

Examen d'Électromagnétisme II

Mardi 4 juillet 2023
9h15 – 12h15
CM1105
Prof. R. Fleury

Instructions

Merci de déposer une pièce d'identité sur le coin de votre table et indiquer votre nom sur votre copie.

Matériel autorisé dans la salle :

- Notes **manuscrites** strictement limitées à du texte, des formules et schémas, écrits sur deux feuilles A4 recto-verso (total de 4 pages).
- Pas d'autre matériel imprimé (notes, polycopiés, livres).
- Crayons, règle, compas, stylos, feutres, feuilles blanches : pas de limitation.
- Calculatrice programmable aux performances raisonnables (pas de PC, pas de dispositifs à connexion sans fil).

Déroulement :

- Trois problèmes sont proposés. Les trois problèmes sont comptés dans l'évaluation.
- L'examen est à rendre écrit avec un stylo bleu ou noir. Pas d'autres couleurs, pas d'écriture au crayon.
- L'heure officielle de finalisation de l'examen sera respectée de façon stricte.
- Des feuilles blanches seront mises à disposition si besoin.
- Débranchez vos téléphones portables.

Soyez très raisonnables avec boissons, nourriture et demandes de quitter la salle pendant l'examen.

L'intégralité de l'énoncé doit être rendu à la fin de l'épreuve.

Exercice 1)

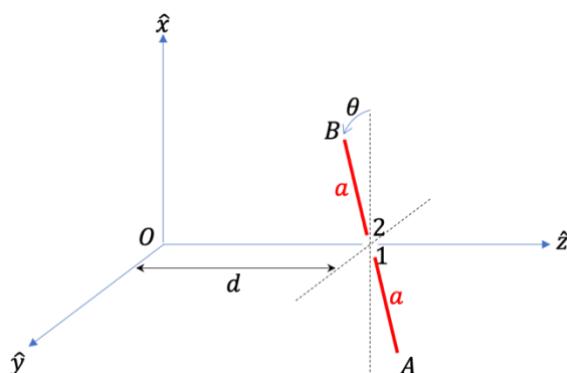
On considère une onde plane monochromatique se propageant dans la direction \hat{z} . La fréquence de cette onde est de 2.4 GHz. Le milieu de propagation est le vide ($\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$).

Dans cet exercice, on considère deux cas correspondant à deux polarisations différentes pour cette onde :

Polarisation (a) : Le phaseur du champ électrique s'écrit $\vec{E}(z) = \hat{x}E_0 \exp(-j\beta z)$ avec $E_0 = 1 \text{ V/m}$.

Polarisation (b) : Le phaseur du champ électrique s'écrit $\vec{E}(z) = E_0(\hat{x} - j\hat{y}) \exp(-j\beta z)$, avec $E_0 = 1 \text{ V/m}$.

Dans les deux cas, cette onde est incidente sur une antenne filaire, faite de deux fils conducteurs rectilignes de longueurs a , alignés sur le même axe et séparés par une distance $h \ll a$. Elle est placée dans un plan parallèle à (xOy) , à une distance d de l'origine O du repère, et son axe fait un angle θ par rapport à \hat{x} . Le schéma ci-dessous résume la géométrie du problème, et définit les bornes 1 et 2 qui servent à mesurer la tension induite V_{ind} (cette tension est le signal capté par l'antenne). Les points A et B correspondent aux deux extrémités de l'antenne.



QUESTIONS ASSOCIEES A COCHER (1p par question):

1A)

La longueur d'onde :

- vaut 12.5 centimètres.
- vaut 240 micromètres.
- Aucune des réponses précédentes

1B)

Le champ magnétique

- est orienté suivant \hat{y} dans les deux cas
- est orienté suivant \hat{y} seulement dans le cas (a)
- Aucune des réponses précédentes

Nom :

Sciper :

1C)

Dans le cas (b), l'onde plane est

- polarisée rectiligne
- polarisée circulaire
- polarisée elliptique

QUESTIONS PRINCIPALES (5p):

1D) Dans chacune des situations (a) et (b), calculer le phasor complexe associé à la tension $V_{ind}(t)$ induite entre les bornes de l'antenne en fonction des paramètres du problème. Cette tension est définie comme l'intégrale $V_{ind} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ prise le long de l'antenne, sur toute sa longueur (\vec{E} est le phasor complexe associé au champ électrique de l'onde incidente). On pourra négliger complètement l'ouverture h et considérer l'antenne comme un fil unique de longueur $2a$.

Situation a

Situation b

Nom :

Sciper :

1E) Dans les cas (a) et (b), calculer l'amplitude du signal $V_{ind}(t)$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. L'une des deux polarisations permet une réception plus robuste du signal : laquelle et pourquoi ?

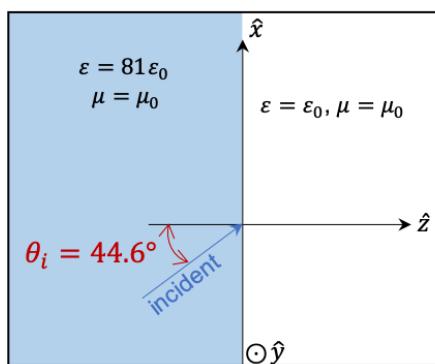
Exercice 3)

On considère une onde plane monochromatique se propageant dans l'eau ($\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$) et incidente avec un angle d'incidence $\theta_i = 44.6^\circ$ sur une interface plane infinie avec de l'air ($\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$). Cette onde incidente est associée au champ électrique incident dont le phaseur est le suivant :

$$\vec{E}_i = E_0 [\hat{y} + \cos \theta_i \hat{x} - \sin \theta_i \hat{z}] e^{-j\vec{\beta}_i \cdot \vec{r}}$$

Avec $\vec{\beta}_i = \beta_{zi}\hat{z} + \beta_{xi}\hat{x}$, et $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. L'interface et la direction de l'onde plane incidente sont représentées sur le schéma ci-dessous.

Cette onde est incidente sur une interface plane (située en $z = 0$) séparant deux milieux diélectriques, sans pertes, et non magnétiques, représentés sur la figure ci-dessous.



Nom :

Sciper :

Le but de l'exercice est de déterminer la polarisation (linéaire, circulaire ou elliptique) de l'onde réfléchie et de la caractériser.

QUESTIONS ASSOCIEES A COCHER (1p par question):

3A) L'onde incidente

- o est polarisée rectiligne
- o est polarisée circulaire
- o est polarisée elliptique

3B) Pour ce problème de réflexion/transmission

- o il n'existe pas d'angle critique
- o il existe un angle critique θ_c et $\theta_i < \theta_c$
- o il existe un angle critique θ_c et $\theta_i > \theta_c$

3C) Dans l'eau, le rapport entre la norme du champ électrique et la norme du champ magnétique pour une onde plane:

- o est inférieur à sa valeur dans l'air
- o est égale à sa valeur dans l'air
- o est supérieur à sa valeur dans l'air

QUESTIONS PRINCIPALES (5p):

3D) Exprimer les composantes du vecteur d'onde incident β_{zi} et β_{xi} en fonction du paramètre θ_i . Effectuer un calcul direct du produit scalaire $\vec{E}_i \cdot \vec{\beta}_i$ et commenter brièvement le résultat.

3E) Le champ électrique incident peut se décomposer en une somme d'une composante transverse électrique (TE) et une composante transverse magnétique (TM) : $\vec{E}_i = \vec{E}_i^{TE} + \vec{E}_i^{TM}$. Donner les expressions de \vec{E}_i^{TE} et \vec{E}_i^{TM} .

Nom :

Sciper :

3F) Calculer le champ magnétique incident \vec{H}_i et l'exprimer également comme une somme d'une composante transverse électrique (TE) et une composante transverse magnétique (TM) : $\vec{H}_i = \vec{H}_i^{TE} + \vec{H}_i^{TM}$. Donner les expressions de \vec{H}_i^{TE} et \vec{H}_i^{TM} .

3G) Montrer que la composante suivant \hat{z} du vecteur d'onde de l'onde transmise dans l'air, que l'on note β_{zt} , est de la forme $\beta_{zt} = \kappa\beta_0$, avec $\beta_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. On donnera l'expression de κ (nombre potentiellement complexe) en fonction du paramètre θ_i , puis on fera l'application numérique avec la valeur de θ_i donnée par l'énoncé ($\theta_i = 44.6^\circ$). Interpréter brièvement le résultat.

Nom :

Sciper :

3H) Donner les expressions des coefficients de Fresnel Γ_{\perp} et Γ_{\parallel} en fonction de κ et du paramètre θ_i . Puis, faire l'application numérique en prenant $\theta_i = 44.6^\circ$: donner

- (i) les valeurs numériques de leurs modules, que nous noterons respectivement ρ_{\perp} et ρ_{\parallel} .
(ii) les valeurs numériques en degrés de leurs arguments respectifs (les arrondir à la dizaine de degré la plus proche et garder cette valeur pour la suite). Ces derniers seront notés θ_{\perp} et θ_{\parallel} .

3I) En déduire le phasor complexe associé à la composante TE du champ électrique réfléchi, \vec{E}_r^{TE} , en fonction de E_0 , ρ_{\perp} , θ_{\perp} , et des vecteurs unitaires de base $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. A la réflexion, cette composante a-t-elle subi un changement d'amplitude ? de phase ? de direction ?

Nom :

Sciper :

3J) En déduire le phasor complexe associé à la composante TM du champ électrique réfléchi, \vec{E}_r^{TM} , en fonction de E_0 , ρ_{\parallel} , θ_{\parallel} , θ_i , et des vecteurs unitaires de base $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. A la réflexion, cette composante a-t-elle subi un changement d'amplitude ? de phase ? de direction ?

3K) Quelle est la polarisation de l'onde réfléchie ? La caractériser complètement.

Exercice 3)

On considère une antenne dipolaire rayonnant en espace libre. Une telle antenne est constituée d'un câble conducteur dans lequel s'écoule un courant sinusoïdal à la fréquence angulaire ω_0 . On suppose qu'on peut approximer la distribution de courant source par l'expression suivante :

$$\vec{J}(x', y', z') = \hat{z} I_0 \delta(x') \delta(y') \text{ si } |z'| < L/2$$
$$\vec{J}(x', y', z') = 0 \text{ si } |z'| \geq L/2$$

QUESTIONS ASSOCIEES A COCHER (1p par question):3A) La distribution $\delta(x)$

- o est sans unité
- o a pour unité l'unité de son argument x , c'est-à-dire des mètres
- o a pour unité l'inverse de l'unité de son argument x , c'est-à-dire des mètres⁻¹

3B) L'amplitude du courant

- o est maximale en $x = y = z = 0$
- o est minimale en $x = y = z = 0$
- o aucune des deux réponses précédentes

3C) Le potentiel vecteur \vec{A} rayonné par ce dipôle

- o est orienté suivant \hat{z} partout dans l'espace
- o est orienté suivant \hat{z} seulement en champ lointain
- o ne peut pas posséder de composante suivant \hat{z}

QUESTIONS PRINCIPALES (5p):

1D) Calculer les champs électriques et magnétiques lointains rayonnés par l'antenne.

Nom :

Sciper :

1D) Montrer que le vecteur de Poynting en champ lointain est radial et donner son expression. Expliquer pourquoi la conservation de l'énergie le force à être proportionnel à $1/r^2$.