CORRIGE DE LA SERIE VI

EXERCICE VI.1 : LIEUX D'IMPEDANCES

A.

Premier circuit On part de l'admittance de la portion de circuit comportant des éléments en parallèle. Dans l'expression de l'admittance, seule la partie imaginaire est fonction de la fréquence, donc simple à représenter :

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C = \frac{1}{33} + j \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2} - j \cdot \frac{\omega C \cdot R_2^2}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$

L'impédance $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2}$ est déterminée par inversion (l'inverse d'une droite est un cercle). Le demi-cercle représentant le lieu de $\underline{Z}_2$ pour $\omega = 0 \div \infty$ est défini par ses deux extrémités ($\omega = 0 \Rightarrow \underline{Z}_2 = R_2 = 33\,\Omega$; $\omega = \infty \Rightarrow \underline{Z}_2 = 0\,\Omega$) et son rayon $\frac{R_2}{2} = 16{,}5\,\Omega$.

L'impédance du reste du circuit est : $\underline{\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L = 10 + j \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \omega}$

L'impédance du circuit entier est la somme : $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$:

$$\underline{\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1+(\omega R_2 C)^2} + j\omega \left(L - \frac{C \cdot R_2^2}{1+(\omega R_2 C)^2} \right)}$$

La fonction $\underline{Z}$ coupe l'axe réel en 2 points (lorsque $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0$) :

a. $\omega = 0$: $\underline{Z}_{(\omega=0)} = R_1 + R_2 = 10 + 33 = 43\,\Omega$

b. $L - \frac{C \cdot R_2^2}{1+(\omega R_2 C)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{C \cdot R_2^2 - L}{L \cdot (C \cdot R_2)^2}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 33^2 - 6{,}5 \cdot 10^{-3}}{6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (12 \cdot 10^{-6} \cdot 33)^2}} = 2{,}53 \cdot 10^3$

$$\underline{Z}_{(\omega=2{,}5 \cdot 10^3)} = R_1 + \frac{R_2}{1+(\omega C R_2)^2} = 10 + \frac{33}{1 + (2{,}53 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 33)^2} = 26{,}5\,\Omega$$

$$\omega = 2\pi f = 2{,}53 \cdot 10^3 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{2{,}53 \cdot 10^3}{2\pi} = 400\ \mathrm{Hz}$$

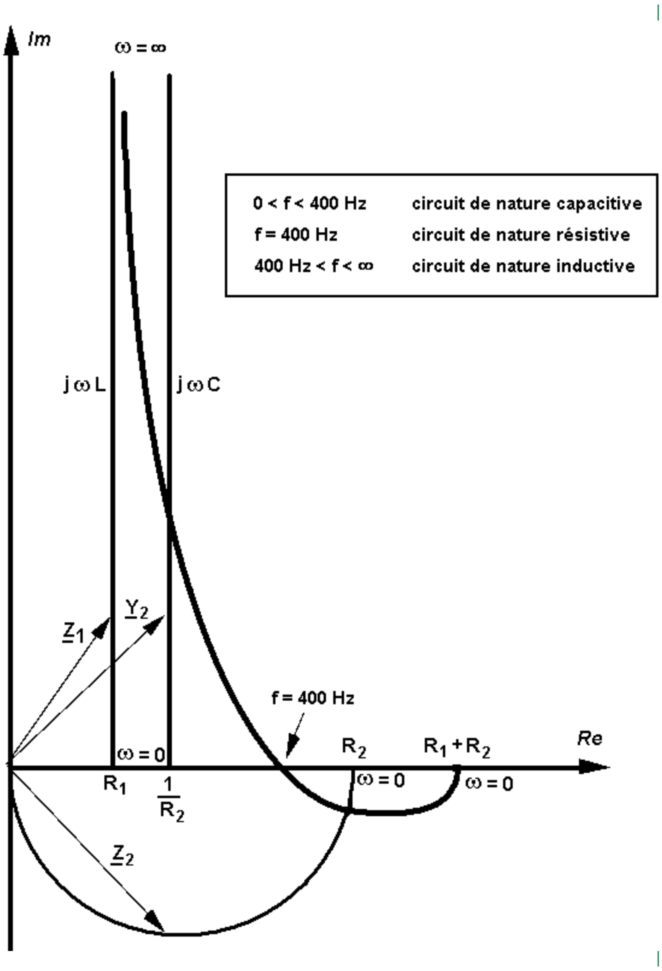
Second circuit En procédant de la même manière que pour le premier circuit, on trouve :

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{33} - j \cdot \frac{1}{6{,}5 \cdot 10^{-3}\,\omega}$$

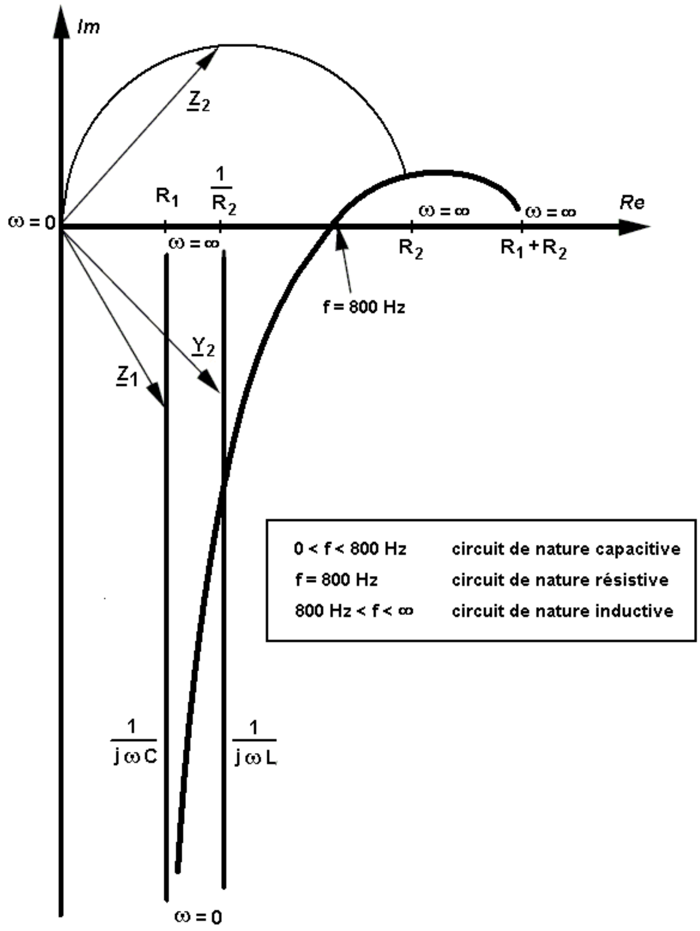
$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2 + (\omega L)^2} + j\frac{R_2^2 \cdot \omega L}{R_2 + (\omega L)^2} = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ R_2 = 33\,\Omega & \omega = \infty \end{cases}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 - j\frac{1}{\omega C} = \begin{cases} -\infty & \omega = 0 \\ R_1 = 10\,\Omega & \omega = \infty \end{cases}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_1 + \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2 + (\omega L)^2} - j\left(\frac{1}{\omega C} - \frac{R_2^2 \cdot \omega L}{R_2 + (\omega L)^2}\right) = \begin{cases} \infty & \omega = 0 \\ R_1 + R_2 = 43\,\Omega & \omega = \infty \end{cases}$$



Premier circuit



Second circuit

Pour $\omega \to 0$, la courbe de $\underline{Z}(\omega)$ tend asymptotiquement vers la droite $\mathrm{Re}\{\underline{Z}_1\} = R_1$.

B. Voir encadrés dans les graphiques ci-dessus.

EXERCICE VI.2 : CALCUL DES PUISSANCES

A. $\underline{Z} = R + j\omega L = R + j(2\pi f)L = R + jX_L$

B. $R = \dfrac{U_R}{I} = \dfrac{60\ V}{2\ A} = \underline{30\ \Omega}$

$X_L = \dfrac{U_L}{I} = \dfrac{80\ V}{2\ A} = \underline{40\ \Omega}$

$\underline{Z} = R + jX_L = \underline{30 + j \cdot 40 = 50 \cdot e^{j \cdot 53°}\ \Omega}$

C. $L = \dfrac{X_L}{2\pi f} = \dfrac{40}{100\pi} = \underline{127{,}3\ \text{mH}}$

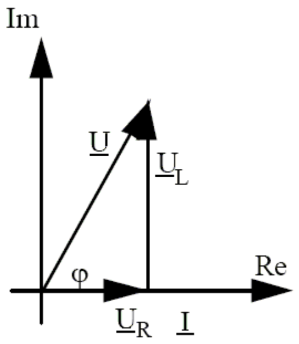
D. Valeur efficace : $U = Z \cdot I = 50 \cdot 2 = \underline{100\ V}$

ou : $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \underline{100\ V}$

En complexe : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 50 \cdot e^{j53°} \cdot 2 \cdot e^{j0°} = \underline{100 \cdot e^{j\,53°}\ V = (60 + j\,80)\ V}$

ou : $\underline{U} = U_R + j\,U_L = \underline{(60 + j80)\ V = 100 \cdot e^{j53°}\ V}$

E. Diagramme du courant et des tensions



Avec $\underline{I}$ référé à 0°

Argument de $\underline{U}$: $\alpha = 53°$

Argument de $\underline{U}_R$: $\beta = 0°$

Déphasage entre $\underline{I}$ et $\underline{U}$: $\varphi = \alpha - \beta = 53°$

F. Puissance active

$P = R \cdot I^2 = 30 \cdot 2^2 = \underline{120\ W}$

ou : $P = \dfrac{U_R^2}{R} = \dfrac{60^2}{30} = \underline{120\ W}$

ou : $P = U_R \cdot I = 60 \cdot 2 = \underline{120\ W}$

ou : $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 100 \cdot 2 \cdot 0{,}6 = \underline{120\ W}$

Puissance réactive

$Q = X_L \cdot I^2 = 40 \cdot 2^2 = \underline{160\ \text{VAr}}$

ou : $Q = \dfrac{U_L^2}{X_L} = \dfrac{80^2}{40} = \underline{160\ \text{VAr}}$

ou : $Q = U_L \cdot I = 80 \cdot 2 = \underline{160\ \text{VAr}}$

ou : $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 100 \cdot 2 \cdot 0{,}8 = \underline{160\ \text{VAr}}$

G. La compensation des puissances réactives s'exprime par:

$$X_L I^2 = \frac{U^2}{X_C} = \omega C \cdot U^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{X_L I^2}{\omega U^2} = \frac{160}{100\pi \cdot 100^2} = \underline{50{,}9\ \mu F}$$