CORRIGÉ DE LA SÉRIE XI

EXERCICE XI.1 : CIRCUIT RC EN RÉGIME TRANSITOIRE (1)

Considérons d'abord l'intervalle de temps $0 \le t \le 10$ ms.

Durant ce laps de temps, $u(t) \equiv U_1$ (= 20 V)

A₁. $R_1 \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C} i_1 = 0$ Solution : $i_1(t) = Ae^{-t/R_1C}$

Détermination de la constante A, par la condition initiale sur le condensateur :

$$u_C(t=0) = U_1 - R_1 i_1(t=0) = U_1 - R_1 A$$

$$A = \frac{U_1 - u_C(t=0)}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad i_1(t) = \frac{U_1 - u_C(t=0)}{R_1} e^{-t/R_1C} = \underline{30 \cdot e^{-400 \cdot t} \text{ mA}}$$

B₁. $u_C(t) = u(t) - R_1 i_1(t) = U_1 - [U_1 - u_C(t=0)] \cdot e^{-t/R_1C} = \underline{20 - 15 \cdot e^{-400 \cdot t} \text{ V}}$

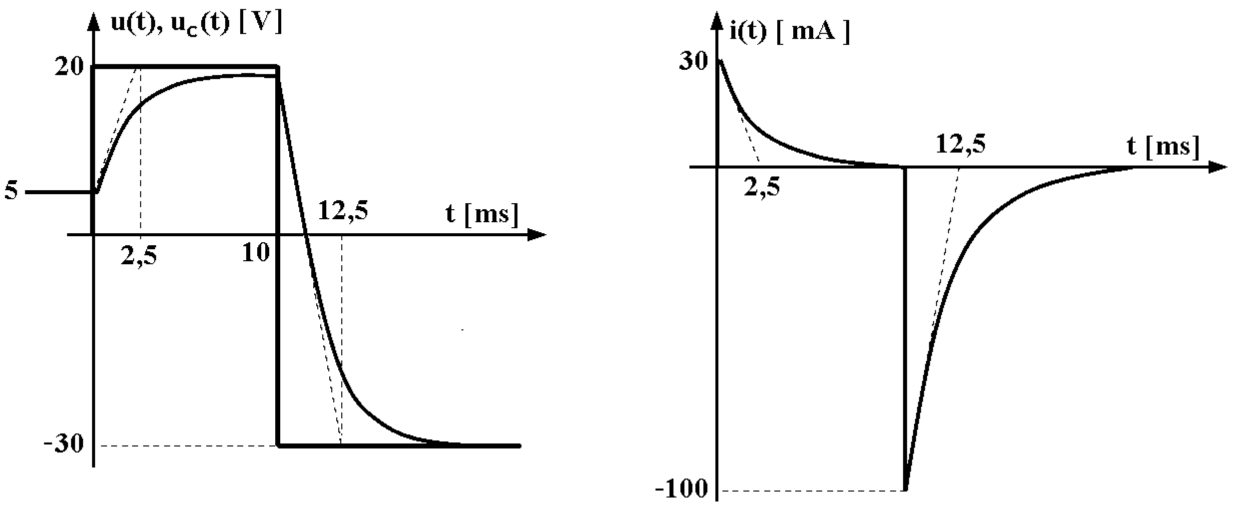
En particulier : $u_C(t = 10 \text{ ms}) = 19.73 \text{ V}$

Considérons maintenant l'intervalle de temps t > 10 ms. On introduit le changement de variable temporelle : t' = t – 10 ms. Durant ce laps de temps, $u(t') \equiv U_2$ (= – 30 V) et la condition initiale sur le condensateur est : $u_C(t'=0) = u_C(t = 10 \text{ ms})$

A₂. $i_1(t') = \dfrac{U_2 - u_C(t'=0)}{R_1} \cdot e^{-t'/R_1C} = \underline{-99{,}45 \cdot e^{-400 \cdot t'} \text{ mA}}$

B₂. $u_C(t') = U_2 - [U_2 - u_C(t'=0)] \cdot e^{-t'/R_1C} = \underline{-30 + 49{,}73 \cdot e^{-400 \cdot t} \text{ V}}$

C.



EXERCICE XI.2 : CIRCUIT RC EN RÉGIME TRANSITOIRE (2)

Considérons d'abord l'intervalle de temps $0 \le t \le 1$ ms.

A. $R_1\, i_1(t) + u_C(t) = U$; $\quad i_1(t) = i_2(t) + i_C(t)$

Or : $i_C(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$; $\quad i_2(t) = \dfrac{u_C(t)}{R_2}$

$$\Rightarrow \quad U = R_1\left(C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{R_2}\right) + u_C(t) \qquad \Rightarrow \quad R_1C\frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\cdot u_C(t) = U$$

Solution homogène : $R_1C\dfrac{du_{C,h}}{dt} + \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)\cdot u_{C,h} = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_{C,h}(t) = A\exp(-t/\tau_1)$

Solution particulière : $u_{C,p}(t) = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2}$

Solution générale : $u_C(t) = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2} + A\exp(-t/\tau_1)$

Condition initiale : $u_C(0) = 0 = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2} + A \qquad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{UR_2}{R_1 + R_2}$

Solution finale: $u_C(t) = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2}\left[1 - \exp(-t/\tau_1)\right]$

Considérons maintenant l'intervalle de temps $1 < t \le 2$ ms. On introduit le changement de variable temporelle : t' = t – 1 ms.

$u_C(t') - R_2\, i_2(t') = 0$; $\quad 0 = i_2(t') + i_C(t')$

$$\Rightarrow \quad u_C(t') + R_2C\frac{du_C}{dt'} = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_C(t') = A\exp(-t'/\tau_2)$$

Condition initiale : $u_C(t'=0) = u_C(t = 1\,\text{ms}) \equiv U_{C,1}$

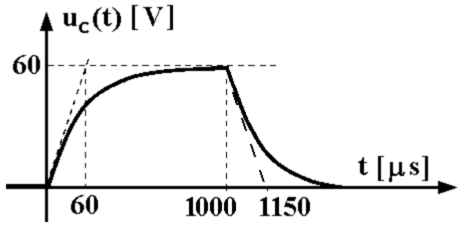
Solution finale : $\boxed{u_C(t') = U_{C,1}\exp(-t'/\tau_2)}$

B. Les constantes de temps sont données par :

$$\tau_1 = \frac{R_1C}{1 + R_1/R_2} = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2} = \underline{60\ \mu\text{s}}$$

et : $\tau_2 = R_2C = \underline{150\ \mu\text{s}}$

On en déduit également : $U_{C,1} = u_C(t = 1\,\text{ms}) \cong \underline{60\ \text{V}}$



EXERCICE XI.3 : CIRCUIT LC EN RÉGIME TRANSITOIRE

Pour t > 0 :

$$u_C(t) = U_o - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau \qquad \text{et :} \qquad u_L(t) = L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

Or $\quad u_C(t) = u_L(t) \quad \Rightarrow \quad U_o - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = L\frac{di}{dt}$ (2)

En dérivant : $L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}\,i(t) = 0$ (3)

Cette équation admet une solution du type : $i(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$ (4)

<u>Détermination des constantes</u>

En introduisant (4) dans (3), on trouve : $\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}$ (5)

Par ailleurs, à l'instant t = 0, on a :

$$\left|\begin{array}{lll} i(t) = 0 & \text{(pas de saut de courant dans l'inductance)} & (6a) \\ u_L(t) = L\frac{di}{dt} = u_C(t) = U_o & \text{(pas de saut de tension sur le condensateur)} & (7a) \end{array}\right.$$

Autrement dit :

$$\left|\begin{array}{ll} A\sin\varphi = 0 & (6b) \\ LA\omega\cos\varphi = U_o & (7b) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \quad \varphi = 0 \qquad$ et $\qquad A = \frac{U_o}{L\omega} = U_o\sqrt{\frac{C}{L}}$

Finalement, pour t > 0, le courant est donné par :

$$\boxed{i(t) = U_o\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}\cdot t\right)}$$

<u>Remarque</u> : dans un tel circuit, dépourvu de toute résistance, les oscillations peuvent se maintenir indéfiniment. Dans un circuit réel, la présence de résistances (fils, élément inductif) produirait un amortissement des oscillations.