Circuits et Systèmes I
Chapitre 9: Circuits en Régime Transitoire

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

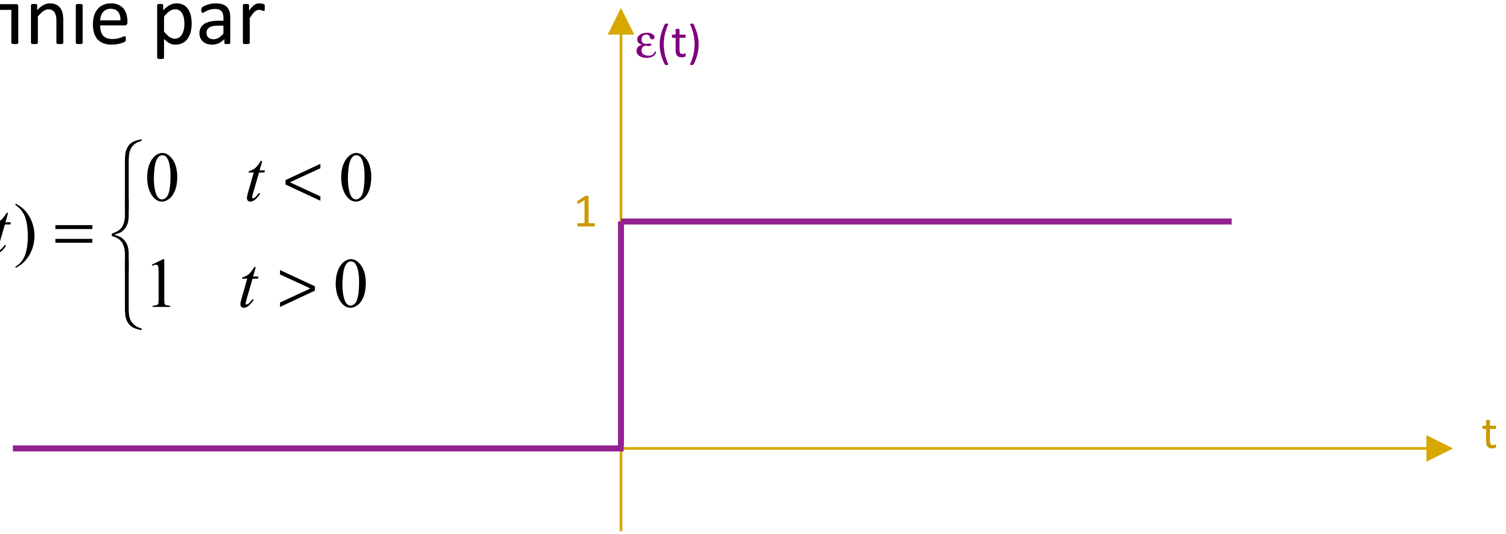
Régimes transitoires

- Un régime transitoire correspond à une variation brusque des grandeurs internes ou externes d'un circuits électrique. Les cas les plus fréquents correspondent à un enclenchement ou un déclenchement.
- Le comportement d'un circuit linéaire comprenant des éléments résistifs, inductifs et capacitifs est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- La résolution de cette équation conduit, dans le cas général, à un terme ***permanent*** (solution particulière) qui est de même forme que l'excitation (continue ou sinusoïdale), et un terme ***transitoire*** (solution générale de l'équation homogène) qui tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Réponse indicielle

- La fonction saut unité ou échelon unité est définie par

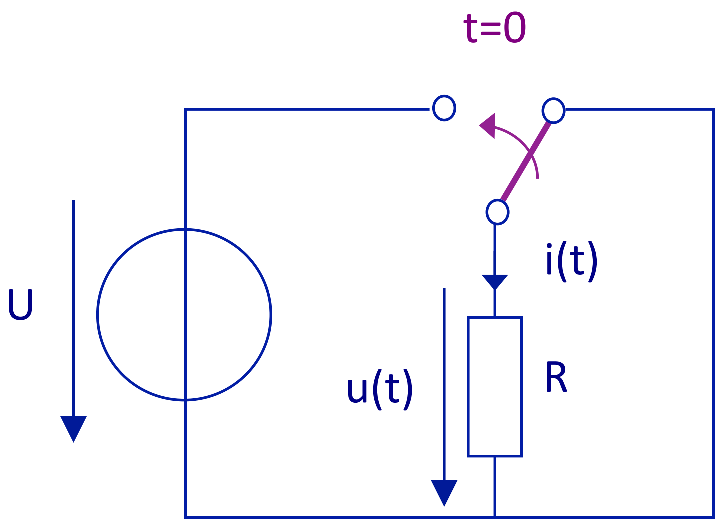
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

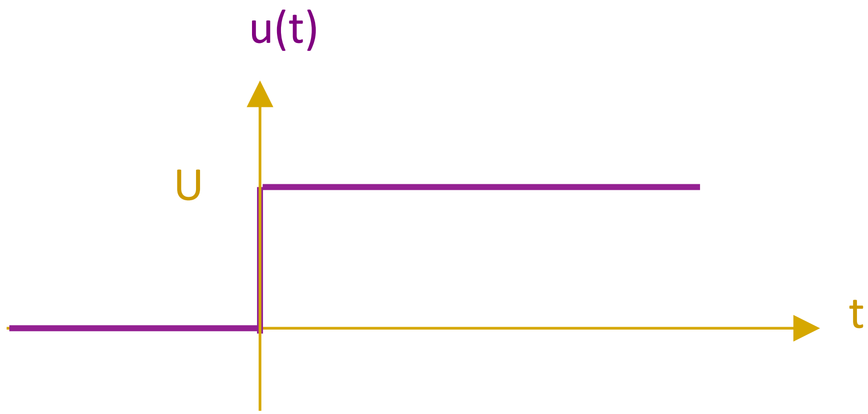


- Réponse indicielle d'un circuit: réponse à un saut de tension ou de courant

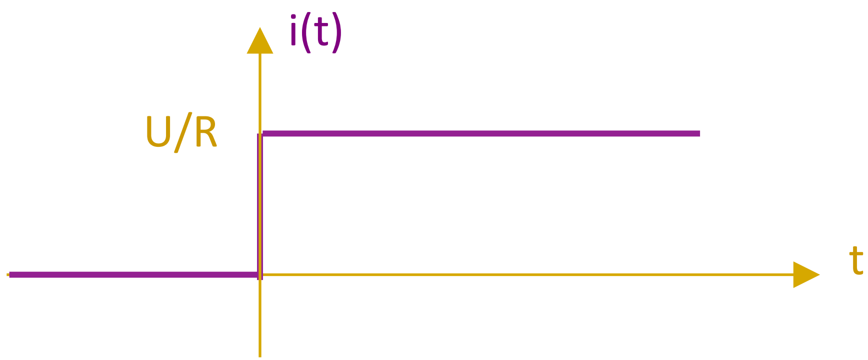
Réponse indicielle: Résistance R

- Saut de tension



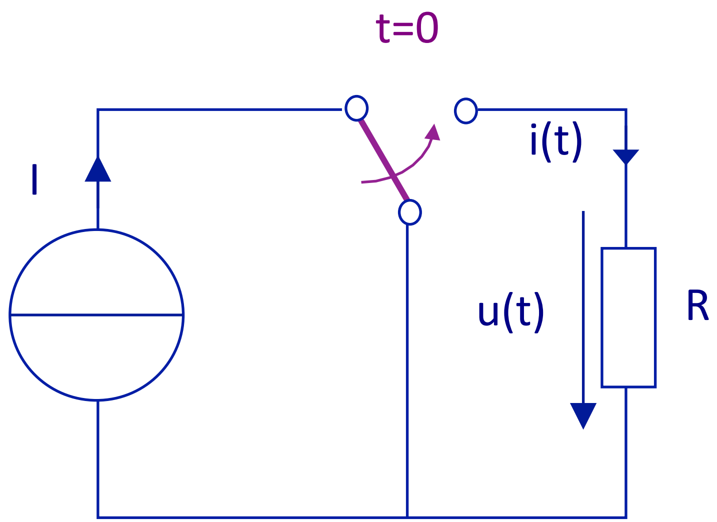


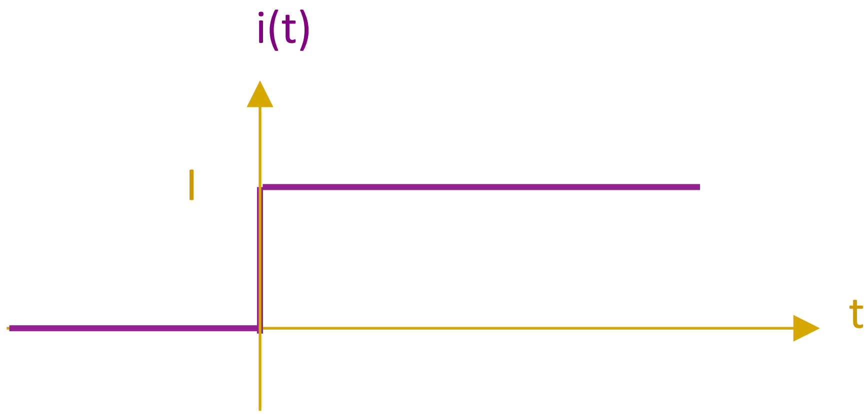
$$i(t)=\frac{u(t)}{R}=\frac{U\varepsilon(t)}{R}=\frac{U}{R}\varepsilon(t)$$



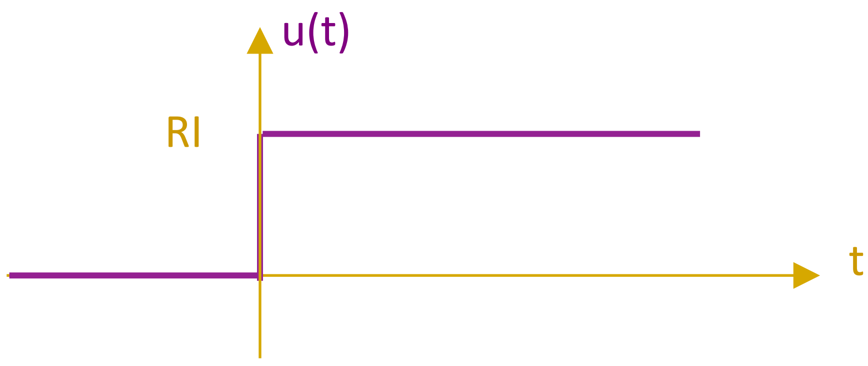
Réponse indicielle: Résistance R

- Saut de courant



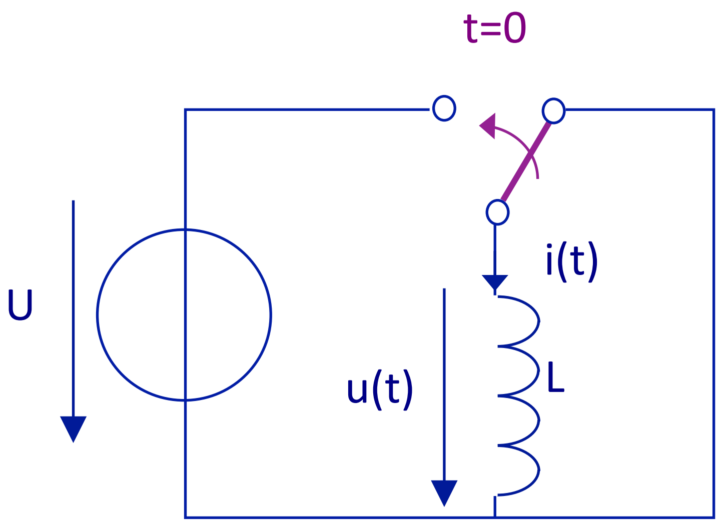


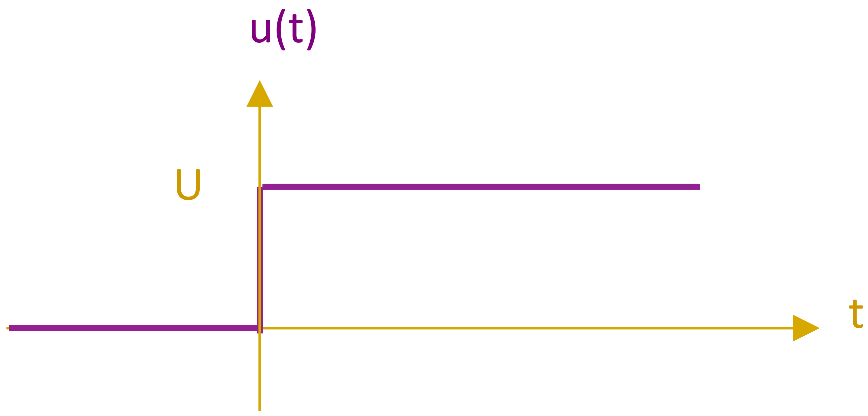
$$u(t) = Ri(t) = RI\varepsilon(t)$$



Réponse indicielle: Inductance L

- Saut de tension





Réponse indicielle: Inductance L
Saut de tension

- équation caractéristique de l'inductance

$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

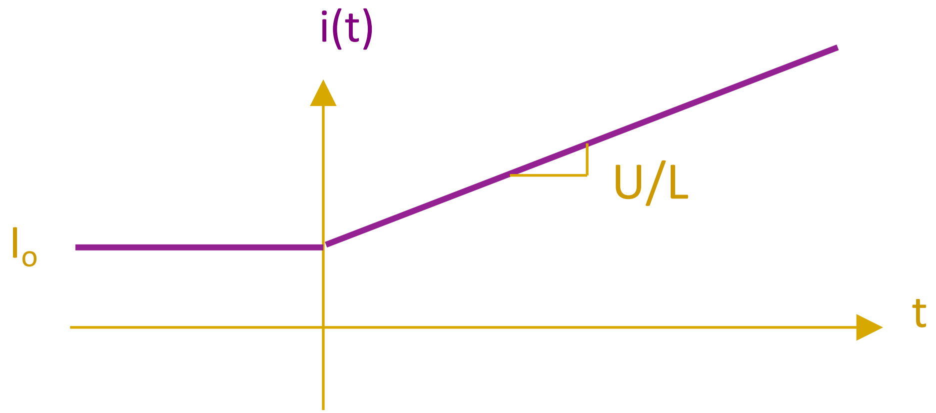
Condition initiale: $i(0) = I_o$

$$\Rightarrow \quad i(t) = I_o + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$$

Réponse indicielle: Inductance L
Saut de tension

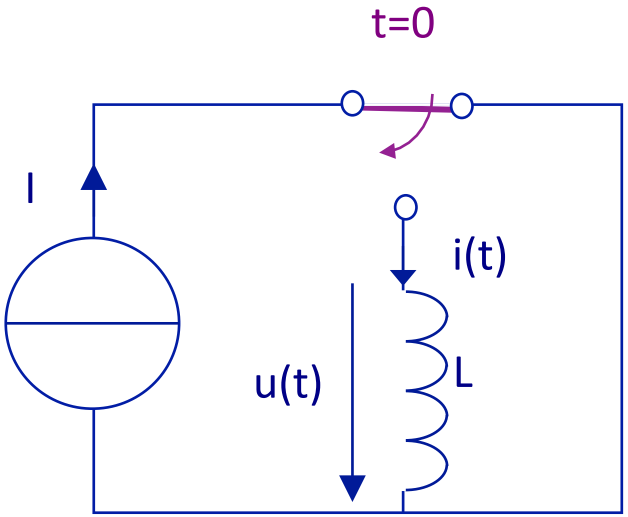
$$i(t) = I_o + \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau$$

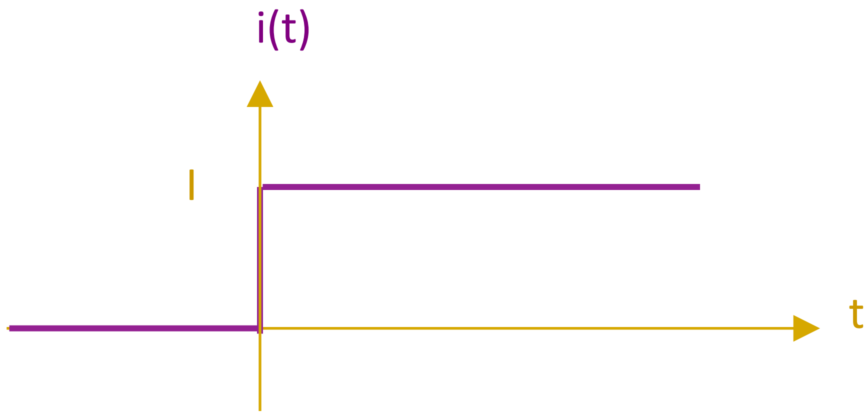
$$= I_o + \frac{1}{L}\int_0^t U\varepsilon(\tau)d\tau = I_o + \frac{Ut}{L} \qquad \text{pour } t > 0$$



Réponse indicielle: Inductance L

- Saut de courant





Réponse indicielle: Inductance L
Saut de courant

- équation caractéristique de l'inductance

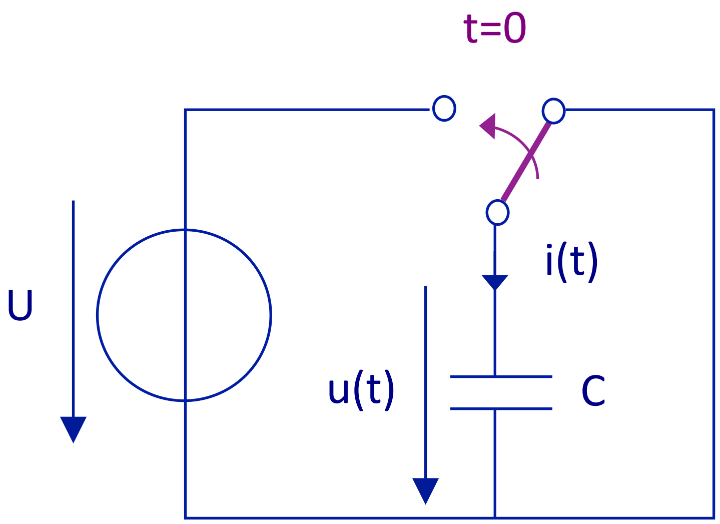
$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

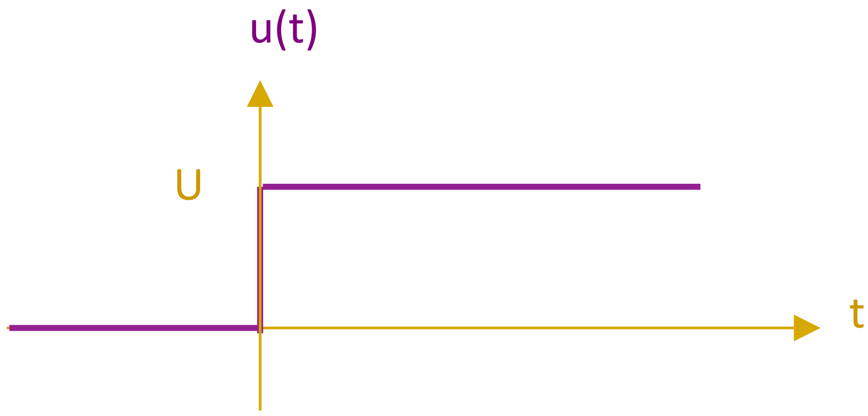
$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = 0 & t < 0 \quad \text{et} \quad t > 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} u(t) = \infty & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Un saut de courant au travers d'une inductance est impossible

Réponse indicielle: Capacité C

- Saut de tension





Réponse indicielle: Capacité C
Saut de tension

- équation caractéristique d'une capacité

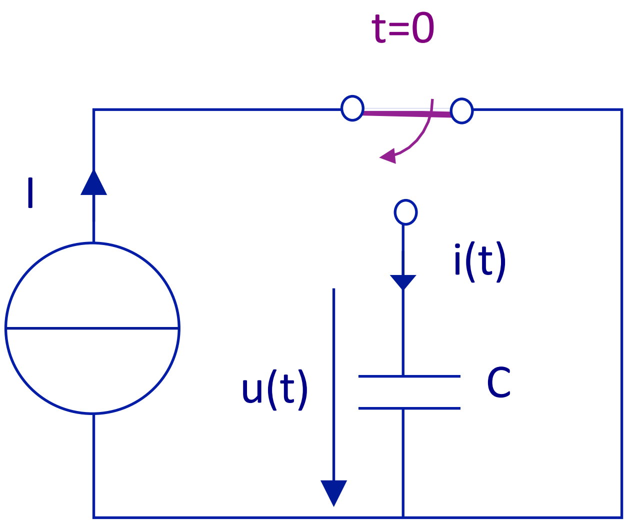
$$i(t) = C\frac{du}{dt}$$

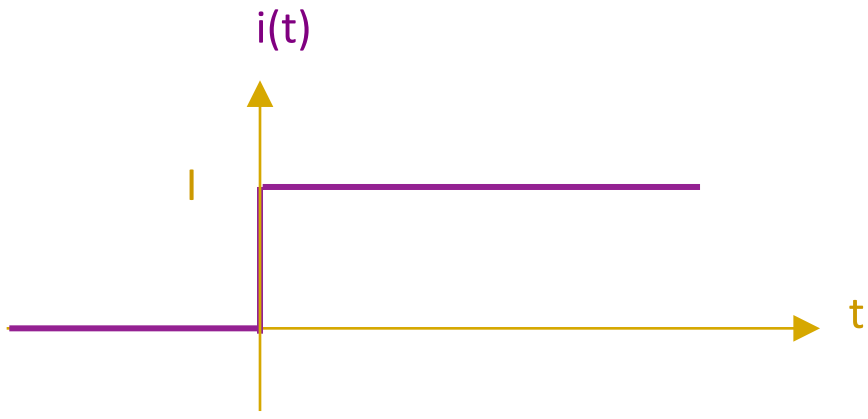
$$\Rightarrow \begin{cases} i(t) = 0 \qquad t < 0 \quad \text{et} \quad t > 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} i(t) = \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Un saut de tension au travers d'un condensateur est impossible

Réponse indicielle: Capacité C

- Saut de courant

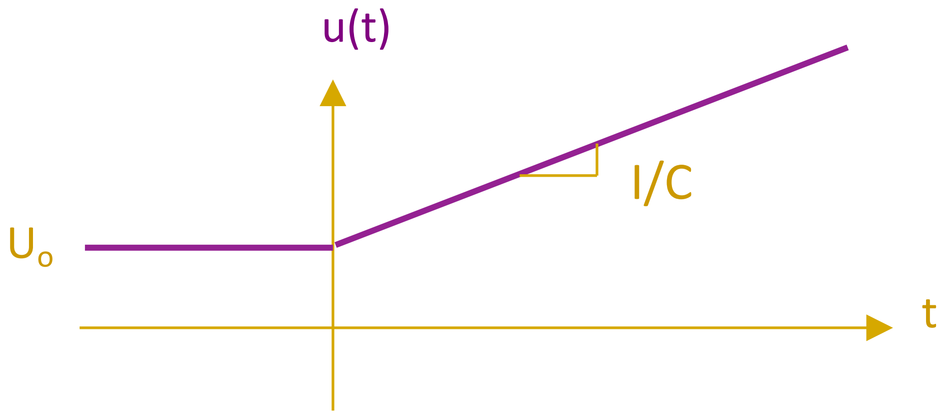




Réponse indicielle: Capacité C
Saut de courant

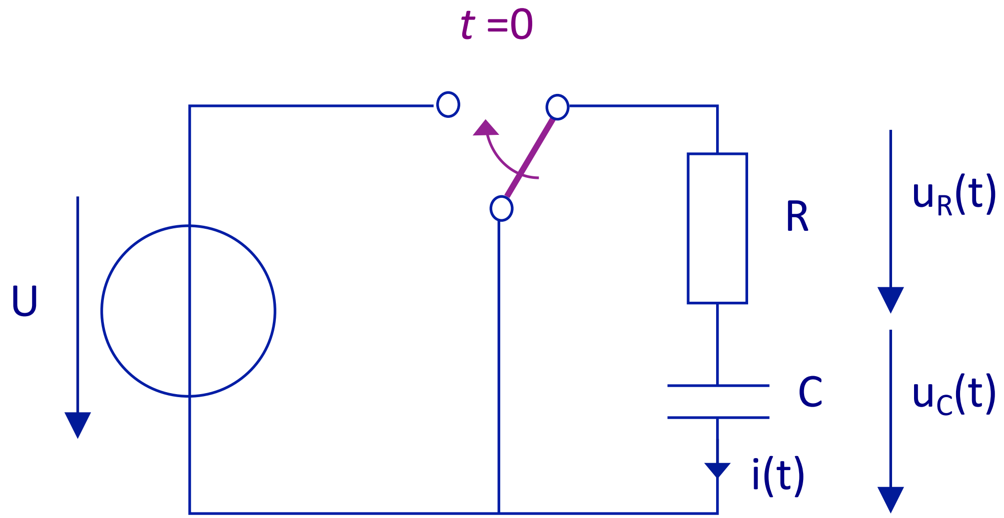
$$u(t) = U_o + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$= U_o + \frac{1}{C}\int_0^t I\varepsilon(\tau)d\tau = U_o + \frac{It}{C} \qquad \text{pour } t > 0$$



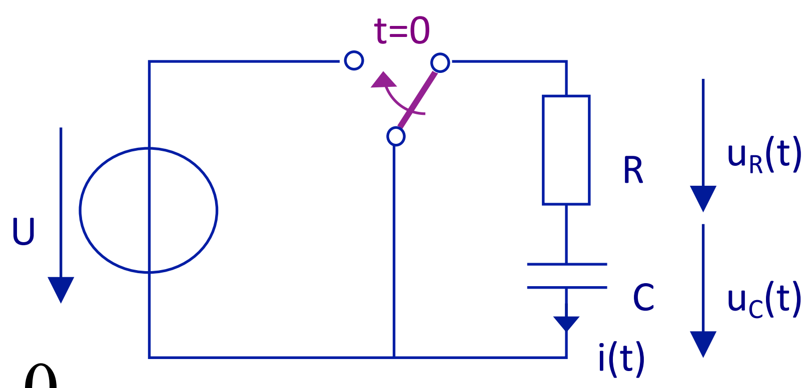
Réponse indicielle: circuit RC

Considérons un circuit RC série où la tension passe brusquement de la valeur zéro à la valeur U, au temps t = 0



Condition initiale: $u_C(0) = U_o$

Réponse indicielle: circuit RC
Équations du circuit



$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$u_C(t) = U_o + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$u = u_R + u_C = U \quad \text{pour } t > 0$$

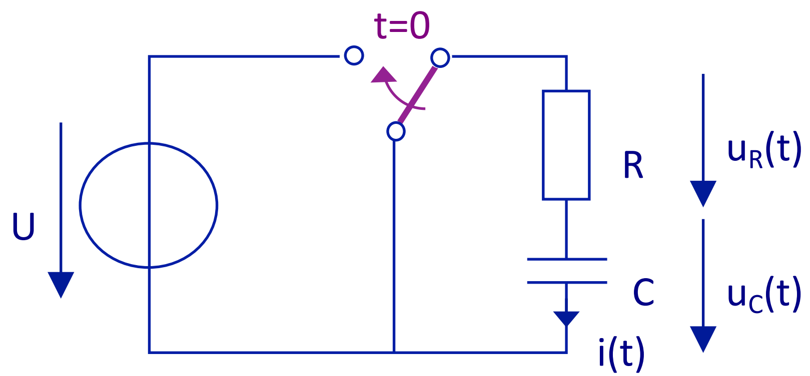
$$U = Ri + U_o + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad \text{pour} \quad t > 0$$

En dérivant par rapport au temps:

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

Réponse indicielle: circuit RC
Équations du circuit

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$



$$\Rightarrow \quad i(t)=Ae^{-t/RC}$$

<u>Détermination de *A*:</u>

Condition initiale: $u_C(0)=U_o$

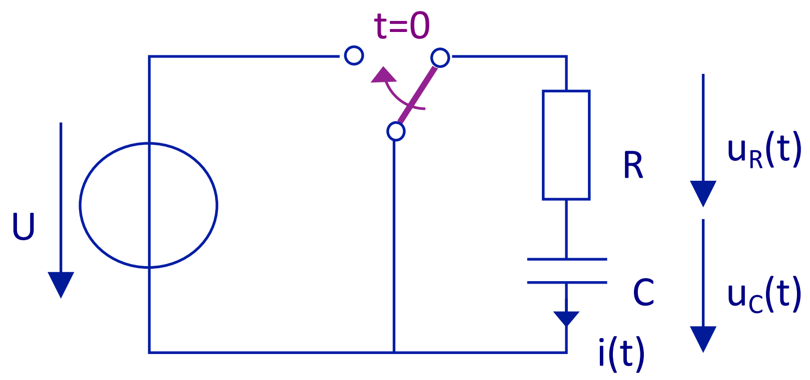
$$u_C=u-Ri=U-RAe^{-t/RC}$$

$$u_C(0)=U-RA=U_o \quad \Rightarrow \quad A=\frac{U-U_o}{R}$$

Réponse indicielle: circuit RC
Solution pour le courant

Solution:

$$i(t) = \frac{U - U_o}{R} e^{-t/RC}$$



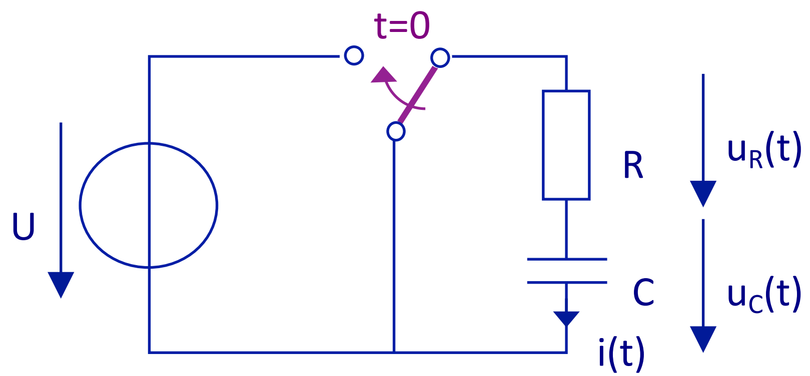
Définition: Constante de temps

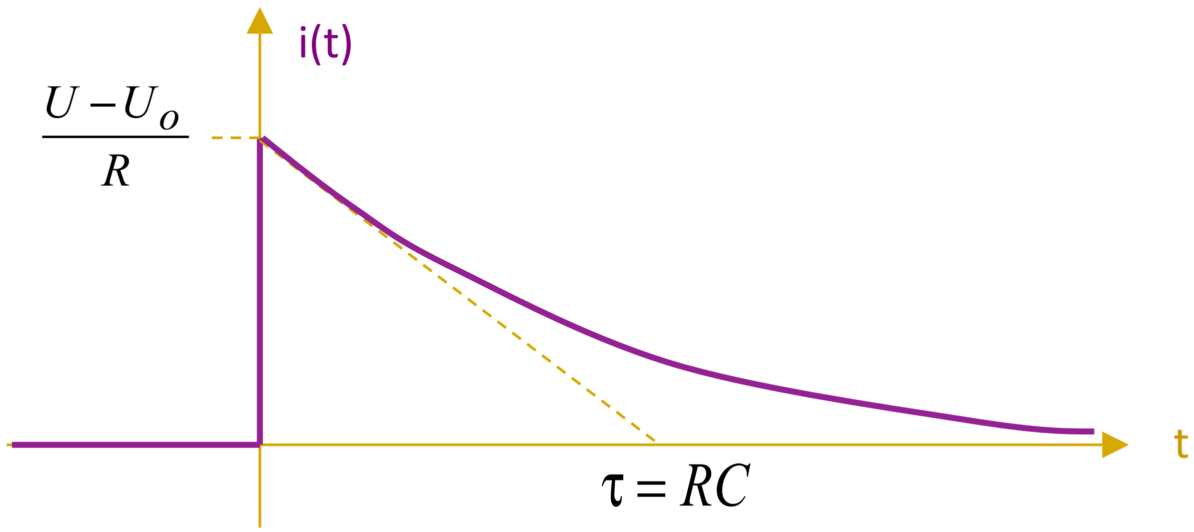
$$\tau = RC$$

Pour $t = \tau$, il y a un amortissement du courant dans un rapport 1/e. La tangente à l'origine coupe la valeur stabilisée à une abscisse $t = \tau$.

Réponse indicielle: circuit RC
Courant

$$\boxed{i(t) = \frac{U - U_o}{R} e^{-t/\tau}}$$

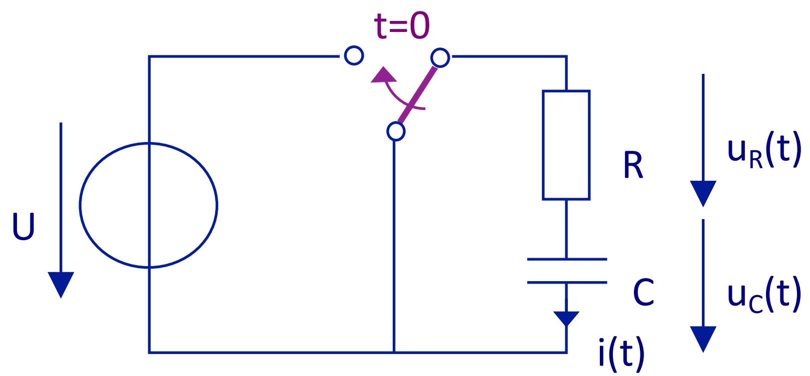


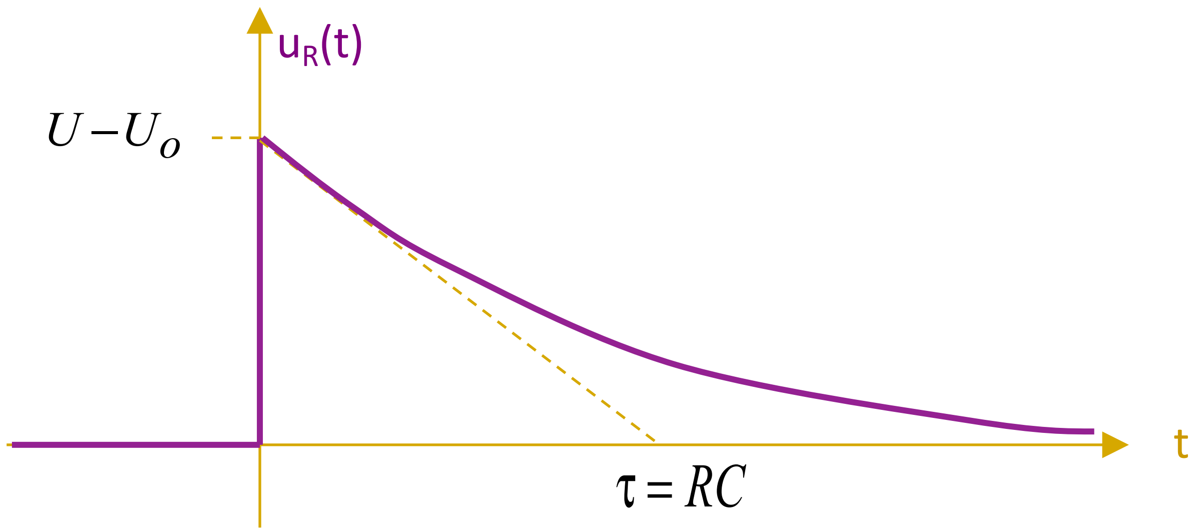


Réponse indicielle: circuit RC

Tension aux bornes de R

$$u_R = Ri(t) = (U - U_o)e^{-t/\tau}$$

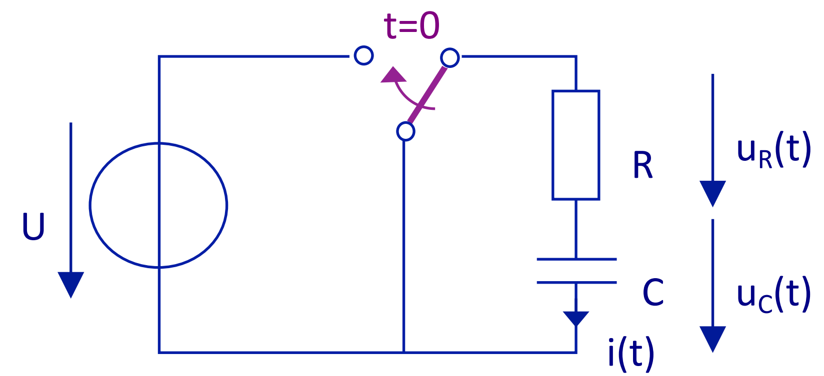


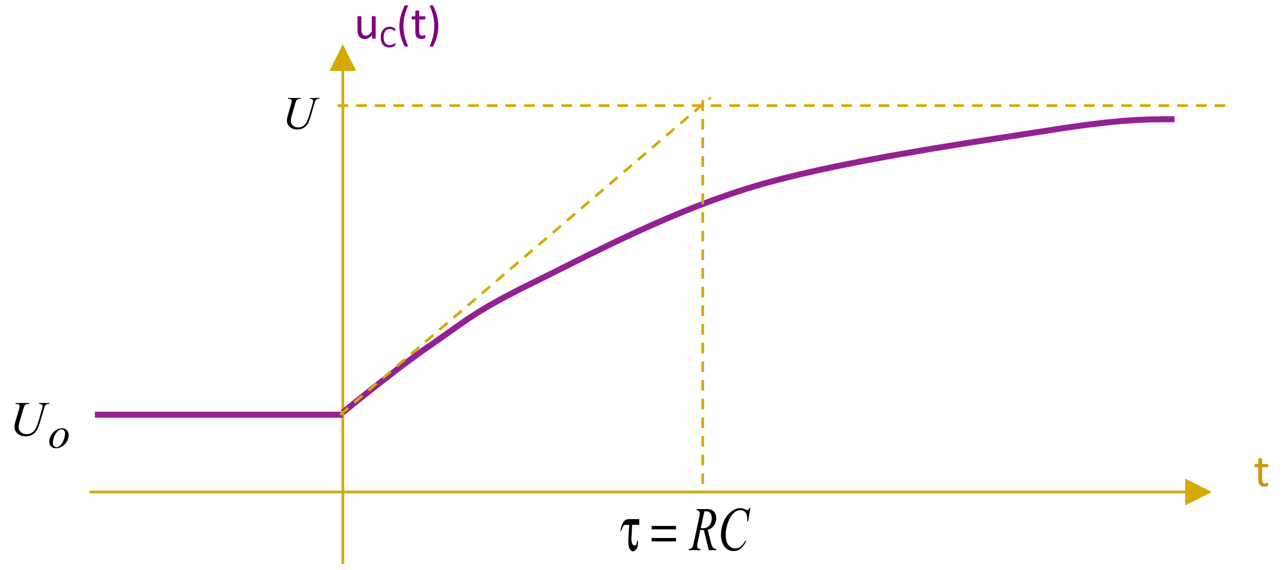


Réponse indicielle: circuit RC
Tension aux bornes de C

$$u_C = u - u_R$$

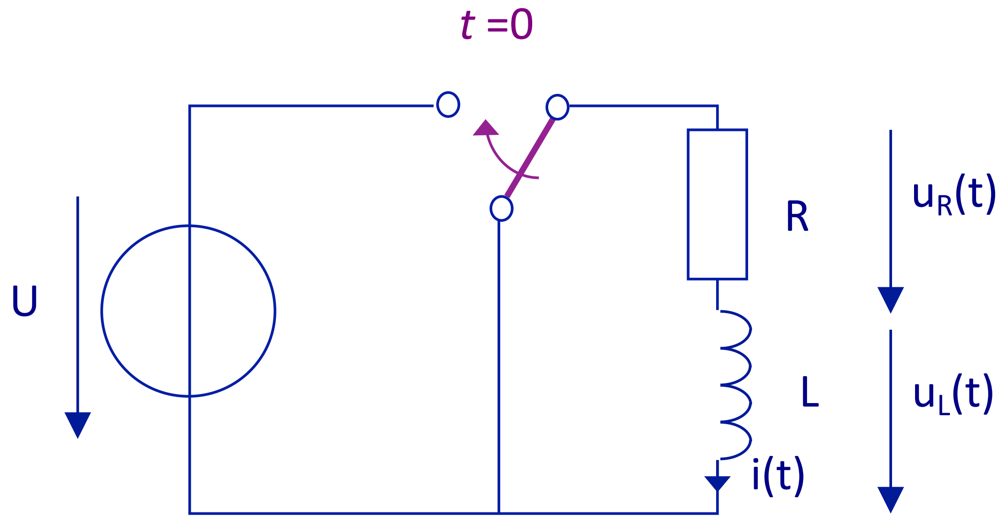
$$= U - (U - U_o)e^{-t/\tau}$$





Réponse indicielle: circuit RL

Considérons un circuit RL série où la tension passe brusquement de la valeur zéro à la valeur U, au temps *t* = 0



Condition initiale: $$i_L(0) = I_o$$

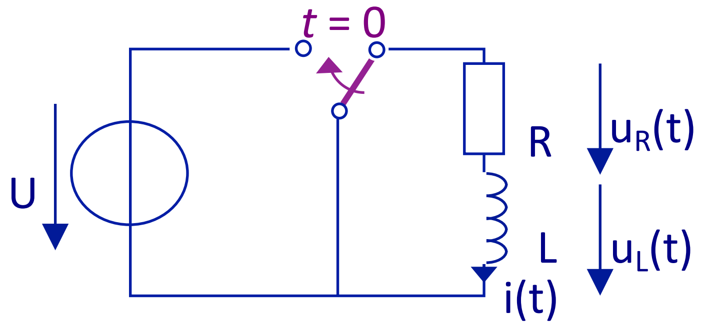
Réponse indicielle: circuit RL
Équations du circuit

$$u_R = Ri$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

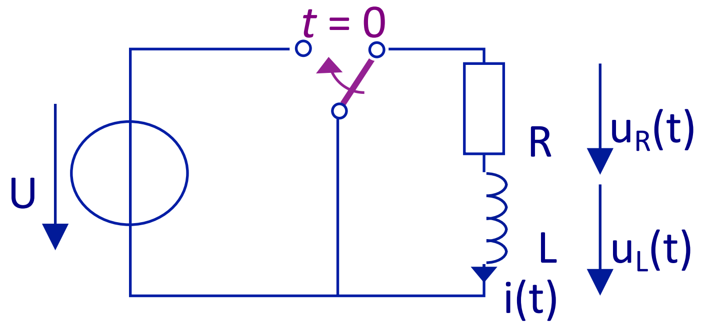
$$u = u_R + u_L = U \quad \text{pour } t > 0$$

$$\Longrightarrow \quad Ri + L\frac{di}{dt} = U$$



Réponse indicielle: circuit RL
Solution pour le courant

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U$$



Solution permanente:

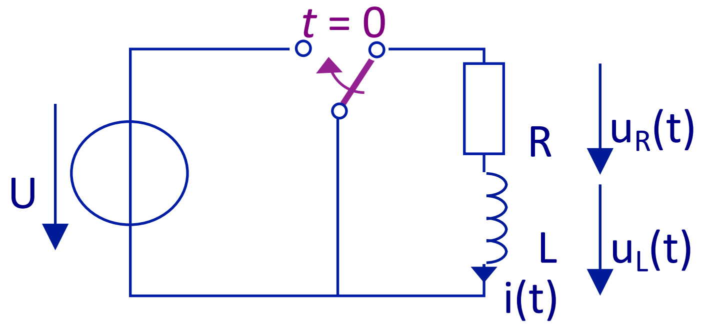
$$i_p = \frac{U}{R}$$

Solution sans second membre: $i_h = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

Solution générale: $i(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$

Réponse indicielle: circuit RL
Solution pour le courant

$$i(t) = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$



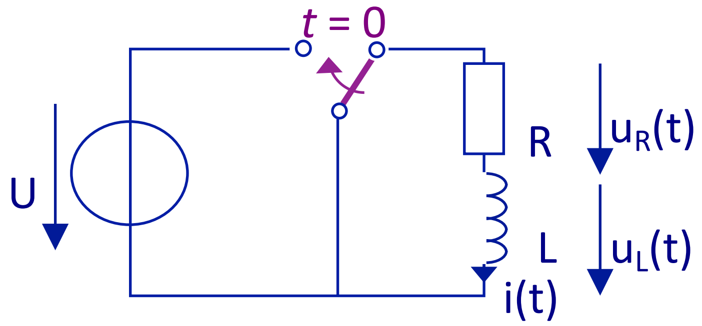
Pas de saut de courant à l'enclenchement:

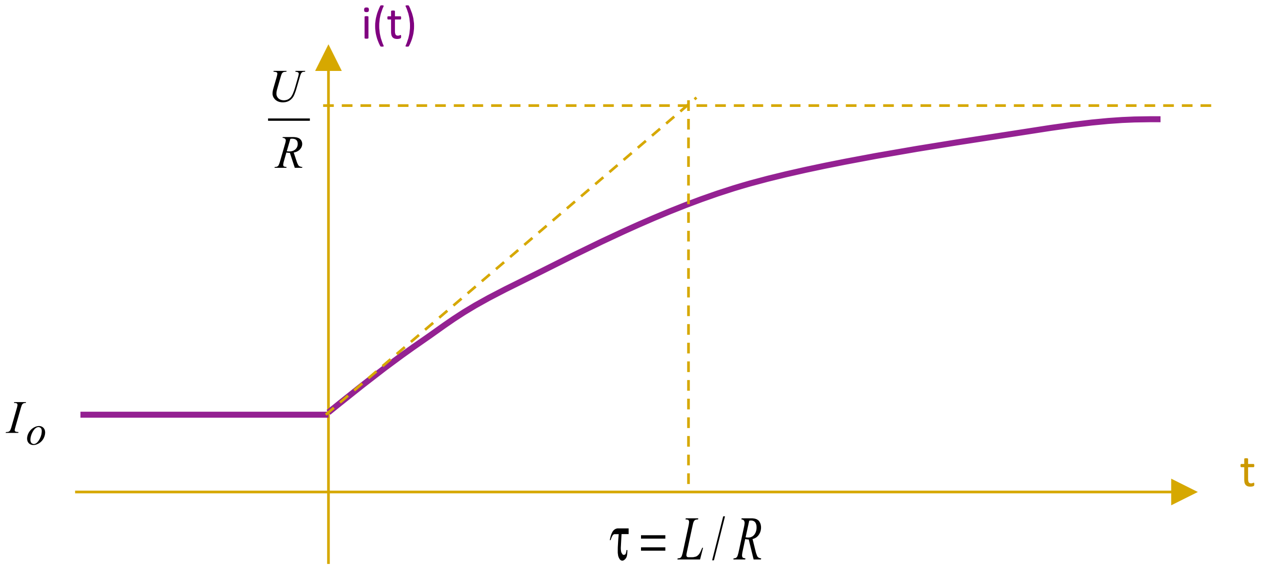
$$I_o = \frac{U}{R} + A \quad \Rightarrow \quad A = I_o - \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{U}{R} + \left(I_o - \frac{U}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Réponse indicielle: circuit RL
Courant

$$\boxed{i(t) = \frac{U}{R} + \left(I_o - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}}$$

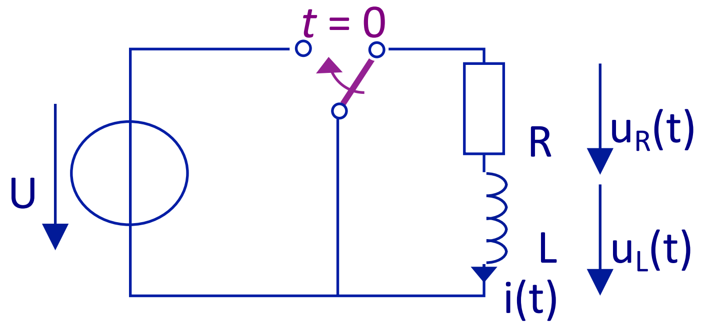


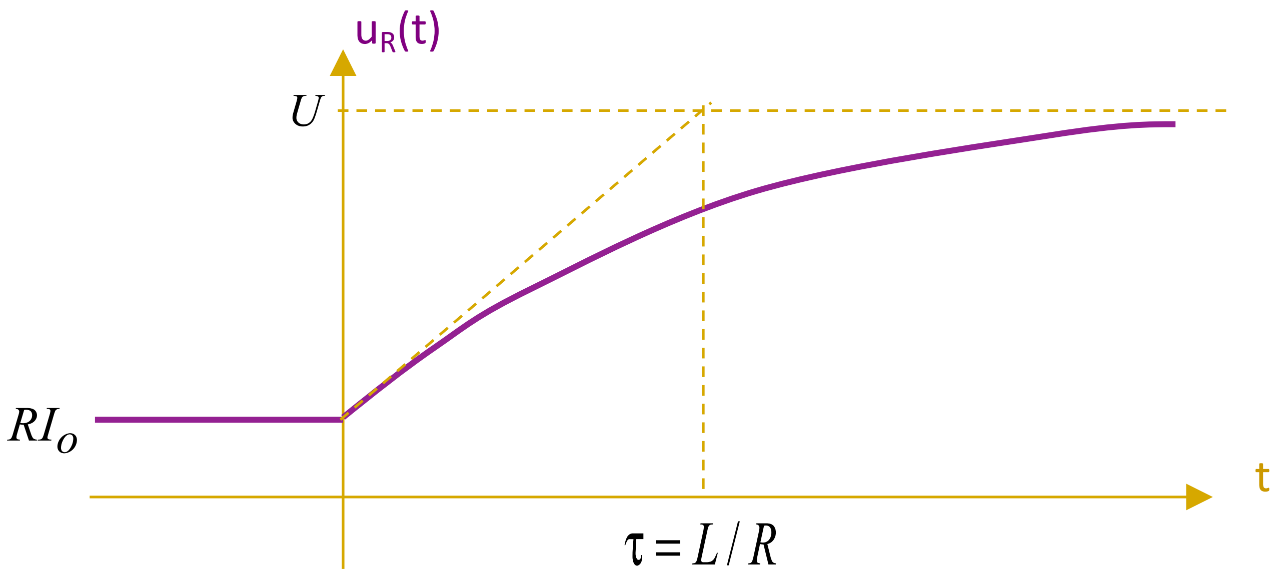


Réponse indicielle: circuit RL

Tension aux bornes de R

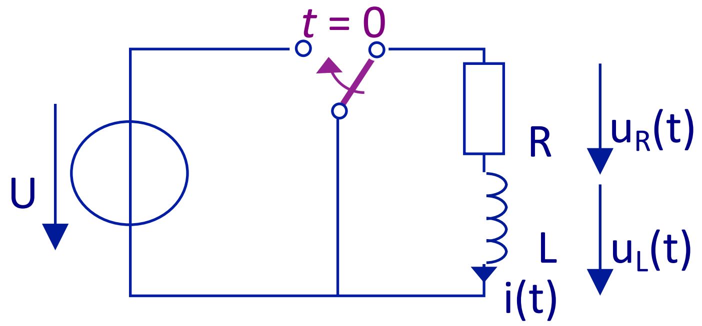
$$u_R(t) = Ri(t) = U + \left(RI_o - U\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

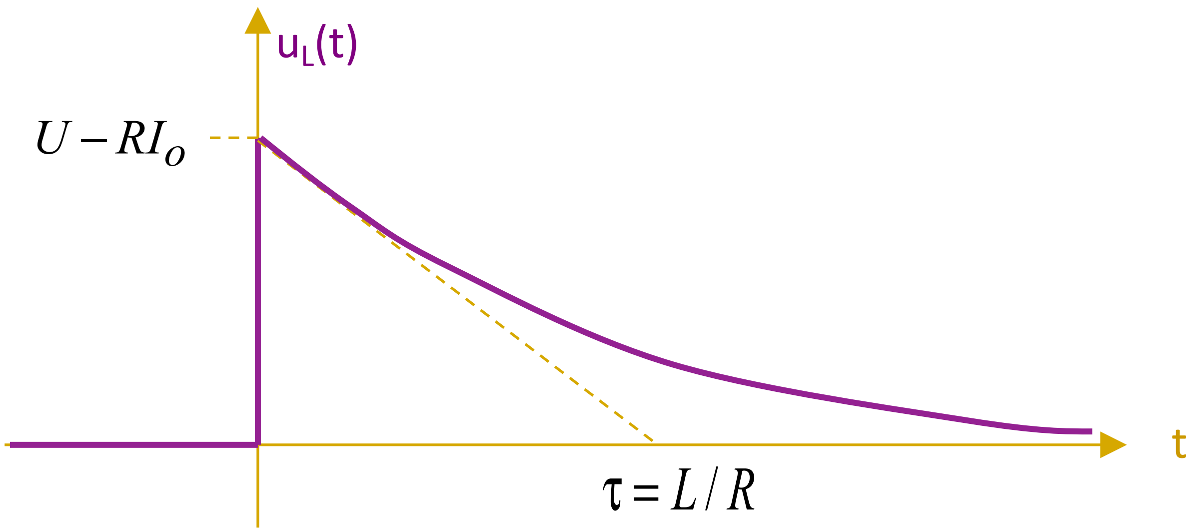




Réponse indicielle: circuit RL
Tension aux bornes de L

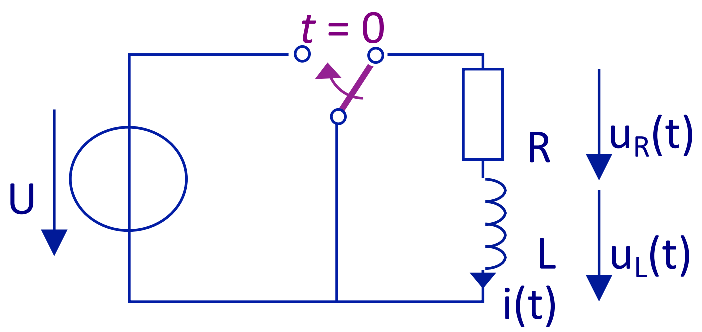
$$u_L(t) = U - Ri(t) = \left(U - RI_o\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$





Circuit RL: enclenchement sur une source sinusoïdale

Pour un enclenchement sur une source de tension sinusoïdale (avec conditions initiales nulles), seule la composante permanente est modifiée. Elle est donnée par le calcul complexe associé au circuit:



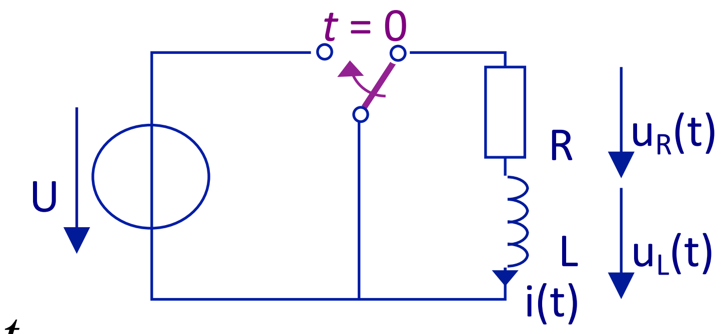
$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L = Ze^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad i_p(t) = \sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\cos(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Circuit RL: enclenchement sur une source sinusoïdale



La solution générale

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

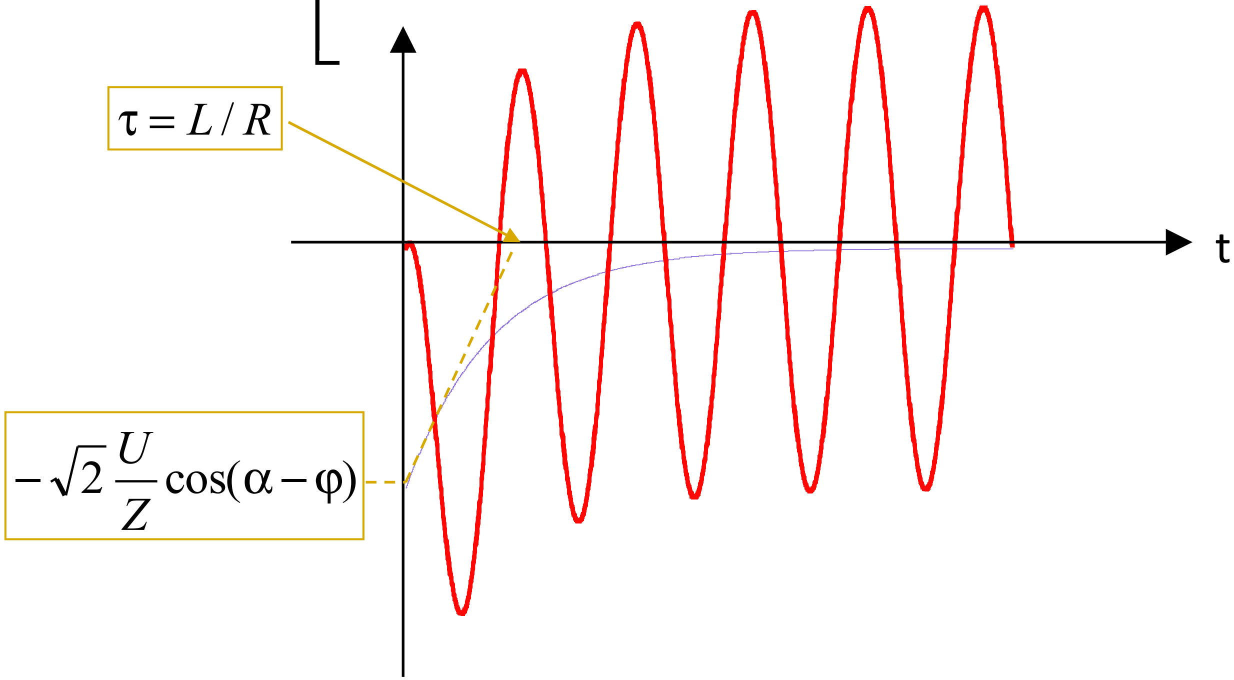
$$= \sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\cos(\omega t + \alpha - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t}$$

A l'enclenchement, $i(0)=0$: $\quad A = -\sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\cos(\alpha - \varphi)$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\left[\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - \cos(\alpha - \varphi)\,e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

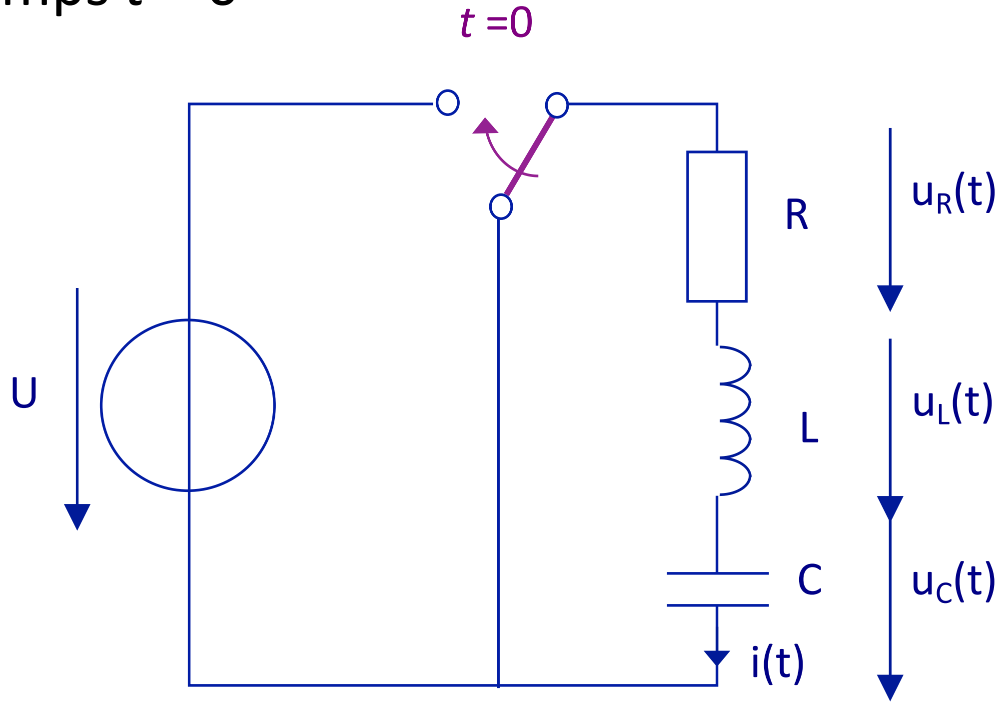
Circuit RL: enclenchement sur une source sinusoïdale

$$i(t) = \sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\left[\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - \cos(\alpha - \varphi)\,e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Régimes transitoires: Réponse indicielle d'un circuit RLC

Considérons un circuit RLC série où la tension passe brusquement de la valeur zéro à la valeur constante U, au temps t = 0



Conditions initiales:

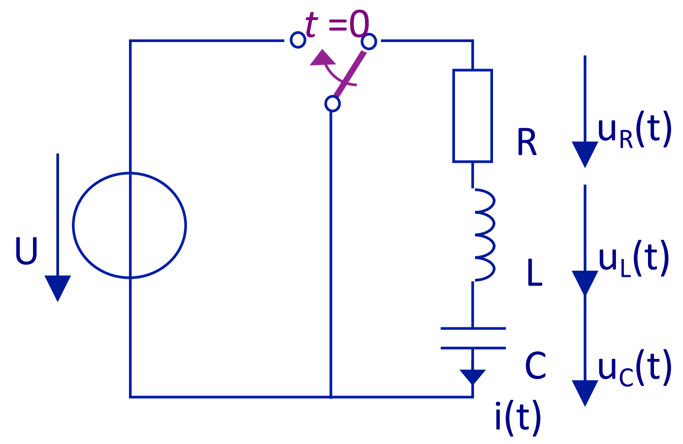
$$i(0) = I_o$$

$$u_C(0) = U_{Co}$$

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

$$U = u_R + u_L + u_C$$

$$= Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + U_{Co}$$

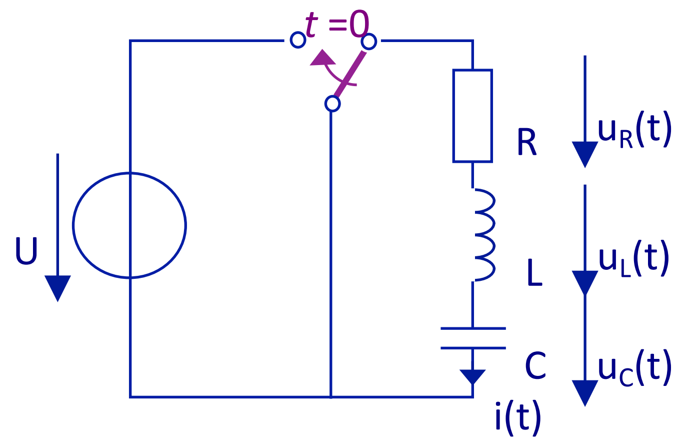


En dérivant par rapport au temps et en considérant que pour
Des temps positifs, dU/dt=0, on obtient

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$$



On introduit la pulsation propre du circuit ω_o et le facteur de qualité Q:

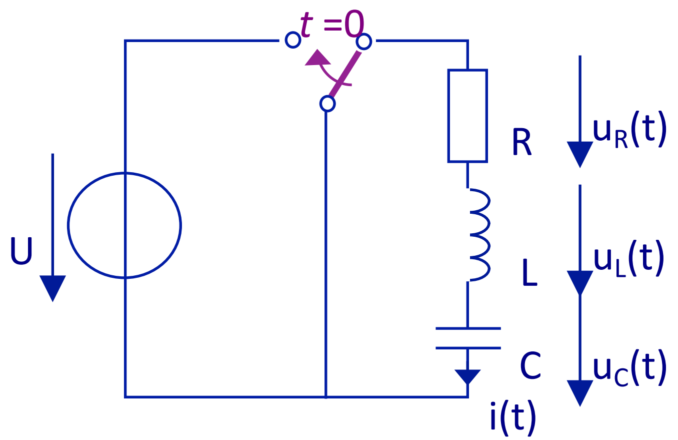
$$\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q=\frac{\omega_o L}{R}$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{\omega_o}{Q}\frac{di}{dt}+\omega_o^2 i=0$$

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$$



L'équation caractéristique:

$$X^2 + \frac{\omega_o}{Q} X + \omega_o^2 = 0$$

dont le discriminant est:

$$\Delta = \frac{\omega_o^2}{Q^2} - 4\omega_o^2 = \omega_o^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

On distingue alors 3 régimes:

Cas 1: Régime pseudopériodique $\Delta < 0$ c.à.d. $Q > 1/2$

L'équation caractéristique
admet deux racines complexes: $X_{\pm} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j\omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

La solution *i*(*t*) a donc la forme:

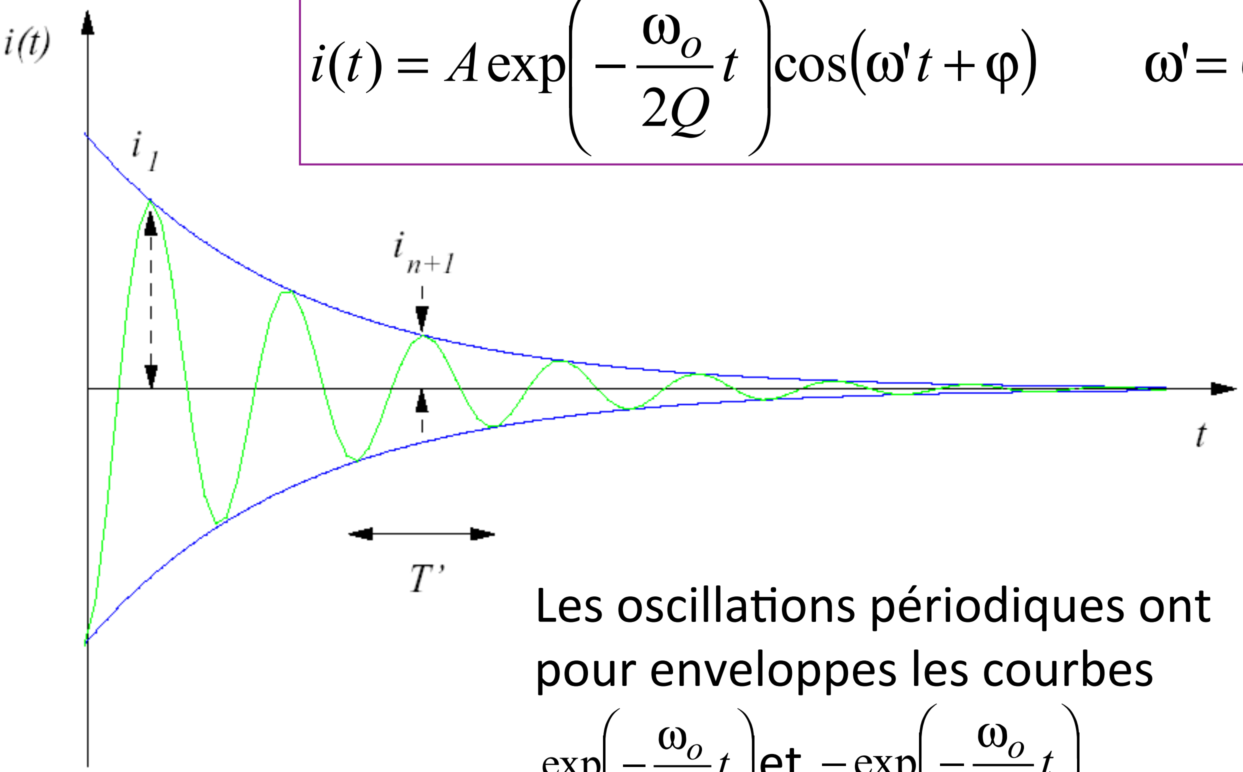
$$\boxed{i(t) = A\exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)\cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

Cas 1: Régime pseudopériodique $\Delta < 0$ c.à.d. $Q > 1/2$

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)\cos(\omega' t + \varphi) \qquad \omega' = \omega_o\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$



Les oscillations périodiques ont pour enveloppes les courbes $\exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)$ et $-\exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)$

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

<u>Cas 2: Régime critique</u> $\Delta = 0$ c.à.d. $Q = 1/2$

Cette condition correspond à une valeur particulière de la résistance

$$R_c = 2\sqrt{L/C}$$

L'équation caractéristique admet une racine double $X_{\pm} = \omega_o$

La solution *i*(*t*) a donc la forme:

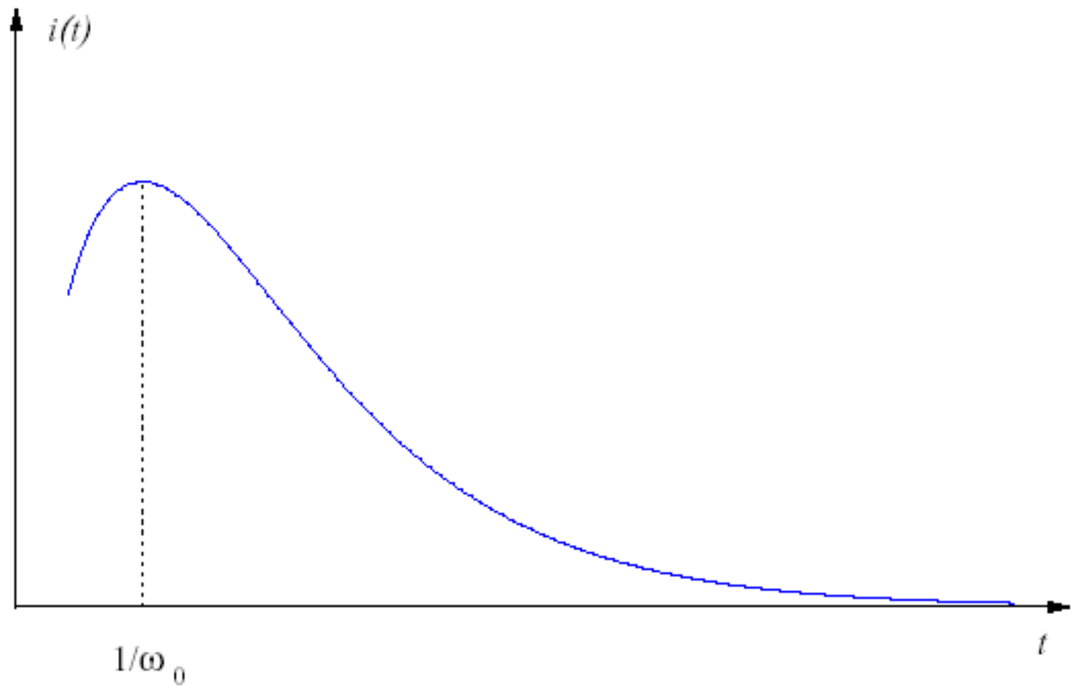
$$\boxed{i(t) = \left(A_1 t + A_2\right)\exp\left(-\omega_o t\right)}$$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

<u>Cas 2: Régime critique</u> $\Delta = 0$ c.à.d. $Q = 1/2$

$$\boxed{i(t) = \left(A_1 t + A_2\right)\exp\left(-\omega_o t\right)}$$



Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

Cas 3: Régime apériodique $\Delta > 0$ c.à.d. $Q < 1/2$

L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles négatives:

$$X_{\pm} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm \omega_o \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

La solution générale *i*(*t*) s'écrit alors

$$\boxed{i(t) = A_1 \exp(X_+ t) + A_2 \exp(X_- t)}$$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales

Régimes transitoires:
Réponse indicielle d'un circuit RLC

<u>Cas 3: Régime apériodique</u> $\Delta > 0$ c.à.d. $Q < 1/2$

$$\boxed{i(t) = A_1 \exp\left(X_+ t\right) + A_2 \exp\left(X_- t\right)}$$