Circuits et Systèmes I
Chapitre 7: Circuits en Régime Sinusoïdal 4

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

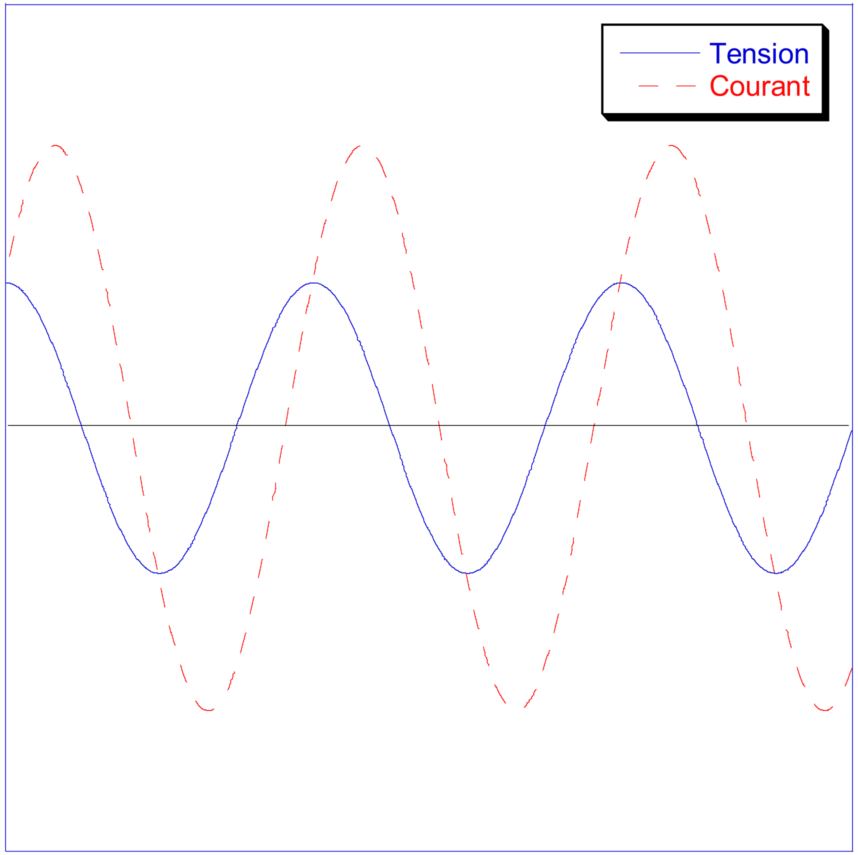
Circuits en régime sinusoïdal 4

- Puissance instantanée en régime sinusoïdal
- Puissance active P
- Puissance réactive Q
- P et Q pour une résistance, une inductance, une capacité
- P et Q pour une impédance
- Puissance apparente S
- Facteur de puissance
- Correction du facteur de puissance
- Exemple

Puissance instantanée en régime sinusoïdal

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$$

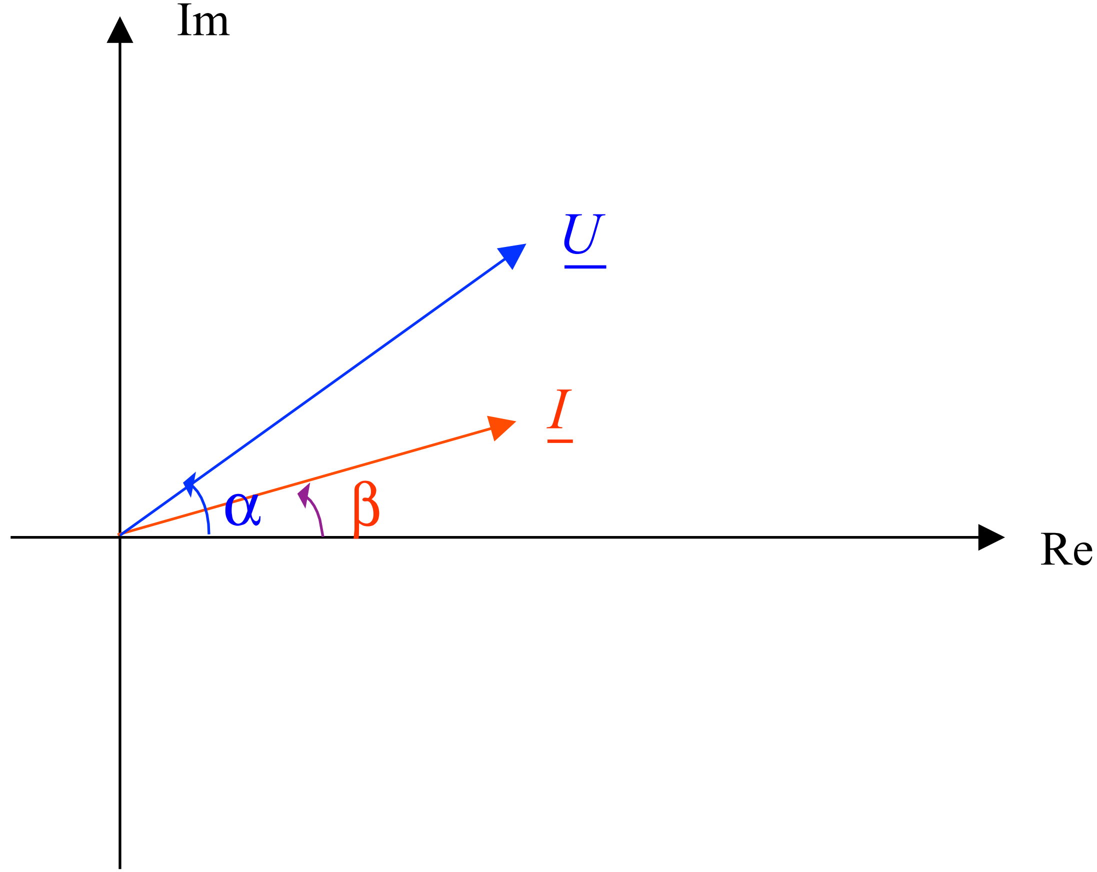
$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta)$$



Puissance instantanée en régime sinusoïdal

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$



Puissance instantanée en régime sinusoïdal

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta)$$

La puissance instantanée:

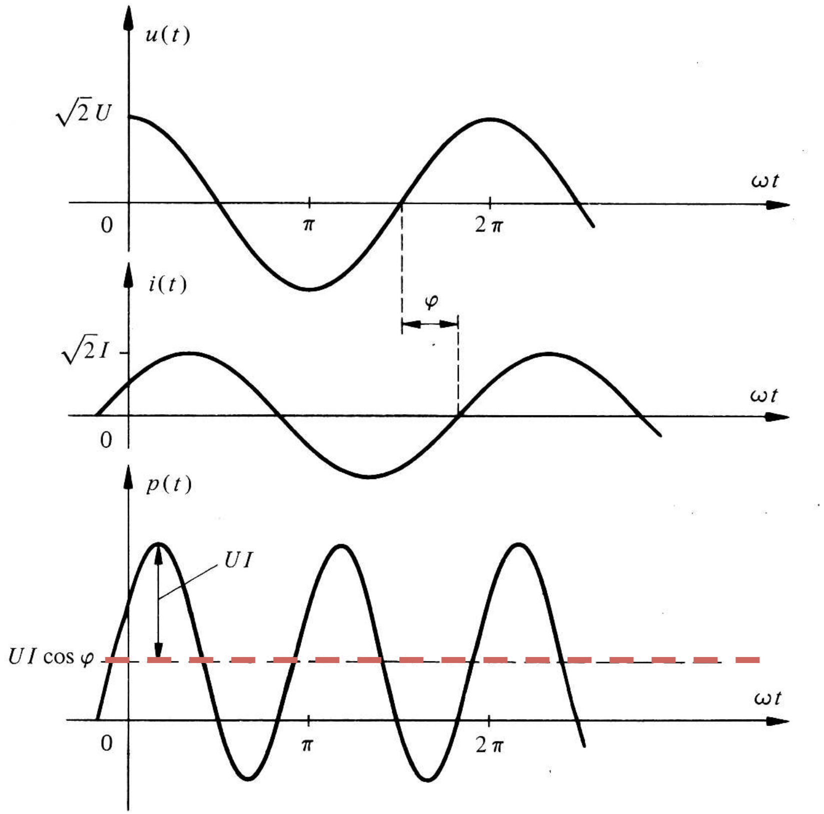
$$\begin{aligned} p(t) = u(t)i(t) &= 2UI\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) \\ &= UI\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right] \\ &= \underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{Composante constante}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)}_{\text{Composante sinusoïdale (fréquence double)}} \end{aligned}$$

Puissance instantanée en régime sinusoïdal

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta)$$

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$



Puissance instantanée en régime sinusoïdal

En utilisant l'identité trigonométrique suivante:

$$\cos(2\omega t+\alpha+\beta)=\cos(2\omega t+2\alpha-\varphi)$$
$$=\cos\varphi\cos(2\omega t+2\alpha)+\sin\varphi\sin(2\omega t+2\alpha)$$

La puissance instantanée devient:

$$p(t)=\underbrace{UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]}_{}+\underbrace{UI\sin\varphi\sin(2\omega t+2\alpha)}_{}$$

Composante pulsée, positive, qui oscille autour de UIcosϕ

Traduit un échange d'énergie unidirectionnel

Composante alternative de Valeur moyenne nulle

Traduit un échange d'énergie oscillatoire

Puissances active et réactive

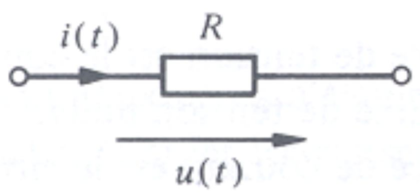
$$p(t) = UI\cos\varphi\left[1+\cos(2\omega t+2\alpha)\right] + UI\sin\varphi\sin(2\omega t+2\alpha)$$
$$= P\left[1+\cos(2\omega t+2\alpha)\right] + Q\sin(2\omega t+2\alpha)$$

La puissance active $P = UI\cos\varphi$ W

La puissance réactive $Q = UI\sin\varphi$ var (volt-ampère-réactif)

La puissance réactive: emmagasinage et restitution périodique d'énergie à une fréquence double de celle du courant et de la tension

P et Q pour une résistance



$$\underline{U} = R\underline{I}$$

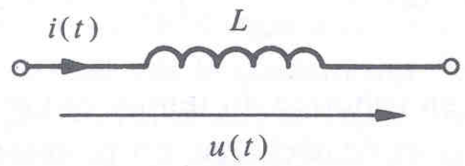
$$\underline{Z} = R, \quad \varphi = 0$$

La puissance active $P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$

La puissance réactive $Q = 0$

La puissance instantanée: $p(t) = P\left(1 + \cos(2\omega t)\right)$

P et Q pour une inductance



$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{Z} = j\omega L = jX_L, \quad \varphi = \pi/2$$

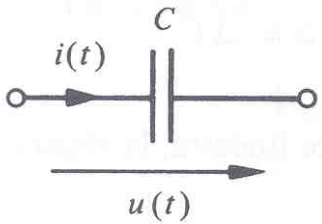
La puissance active $P = 0$

La puissance réactive $Q = UI = \dfrac{U^2}{X_L} = X_L I^2$

La puissance instantanée: $p(t) = Q\sin(2\omega t + 2\alpha)$

L'inductance ne dissipe pas d'énergie: l'énergie est absorbée pendant une moitié de chaque demi-cycle et retournée pendant l'autre moitié.

P et Q pour une capacité



$$\underline{I} = j\omega C\underline{U}$$

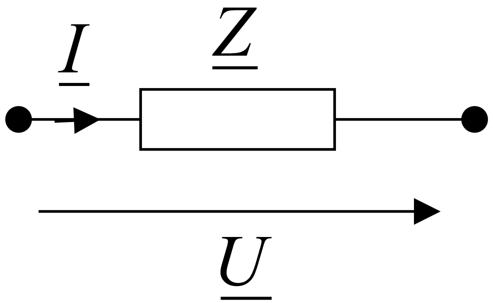
$$\underline{Z} = 1/\,j\omega C = jX_C\,, \quad \varphi = -\pi/2$$

La puissance active $\quad P = 0$

La puissance réactive $\quad Q = -UI = \dfrac{U^2}{X_C} = X_C I^2$

La puissance instantanée: $\quad p(t) = Q\sin(\,2\omega t + 2\alpha)$

P et Q pour une impédance



$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX$$

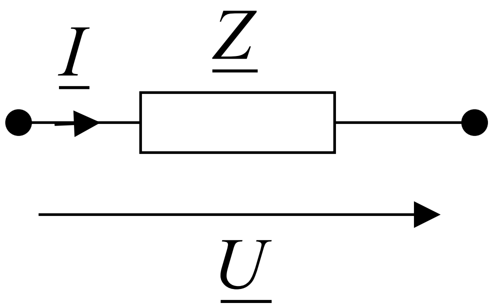
La puissance active $\quad P = UI\cos\varphi = RI^2$

La puissance réactive $\quad Q = UI\sin\varphi = XI^2$

La puissance instantanée:

$$p(t) = P\left[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)\right] + Q\sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Question



$$P = UI\cos\varphi = RI^2$$

Quelle serait l'expression de la puissance active exprimée en fonction de la tension?

A. Impossible de l'exprimer en fonction de la tension

B. $P = U^2 / R$

C. $P = RU^2 / Z^2$

D. Aucune des réponses ci-dessus

Puissance apparente complexe

La puissance apparente complexe, notée $\underline{S}$:

- La partie réelle de $\underline{S}$ correspond à P
- La partie imaginaire de $\underline{S}$ correspond à Q
- Permet de représenter P et Q sous forme complexe

$$\underline{S} = P + jQ$$

L'unité de la puissance apparente est le voltampère (VA)

$\underline{S}$ pour une impédance

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX$$

$$P = UI\cos\varphi$$

$$Q = UI\sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \underline{S} &= P + jQ \\ &= UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi \\ &= UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ &= UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi} \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$\underline{S}$ pour une impédance

En prenant la tension comme référence:

$$\underline{U} = U$$

On peut écrire:

$$\underline{I} = Ie^{-j\varphi}$$

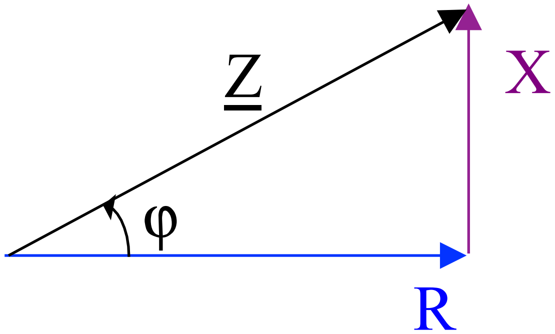
Et alors:

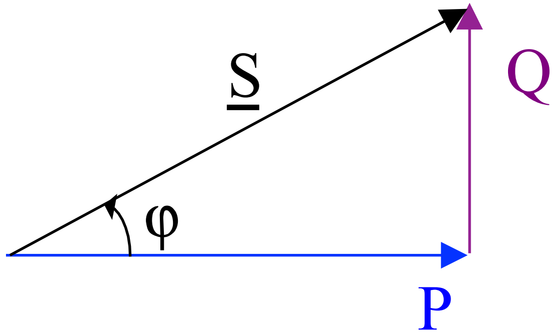
$$\underline{I}^{*} = Ie^{j\varphi}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*}$$

Puissance apparente

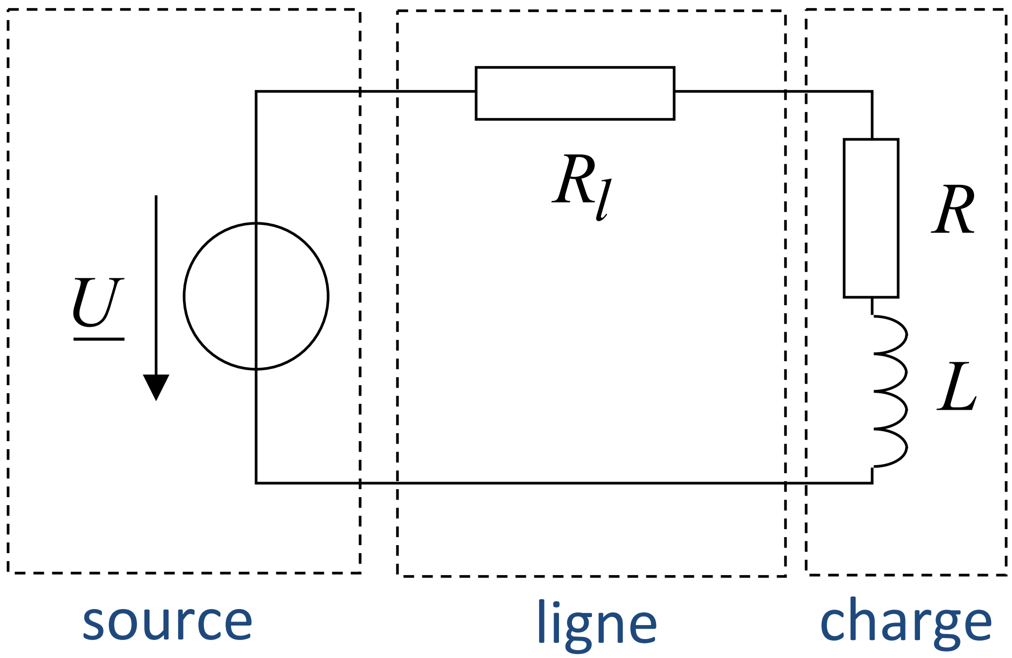
Triangle des impédances et des puissances





Puissance réactive: exemple

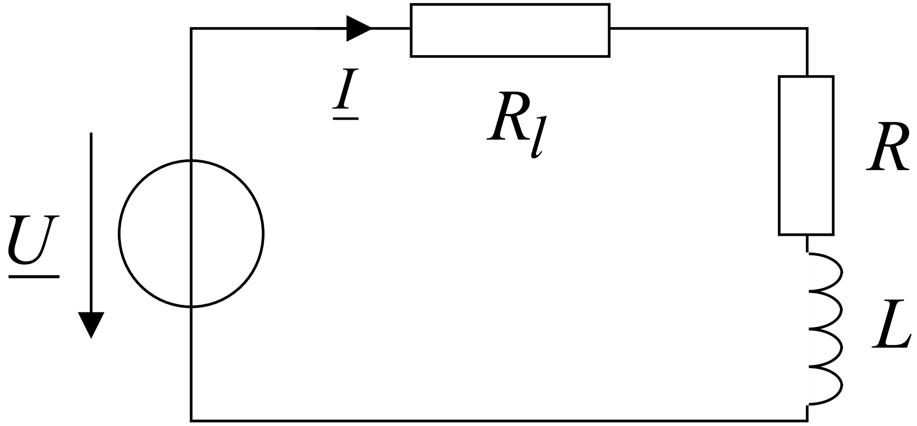
- Ligne monophasée, charge RL en série



Puissance réactive: exemple (suite)

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R_l + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{(R_l + R)^2 + (\omega L)^2}}$$



$R_l << R \Longrightarrow$

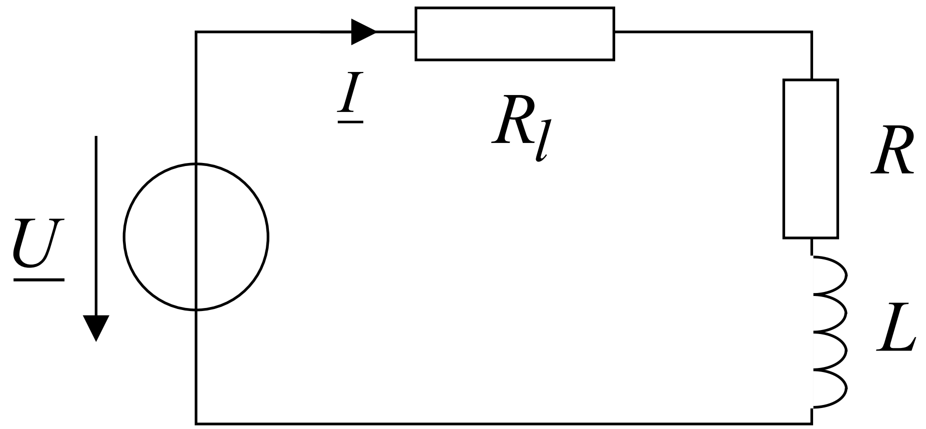
$$I \cong \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\sin\varphi \cong \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Puissance réactive: exemple (suite)

$$I \cong \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\sin\varphi \cong \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$



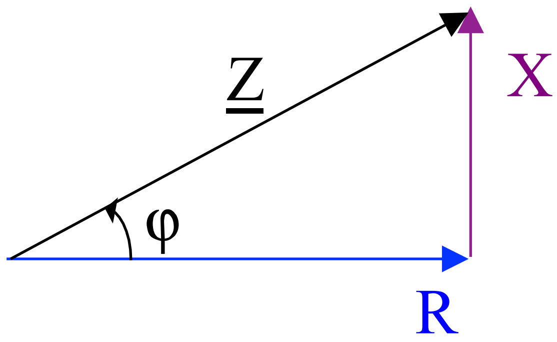
Pertes dans la ligne: $P_l = R_l I^2 = R_l I \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \dfrac{R_l U I \sin\varphi}{\omega L}$

$$\Longrightarrow \quad P_l = \frac{R_l}{\omega L} Q \quad \Longrightarrow$$

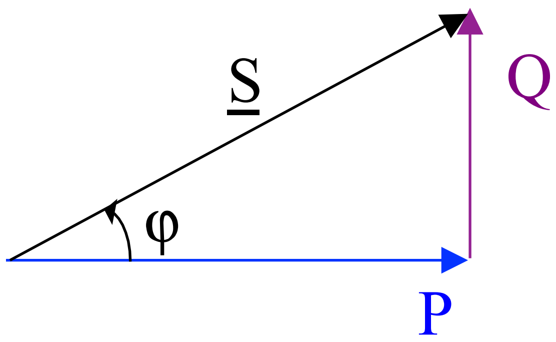
Les pertes dans la ligne valent, à un facteur près, la puissance réactive

Puissance apparente

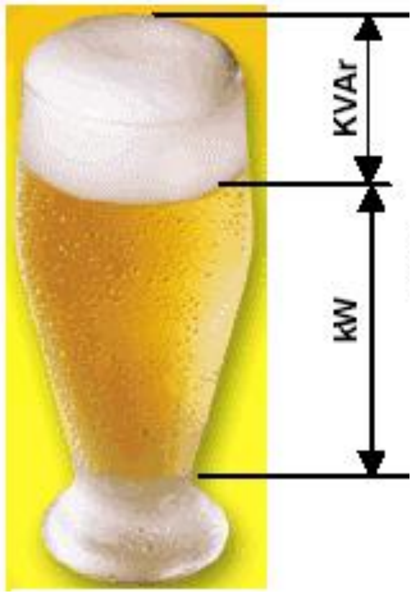
Triangle des impédances



et des puissances



Puissance: analogie



Facteur de puissance

Le facteur de puissance est défini par

$$F_p = \cos\varphi$$

ϕ étant compris entre –π/2 et π/2, le facteur de puissance est toujours positif et compris entre 0 et 1

Résistance: $F_p = 1$

Inductance: $F_p = 0$

Capacité: $F_p = 0$

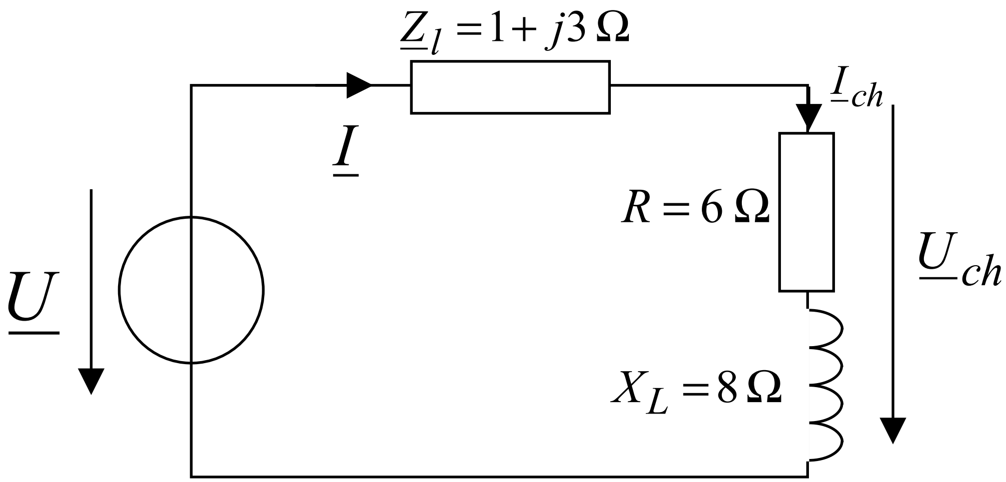
Amélioration du facteur de puissance

- En général, dans l'industrie, les charges sont de nature inductive
- Pour tirer le maximum des équipements, la puissance réelle doit se rapprocher le plus possible de la puissance apparente, i.e. on doit minimiser la puissance réactive

Amélioration du facteur de puissance

- Dans le triangle des puissances, la longueur S doit tendre vers celle de P et ϕ doit être aussi petit que possible.
- On diminue cet angle en ajoutant des condensateurs en parallèle avec la charge: c'est la correction du facteur de puissance.

Puissances active et réactive: exemple



Une charge industrielle est représentée par une impédance formé de la mise en série d'une résistance et une inductance. La tension aux bornes de la charge est $\underline{U}_{ch}$=250e^{j0} (V).

a)Calculer le courant $\underline{I}_{ch}$, Q, P, S et F_p de la charge.

b) Calculer la tension de la source si la ligne qui relie la source à la charge a une impédance donnée $\underline{Z}_l$. Calculer la puissance perdue dans la ligne.

c) Si on ajoute un condensateur de X_C =12.5 Ω en parallèle, calculer le courant pris par le C, le nouveau courant fourni par la source et F_p de l'ensemble de la charge et la capacité (pour la même tension aux bornes de la charge).

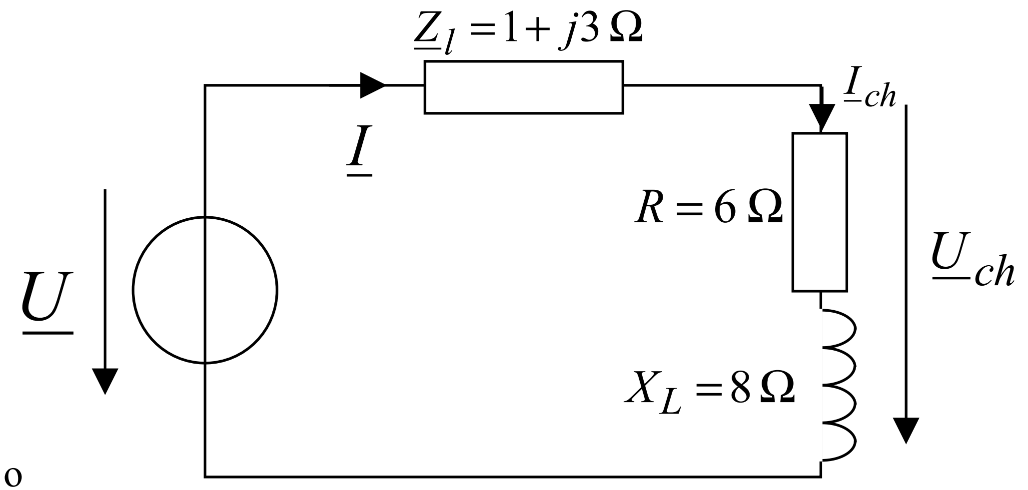
d) Calculer la nouvelle tension de la source et la nouvelle valeur de puissance réelle perdue dans la ligne.

Solution

a)

$$\underline{Z}_{ch} = 6 + j8 = 10e^{j53.1^o}\ \Omega$$

$$\underline{I}_{ch} = \frac{250e^{j0^o}}{10e^{j53.1^o}} = 25e^{-j53.1^o}\ A$$



$$\underline{S} = 250e^{j0^o}\ 25e^{j53.1^o} = 6.25e^{j53.1^o}\ kVA$$

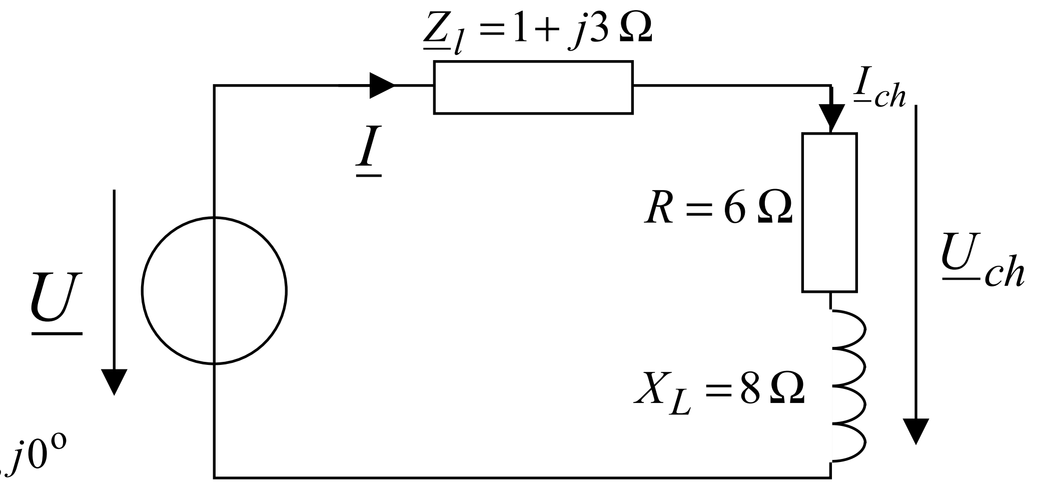
$$P = 6.25\cos 53.1^o = 3.75\ kW$$

$$Q = 6.25\sin 53.1^o = 5.0\ kvar$$

$$F_p = \cos 53.1^o = +0.6$$

Solution (suite)

b)



$$\underline{U} = \underline{Z}_l \underline{I}_{ch} + \underline{U}_{ch}$$

$$\underline{Z}_l = 1 + 3j = 3.16e^{j71.57^o}\ \Omega$$

$$\underline{U} = 3.16e^{j71.6^o}\, 25e^{-j53.1^o} + 250e^{j0^o}$$

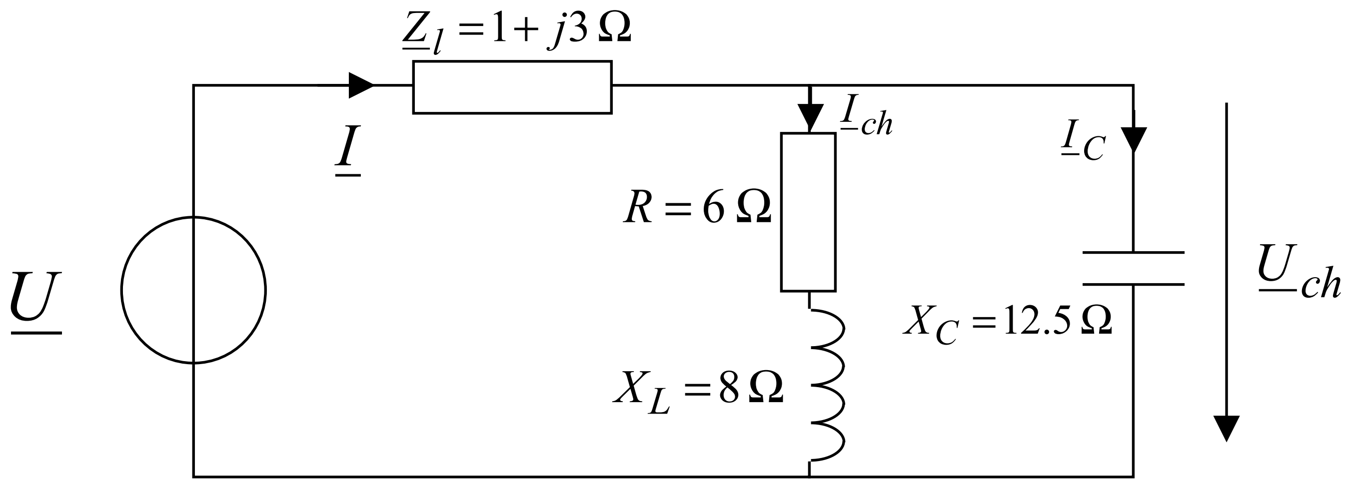
$$= 79e^{j18.5^o} + 250e^{j0^o}$$

$$= 325.8e^{j4.4^o} \quad V$$

$$\underline{P}_l = R_l I^2 = R_l I_{ch}^2 = 625\, W$$

Solution (suite)

c)



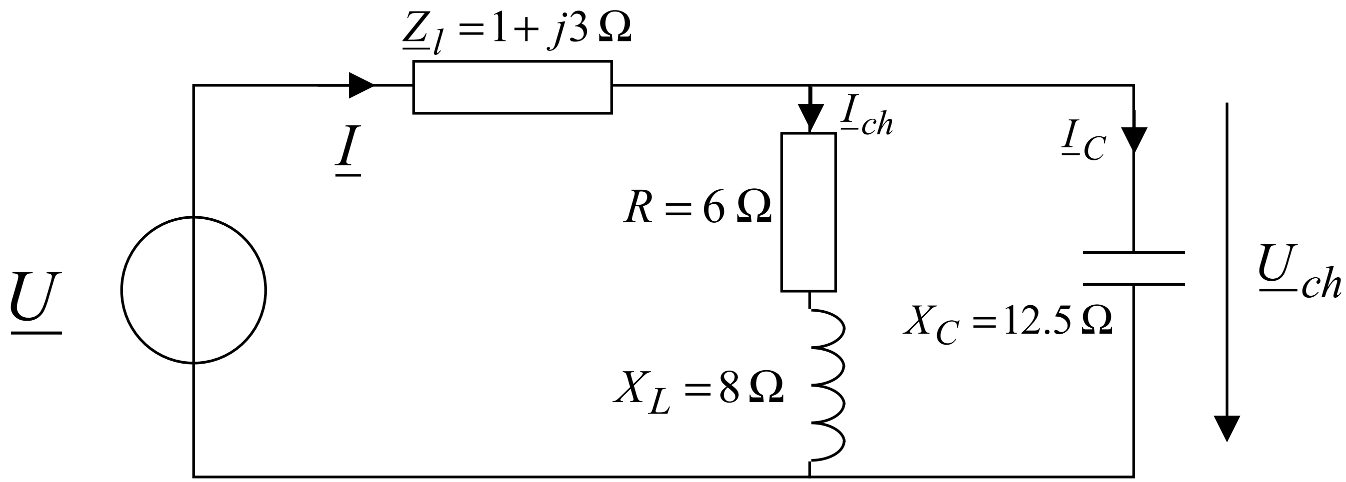
$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{ch}}{\underline{Z}_C} = \frac{250}{12.5e^{-j90^o}} = 20e^{j90^o} \quad A$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{ch} + \underline{I}_C = 25e^{-j53.1^o} + 20e^{j90^o} = 15e^{j0^o} \quad A$$

$$F_p = \cos 0^o = 1$$

Solution (suite)

d)



$$\underline{U} = 3.16e^{j71.6^o}\,15e^{j0^o} + 250e^{j0^o}$$

$$= 47.4e^{j71.6^o} + 250e^{j0^o}$$

$$= 265 + j45 = 269e^{j10^o}\ V$$

$$\underline{P}_l = R_l I^2 = 225\,W$$