler le théorème de Green-Ostrogradski. Pour tout champ vectoriel $\vec{v}$ défini dans l'espace, $\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{v}\, dV = \oiint_S \vec{v}\,.\overrightarrow{dS}$, avec $V$ un volume fermé et $S$ la surface fermée entourant ce volume.

**Maxwell-Gauss :** Si on applique ce théorème au champ $\vec{\mathcal{D}}$, on obtient

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}}\, dV = \oiint_S \vec{\mathcal{D}}\,.\overrightarrow{dS}$$

Mais, comme $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}} = \rho$, cela donne

$$\iiint_V \rho\, dV = \oiint_S \vec{\mathcal{D}}\,.\overrightarrow{dS},$$

soit en notant $Q_{int}(t) = \iiint_V \rho(t)\, dV$, on obtient une généralisation du théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{\mathcal{D}}\,.\overrightarrow{dS} = Q_{int}(t).$$

C'est la version intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}} = \rho$. La seule différence avec le théorème de Gauss est la dépendance temporelle de la charge interne (et du champ $\vec{\mathcal{D}}$…).

**Equation $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}} = 0$ :** En faisant le même raisonnement à partir de $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}} = 0$, on obtient une deuxième équation sous forme intégrale :

$$\oiint_S \vec{\mathcal{B}}\,.\overrightarrow{dS} = 0.$$

Pour les deux équations restantes, il faut utiliser le théorème du rotationnel: Pour tout champ vectoriel $\vec{v}$ défini dans l'espace, $\int_C \vec{v}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{v}.\overrightarrow{dS}$ avec $C$ un contour fermé et $S$ n'importe quelle surface s'appuyant sur ce contour.

**Maxwell-Faraday :** Si on applique ce théorème au champ $\vec{\mathcal{E}}$, on obtient

$$\int_C \vec{\mathcal{E}}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}}.\overrightarrow{dS}$$

Mais, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$, ce qui implique

$$\int_C \vec{\mathcal{E}}.\overrightarrow{dl} = -\iint_S \frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

On peut sortir la dérivée temporelle de l'intégrale spatiale (la forme de la surface ne dépend pas du temps, et la dérivée est distributive par rapport à la somme), obtenant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\int_C \vec{\mathcal{E}}.\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\mathcal{B}}.\overrightarrow{dS}$$

**Maxwell-Ampère :** Pour la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère, on commence par écrire le théorème de Stokes pour $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\int_C \vec{\mathcal{H}}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}}.\overrightarrow{dS},$$

mais d'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{\jmath} + \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$, ce qui donne

$$\int_C \vec{\mathcal{H}}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\jmath}.\overrightarrow{dS} + \iint_S \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

Ici encore, on peut sortir la dérivée partielle par rapport au temps et on obtient une sorte de théorème d'Ampère généralisé

$$\int_C \vec{\mathcal{H}}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{\jmath}.\overrightarrow{dS} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\mathcal{D}}.\overrightarrow{dS}$$

La différence par rapport au théorème d'ampère est l'ajout de la contribution du courant de déplacement $\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$ à celle du courant normal $\vec{\jmath}$.

<u>Exercice 2 :</u> **Ondes radio AM.** Les composantes des champ électriques et magnétiques associés à un signal radio AM qui se propage dans l'air ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$) en l'absence de sources sont :

$$\vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = \hat{x}E_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)$$
$$\vec{\mathcal{H}}(x,y,z,t) = \hat{y}\frac{E_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)$$

ou $E_0$, $\beta$ et $\eta$ sont des nombres réels.

a) Calculer les champs $\vec{\mathcal{D}}(x,y,z,t)$ et $\vec{\mathcal{B}}(x,y,z,t)$ associés.

D'après l'énoncé, le milieu de propagation est l'air avec $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. D'après les relations constitutives, on a simplement

$$\vec{\mathcal{D}}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathcal{E}} = \hat{x}E_0\varepsilon_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)$$
$$\vec{\mathcal{B}}=\mu_0\mu_r\vec{\mathcal{H}}=\hat{y}\frac{E_0\mu_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)$$

b) En écrivant que ces champs doivent satisfaire les équations de Maxwell, trouver les valeurs numériques de $\beta$ et de $\eta$ (donner aussi leurs unités).

Dans le vide, il n'y a par définition pas de charges, sauf éventuellement à l'endroit où l'on en place volontairement afin de créer une source de champ. Comme l'énoncé nous informe qu'il n'y a pas de sources, on a $\vec{\jmath} = \vec{0}$ et $\rho = 0$. On part de Maxwell-Ampère, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$, et on remplace les champs $\vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ par leurs expressions :

$$\vec{\nabla}\times\left[\hat{y}\frac{E_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\hat{x}E_0\varepsilon_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)].$$

On calcule d'abord

$$\vec{\nabla}\times\left[\hat{y}\frac{E_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)\right] = -\hat{x}\frac{E_0\beta}{\eta}\sin(7.5\ 10^6 t - \beta z),$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{x}E_0\varepsilon_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)] = -\hat{x}E_0\varepsilon_0 7.5\ 10^6\sin(7.5\ 10^6 t - \beta z),$$

et l'on écrit que ces expressions doivent être égales, ce qui donne

$$-\hat{x}\frac{E_0\beta}{\eta}\sin(7.5\ 10^6 t - \beta z) = -\hat{x}E_0\varepsilon_0 7.5\ 10^6\sin(7.5\ 10^6 t - \beta z).$$

Après simplifications, on obtient une première relation :

$$\frac{\beta}{\eta} = \varepsilon_0 7.5\ 10^6.$$

Il reste à écrire l'équation de Maxwell-Faraday, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$, ce qui donne

$$\vec{\nabla}\times[\hat{x}E_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{y}\frac{E_0\mu_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)\right]$$

On calcule d'abord

$$\vec{\nabla}\times[\hat{x}E_0\cos(7.5\ 10^6 t - \beta z)] = \hat{y}E_0\beta\sin(7.5\ 10^6 t - \beta z)$$

puis

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{y}\frac{E_0\mu_0}{\eta}\cos(7.5\ 10^6 t-\beta z)\right]=\hat{y}\frac{E_0\mu_0}{\eta}7.5\ 10^6\sin(7.5\ 10^6 t-\beta z),$$

et l'on écrit que ces expressions doivent être égales, ce qui donne

$$\hat{y}E_0\beta\sin(7.5\ 10^6 t-\beta z)=\hat{y}\frac{E_0\mu_0}{\eta}7.5\ 10^6\sin(7.5\ 10^6 t-\beta z).$$

Après simplifications, on obtient une deuxième relation

$$\beta=\frac{\mu_0}{\eta}7.5\ 10^6.$$

On utilise les deux relations trouvées, $\frac{\beta}{\eta}=\varepsilon_0 7.5\ 10^6$ et $\beta=\frac{\mu_0}{\eta}7.5\ 10^6$ pour calculer $\beta$ et $\eta$. En prenant le produit des deux, on obtient $\beta^2=\mu_0\varepsilon_0(7.5\ 10^6)^2$, soit

$$\beta=\pm 7.5\ 10^6\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\pm 0.025\ rad/m$$

On en déduit

$$\eta=\frac{\mu_0}{\beta}7.5\ 10^6=\pm 377\ \Omega.$$

On peut vérifier que les autres équations de Maxwell sont satisfaites. Le champ $\vec{\mathcal{D}}$ est orienté uniquement suivant $x$ donc $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}}=\frac{\partial\mathcal{D}_x}{\partial x}$. Puisque $\mathcal{D}_x$ ne dépend pas de la variable $x$, le champ $\vec{\mathcal{D}}$ satisfait automatiquement l'équation de Maxwell $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}}=0$. Un raisonnement similaire montre que $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}}=\frac{\partial\mathcal{B}_y}{\partial y}=0$, satisfaisant la dernière équation de Maxwell restante. On note également que les équations de Maxwell n'impose rien sur la valeur de l'amplitude $E_0$.

<u>Exercice 3 :</u> **Etude d'une solution aux équations de Maxwell dans le domaine temporel.**
Considérons un champ électromagnétique se propageant dans le vide (absence de sources). On suppose que les composantes du champ électrique associé s'écrivent

$$\mathcal{E}_x=f_1(z-v_p t)+f_2(z+v_p t)$$
$$\mathcal{E}_y=0$$
$$\mathcal{E}_z=0$$

avec $f_1$ et $f_2$ des fonctions réelles arbitraires, et $v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.

1) Montrer que ce champ électrique satisfait l'équation de Maxwell-Gauss.

Dans le vide et en absence de sources, on a $\rho=0$. Il faut donc vérifier que $\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}}=0$. En effet,

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{D}} = \vec{\nabla}.\left(\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}\right) = \varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\right) = \varepsilon_0\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = 0.$$

2) Trouver les trois composantes du champ $\vec{\mathcal{H}}$ associé, et montrer que toutes les équations de Maxwell sont satisfaites.

On part de Maxwell-Faraday, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t}$, et on remplace $\vec{\mathcal{E}}$ par $\hat{x}\{f_1(z - v_p t) + f_2(z + v_p t)\}$. Cela donne

$$-\mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = \hat{y}\{f_1{}'(z - v_p t) + f_2{}'(z + v_p t)\},$$

en notant $f_1{}'$ la fonction dérivée de la fonction $f_1$. On a alors

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = -\hat{y}\frac{1}{\mu_0}\{f_1{}'(z - v_p t) + f_2{}'(z + v_p t)\},$$

et en prenant la primitive, on trouve

$$\vec{\mathcal{H}} = \hat{y}\frac{1}{\mu_0 v_p}\{f_1(z - v_p t) - f_2(z + v_p t)\}.$$

(En général, on peut ajouter un vecteur constant : ici on fait le choix de ne regarder que la solution pour laquelle ce vecteur constant est nul). On peut vérifier que les deux équations de Maxwell restantes,

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t},$$

sont satisfaites. La première l'est car

$$\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{H}} = \mu_0\frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial y} = 0.$$

Pour vérifier la deuxième, on calcule d'abord

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = -\hat{x}\frac{1}{\mu_0 v_p}\{f_1{}'(z - v_p t) - f_2{}'(z + v_p t)\},$$

puis

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = -\varepsilon_0 v_p\hat{x}\{f_1{}'(z - v_p t) - f_2{}'(z + v_p t)\}.$$

On a alors

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}}-\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}=\hat{x}\left(\frac{1}{\mu_0 v_p}-\varepsilon_0 v_p\right)\{f_1'(z-v_pt)-f_2'(z+v_pt)\}.$$

Mais comme, d'après l'énoncé, $v_p=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, on a $\frac{1}{\mu_0 v_p}-\varepsilon_0 v_p=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0}-\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=0$, et on trouve bien $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}}-\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}=0$.

Exercice 4 : **Phaseurs complexes**

1. Transformer les champs réèls suivants en leurs phaseurs complexes :

a) $\vec{\mathcal{E}}(z,t)=\hat{y}\cos(\omega t-z)$

b) $\vec{\mathcal{H}}(x,t)=0.1[\hat{y}\cos(\omega t-0.3x)+0.5\hat{z}\sin(\omega t+0.3x)]$

c) $\vec{\mathcal{B}}(y,z,t)=\hat{x}\,40\sin(3\times10^8t+0.8y-0.6z+\pi/4)$

d) $\vec{\mathcal{E}}(z,t)=\hat{x}\sin(\beta z)\sin(21\times10^9\pi t-z)$

On utilise la définition du phaseur complexe: $\vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t)=Re\left\{\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\}$.

a) $\vec{\mathcal{E}}(z,t)=\hat{y}\cos(\omega t-z)=Re\left\{\hat{y}e^{-jz}e^{j\omega t}\right\}$ donc $\vec{\mathrm{E}}(z)=\hat{y}e^{-jz}$.

b) Comme $\vec{\mathcal{H}}(x,t)=0.1\left[\hat{y}\cos(\omega t-0.3x)+0.5\hat{z}\cos\left(\omega t+0.3x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$, on a

$$\vec{\mathcal{H}}(x,t)=Re\left\{0.1\,\hat{y}e^{-j0.3x}e^{j\omega t}-0.05j\hat{z}e^{j0.3x}e^{j\omega t}\right\}$$

donc

$$\vec{\mathrm{H}}(x)=0.1\,\hat{y}e^{-j0.3x}-0.05j\hat{z}e^{j0.3x}$$

c) Comme $\vec{\mathcal{B}}(y,z,t)=\hat{x}\,40\cos\left(3\times10^8t+0.8y-0.6z+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$, on a en posant $\omega=3\times10^8$,

$$\vec{\mathcal{B}}(y,z,t)=Re\left\{\hat{x}20\sqrt{2}\,(1-\mathrm{j})e^{j(0.8y-0.6z)}e^{j\omega t}\right\}$$

donc

$$\vec{\mathrm{B}}(y,z)=\hat{x}20\sqrt{2}\,(1-\mathrm{j})e^{j(0.8y-0.6z)}$$

d) Comme $\vec{\mathcal{E}}(z,t)=\hat{x}\sin(\beta z)\cos\left(21\times10^9\pi t-z-\frac{\pi}{2}\right)$, on a en posant $\omega=21\times10^9\pi$,

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t)=Re\left\{-j\hat{x}\sin(\beta z)\,e^{-jz}e^{j\omega t}\right\}$$

donc

$$\vec{\mathrm{E}}(y,z)=-j\hat{x}\sin(\beta z)\,e^{-jz}$$

2. Transformer les phaseurs complexes suivants en leurs champs rééls associés. On notera $\omega$ la pulsation temporelle.

a) $\vec{\mathrm{E}}(y) = 5\hat{z}e^{-j\,40\pi y}$

b) $\vec{\mathrm{B}}(z) = 0.1\hat{x}e^{-j\,2\pi z}$-$0.3\hat{y}je^{-j\,2\pi z}$

c) $\vec{\mathrm{E}}(x) = 0.1\hat{z}(e^{-j\,18\,x} - 0.5\,e^{j\,18\,x})$

d) $\vec{\mathrm{H}}(x,z) = \hat{y}(e^{-j\,48\,\pi x}e^{j\,64\,\pi z})$

Une fois encore, on utilise la définition $\vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = Re\left\{\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\}$. La partie réelle peut se calculer de la manière suivante : $Re\left\{\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\} = \left(\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)e^{j\omega t} + \vec{\mathrm{E}}^*(x,y,z)e^{-j\omega t}\right)/2$, ou on note $^*$ le conjugué complexe. Les calculs donnent :

a) $\vec{\mathcal{E}}(y,t) = \left(5\hat{z}e^{-j\,40\pi y}e^{j\omega t} + 5\hat{z}e^{j\,40\pi y}e^{-j\omega t}\right)/2 = 5\hat{z}\cos(\omega t - 40\pi y)$

b)

c) $\vec{\mathcal{B}}(y,z,t) = 0.1\hat{x}\frac{e^{j\,(\omega t - 2\pi z)} + e^{-j\,(\omega t - 2\pi z)}}{2} + 0.3\hat{y}\frac{e^{j\,(\omega t - 2\pi z)} - e^{-j\,(\omega t - 2\pi z)}}{2j}$

donc

$$\vec{\mathcal{B}}(y,z,t) = 0.1\hat{x}\cos(\omega t - 2\pi z) + 0.3\hat{y}\sin(\omega t - 2\pi z)$$

d) $\vec{\mathcal{E}}(x,t) = \left(0.1\hat{z}(e^{j\,(\omega t - 18x)} + e^{-j\,(\omega t - 18x)} - 0.5\,e^{j\,(\omega t + 18x)} - 0.5\,e^{-j\,(\omega t + 18x)})\right)/2 = \hat{z}\{0.1\cos(\omega t - 18x) - 0.05\cos(\omega t + 18x)\}$

e) $\vec{\mathcal{H}}(x,z,t) = 0.5\hat{y}\left(e^{j\,(\omega t - 48\,\pi x + 64\,\pi z)} + e^{-j\,(\omega t - 48\,\pi x + 64\,\pi z)}\right) = \hat{y}\cos(\omega t - 48\,\pi x + 64\,\pi z)$