CORRIGÉ DE LA SÉRIE XII

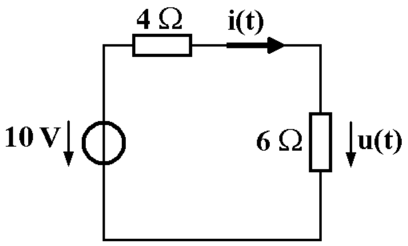
EXERCICE XII.1 : QUADRIPÔLE

$$Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = 14\,\Omega \qquad Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = 6\,\Omega \qquad Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = 6\,\Omega \qquad Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = 6\,\Omega$$

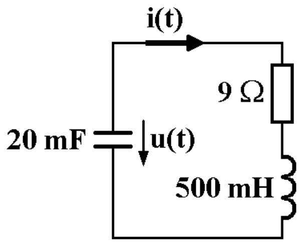
$$\Rightarrow \quad \boxed{Z = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}$$

EXERCICE XII.2 : OUVERTURE D'UN INTERRUPTEUR

Le circuit se comporte comme indiqué ci-dessous, pour t < 0 et t ≥ 0 :



t < 0



t ≥ 0

☞ **Les deux résistances de 3 Ω et 6 Ω qui se trouvent dans cette maille ont été remplacées par une seule résistance de 9 Ω.**

Pour t = 0, on a :

$$i(0) = \frac{10}{4+6} = 1\,\text{A} \qquad \text{et} \qquad u(0) = 6 \cdot i(0) = 6\,\text{V} \tag{1}$$

Pour t ≥ 0 :

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L} = \frac{9}{2 \cdot 0,5} = 9 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \times 0,02}} = 10 \tag{2}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm \sqrt{81 - 100} \qquad \text{ou} \qquad s_{1,2}\ -9 \pm 4,359\ j \tag{3}$$

La réponse est sous-amortie, car $\alpha < \omega_0$

$$\Rightarrow \quad i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4,359\,t + A_2 \sin 4,359\,t) \tag{4}$$

Les constantes A_1 et A_2 se calculent à partir des conditions initiales en t = 0 :

$$i(0) = 1 = A_1 \tag{5}$$

Par ailleurs :

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{L}[R \cdot i(0) + u(0)] = -2\,(9 \cdot 1 - 6) = -6\ \text{A/s} \tag{6}$$

En dérivant l'équation (4) :

$$\frac{di}{dt} = -9\,e^{-9t}(A_1 \cos 4,359\,t + A_2 \sin 4,359\,t) + e^{-9t} \cdot 4,359 \cdot (A_1 \sin 4,359\,t + A_2 \cos 4,359\,t) \tag{7}$$

En posant t = 0 dans cette relation, on a aussi $A_1 = 1$ [par (5)] et $\frac{di}{dt} = -6$ [par (6)] :

$$-6 = -9 \cdot (1 + 0) + 4,359 \cdot (-0 + A_2) \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = 0,6882 \tag{8}$$

En remplaçant par leurs valeurs A_1 et A_2 dans (4) :

$$\boxed{i(t) = e^{-9t}(\cos 4,359\,t + 0,6882 \sin 4,359\,t)}$$

EXERCICE XII.3 : QUADRIPÔLE

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\,\underline{I}_2 \qquad (2)$$

$$\underline{U}_2 = 0 = \underline{Z}_{12}\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\,\underline{I}_2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}} \cdot \underline{I}_1 \qquad (4)$$

Or $\underline{U}_1 = \underline{U}_0 - 2\,\underline{I}_1$ (5)

En remplaçant (4) et (5) dans (2) :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{2 + \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22}} = \frac{\underline{U}_0}{2 + 6 + 16/8} = \frac{\underline{U}_0}{10}$$

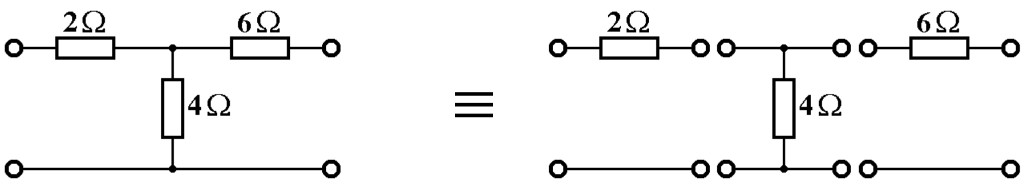
$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{I}_1 = 0{,}2 \cdot e^{j \cdot \pi/6}\ \mathrm{A}}$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}} \cdot \underline{I}_1 = \frac{4\,j}{8} \cdot e^{j \cdot \pi/6}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{I}_2 = 0{,}1 \cdot e^{j \cdot 2\pi/3}\ \mathrm{A}}$$

EXERCICE XII.4 : SCHÉMA EN T

Calculons d'abord la matrice de chaîne (transmission) :



$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 22/2 \\ 1/4 & 5/2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 1$$

$$[\mathrm{Y}] = \begin{bmatrix} \mathrm{D}/\mathrm{B} & -\Delta/\mathrm{B} \\ -\Delta/\mathrm{B} & \mathrm{A}/\mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/22 & -2/22 \\ -2/22 & 3/22 \end{bmatrix}$$