Circuits et Systèmes I
Chapitre 6: Circuits en Régime Sinusoïdal 3

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

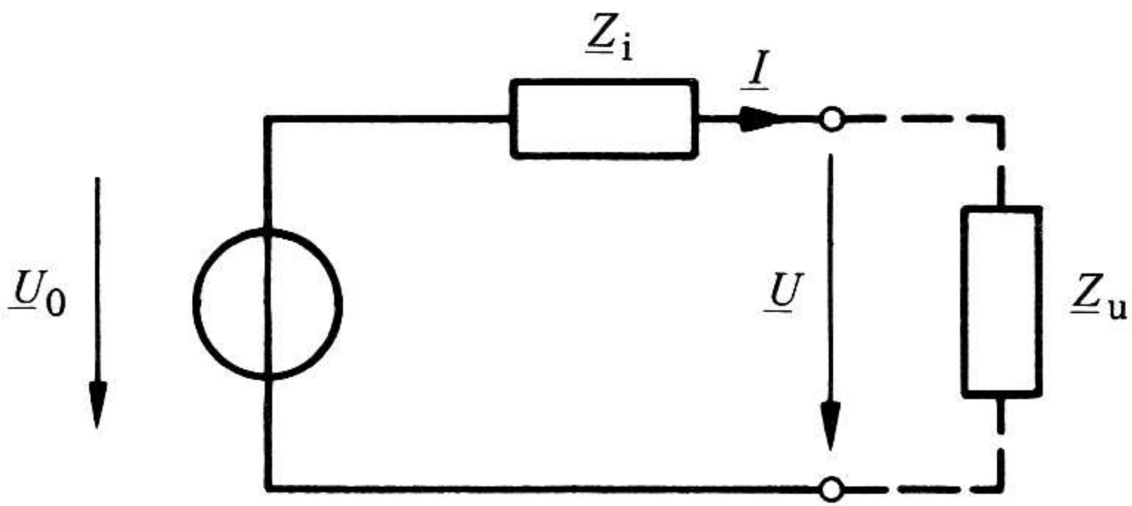
Circuits en régime sinusoïdal 3

- Source avec impédance interne
- Réseaux d’impédances
  - Impédances en série
  - Impédance en parallèle
- Diagramme de phaseur et d’impédance
- Diviseurs de tension et de courant
- Théorèmes de Thévenin et de Norton en régime sinusoïdal
- Exemples
- Inductance avec pertes
- Capacité avec pertes
- Circuit résonant série
- Circuit résonant parallèle
- Lieu complexe

Source avec impédance interne

- Généralisation de la notion de résistance interne: impédance interne

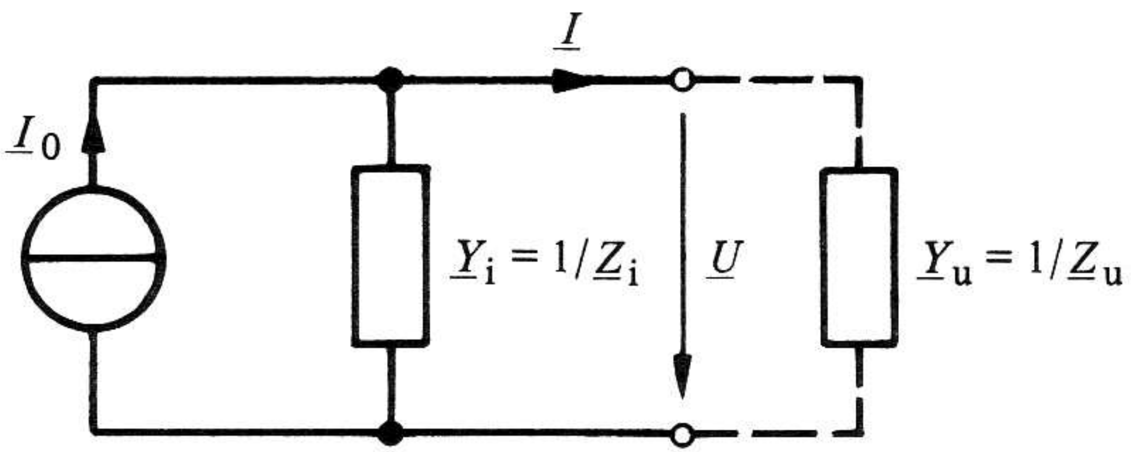
$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i$$



$$\underline{U} = \underline{U}_o - \underline{Z}_i \underline{I}$$

Source avec impédance interne

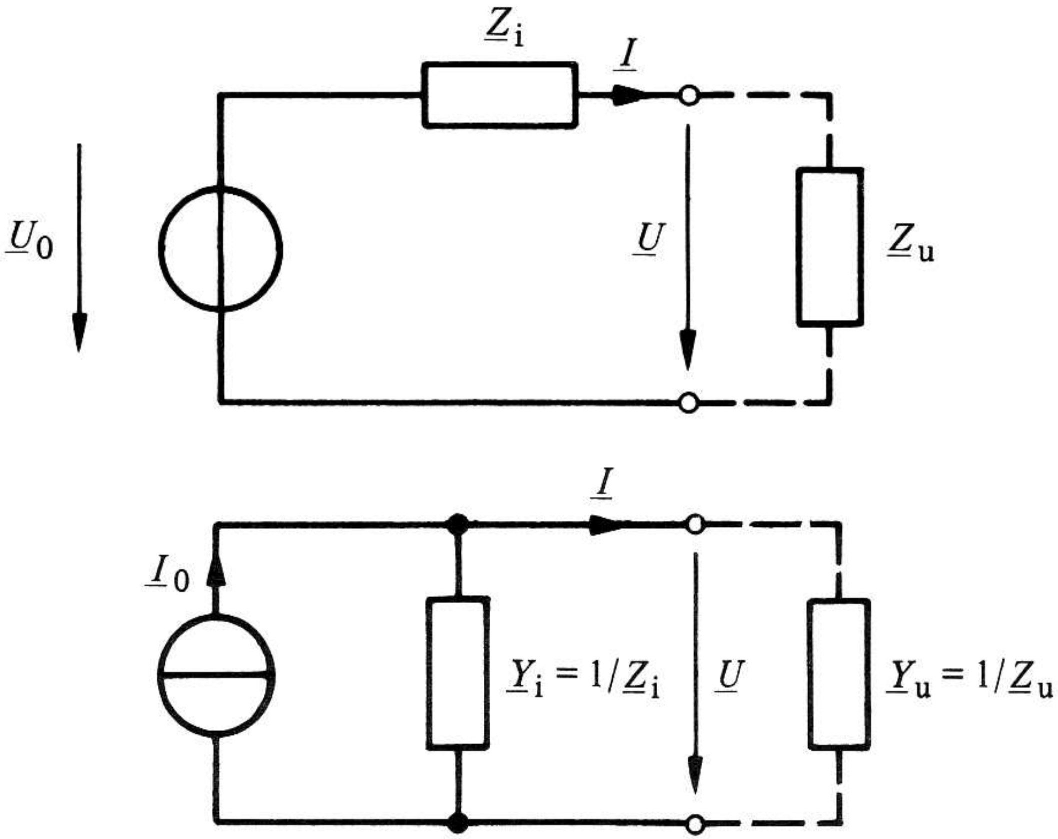
- Représentation équivalente en terme de source de courant



$$\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$$

$$\underline{I} = \underline{I}_o - \underline{Y}_i \underline{U}$$

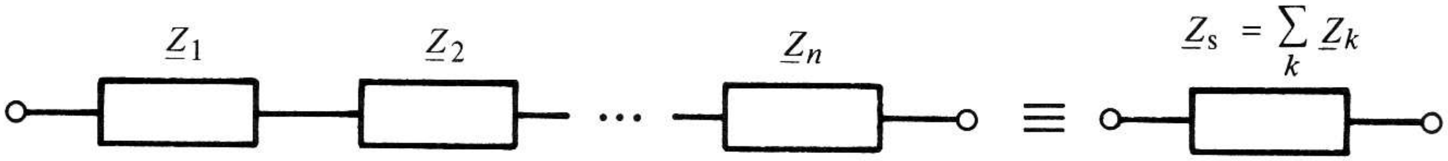
Equivalence sources de tension/courant



$$\underline{U}_o = \underline{Z}_i \underline{I}_o$$

$$\underline{I}_o = \underline{Y}_i \underline{U}_o = \frac{\underline{U}_o}{\underline{Z}_i}$$

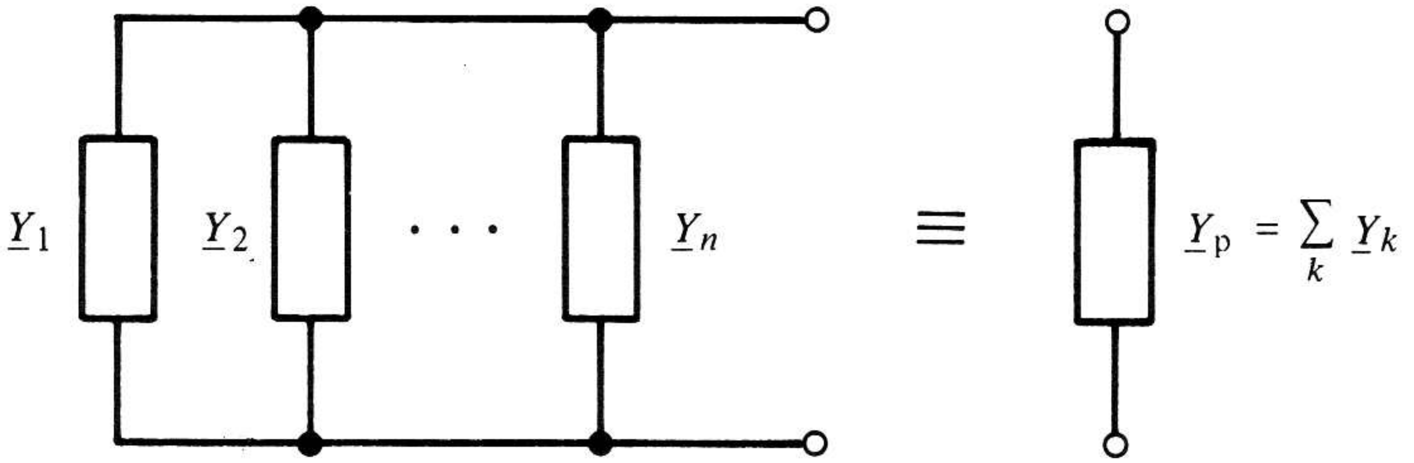
Mise en série d'impédances (d'admittances)



$$\underline{Z}_s = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k$$

$$\underline{Y}_s = \frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/\underline{Y}_k}$$

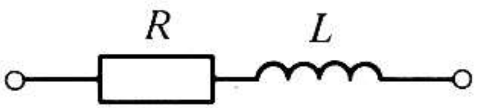
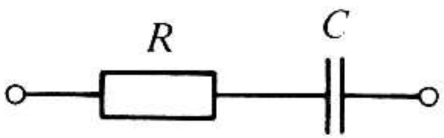
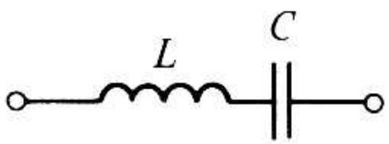
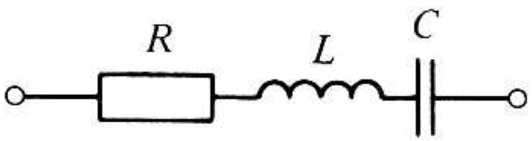
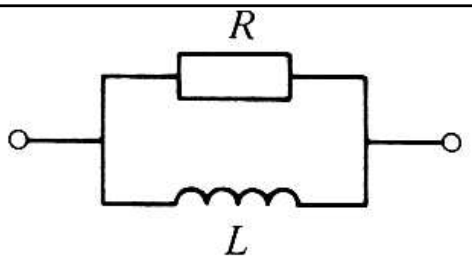
Mise en parallèle d'impédances (d'admittances)



$$\underline{Y}_\mathrm{p} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_\mathrm{k}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{p} = \frac{1}{\underline{Y}_\mathrm{p}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_\mathrm{k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/\underline{Z}_\mathrm{k}}$$

Bipôles composites élémentaires

Circuit	Impédance	Admittance
	$R + j\omega L$	$\dfrac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$
	$R + \dfrac{1}{j\omega C}$	$\dfrac{R\omega^2 C^2 + j\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$
	$j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$	$j\dfrac{\omega C}{1 - \omega^2 LC}$
	$R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$	$\dfrac{R - j(\omega L - 1/\omega C)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$
	$\dfrac{R\omega^2 L^2 + j\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{\omega L}$

Bipôles composites élémentaires (suite)

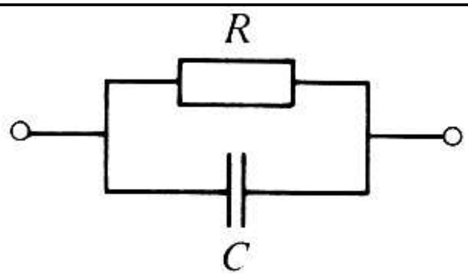
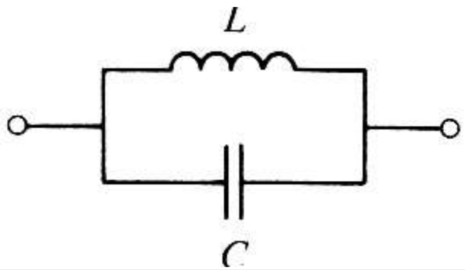
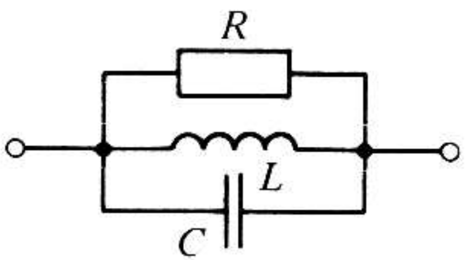
Circuit	Impédance	Admittance
	$\dfrac{R - j\omega CR^2}{1+\omega^2 R^2 C^2}$	$\dfrac{1}{R} + j\omega C$
	$j\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$	$j(\omega C - \dfrac{1}{\omega L})$
	$\dfrac{R - jR^2(\omega C - 1/\omega L)}{1+R^2(\omega C - 1/\omega L)^2}$	$\dfrac{1}{R} - j(\omega C - \dfrac{1}{\omega L})$

Diagramme d'impédance

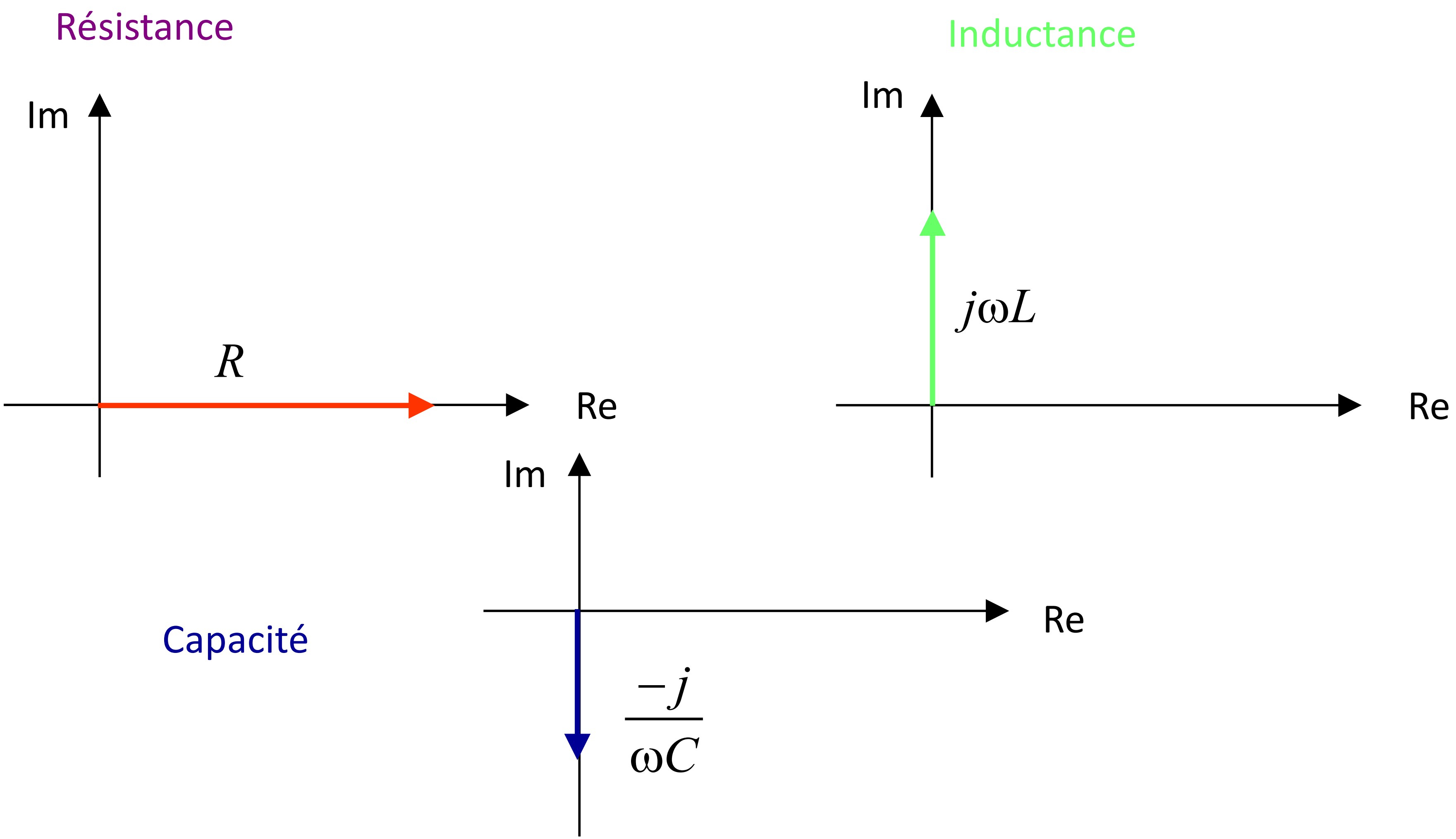


Diagramme d’impédance

Circuit RLC série

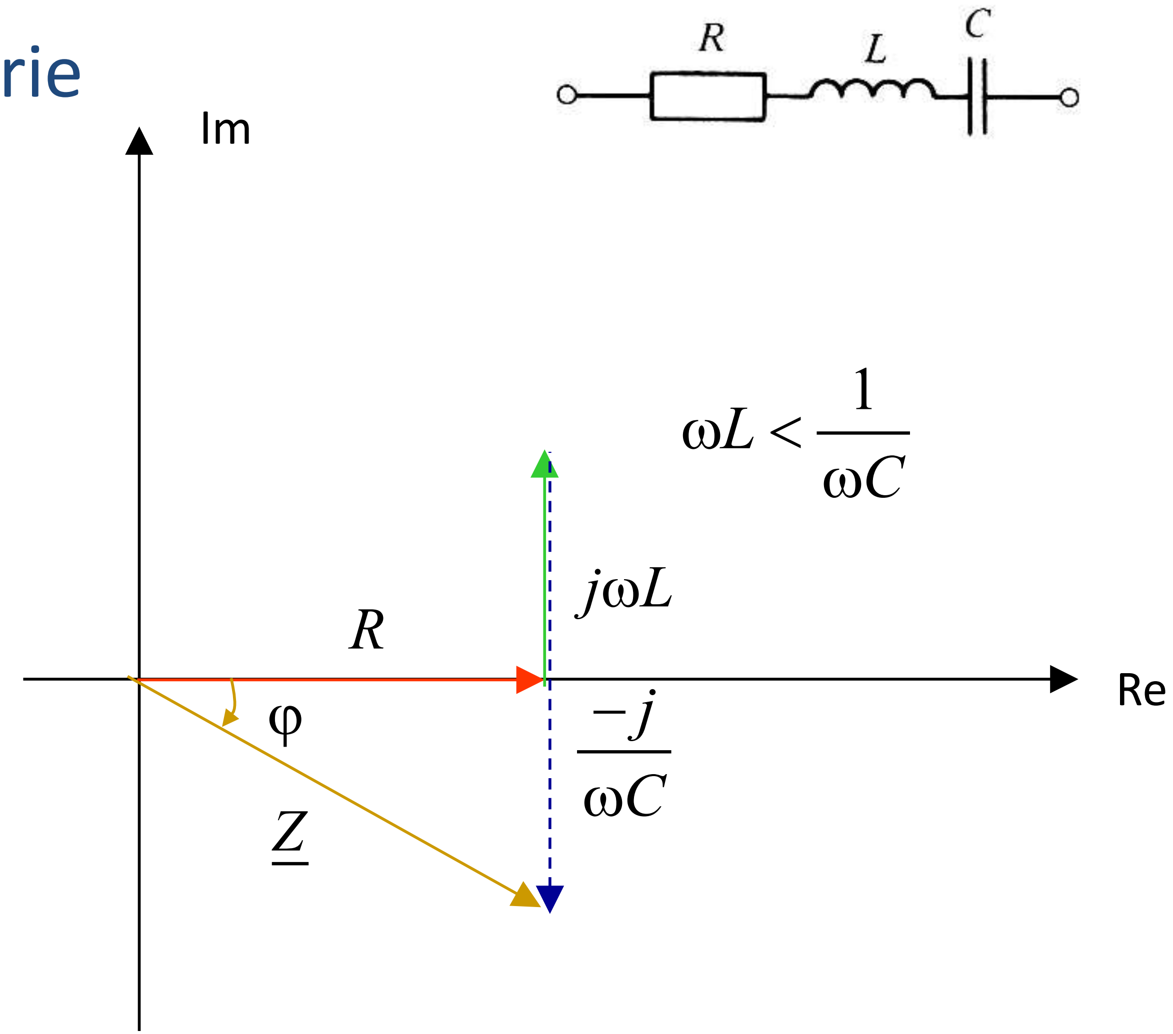
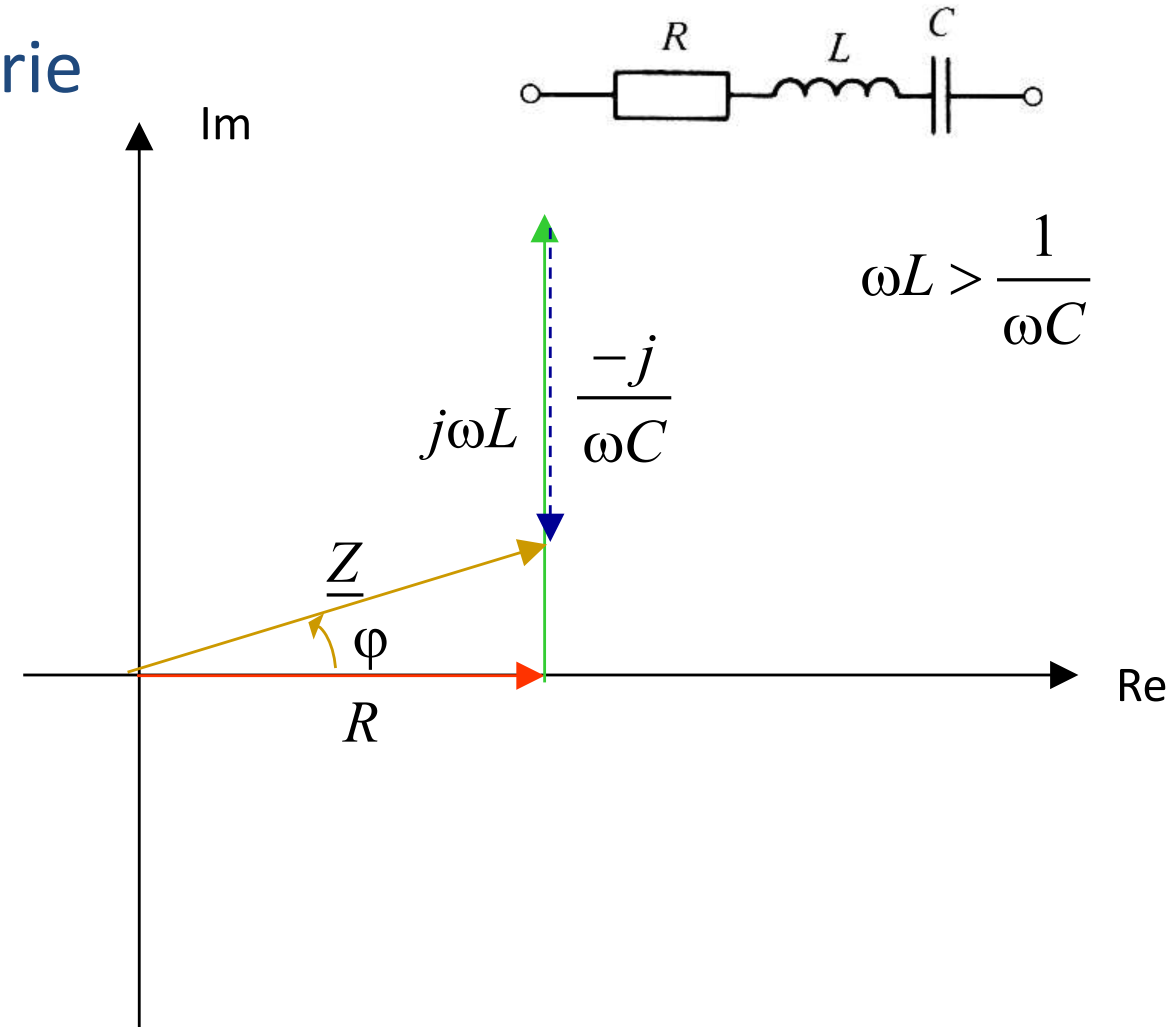


Diagramme d'impédance

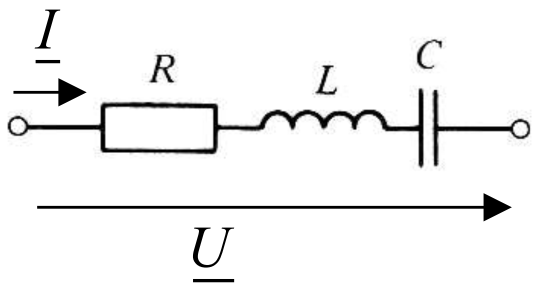
Circuit RLC série



$$\omega L > \frac{1}{\omega C}$$

Diagramme de phaseur

Circuit RLC série



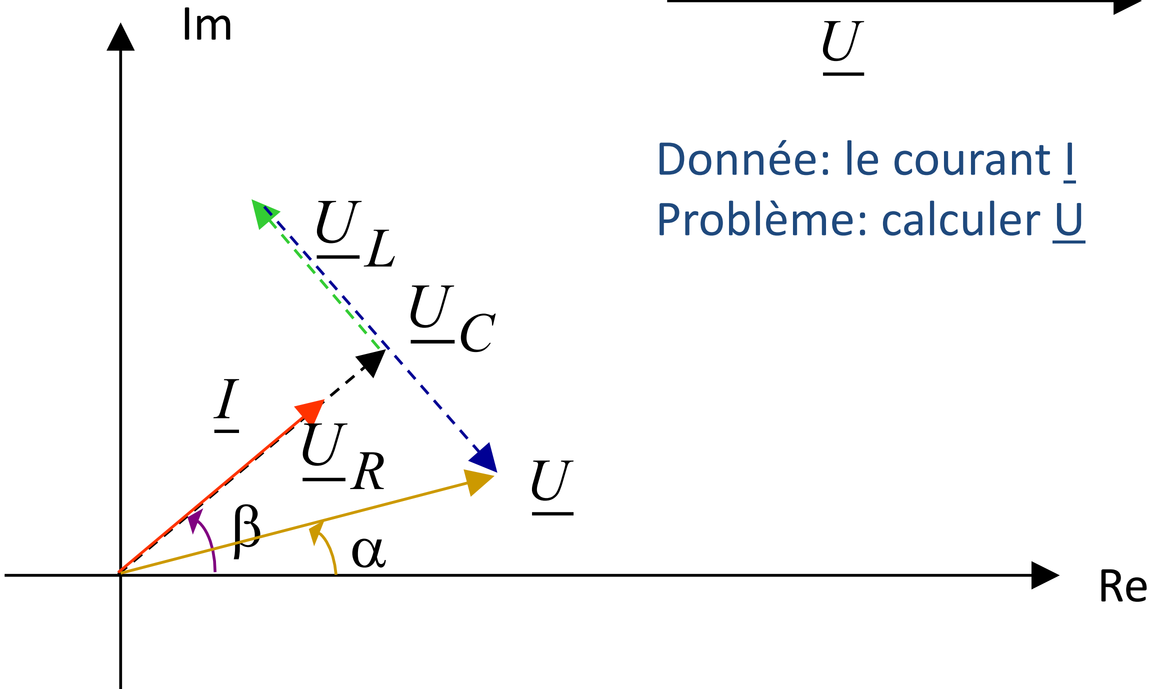
Donnée: le courant <u>I</u>
Problème: calculer <u>U</u>

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

$$\underline{U}_R = R\underline{I}$$

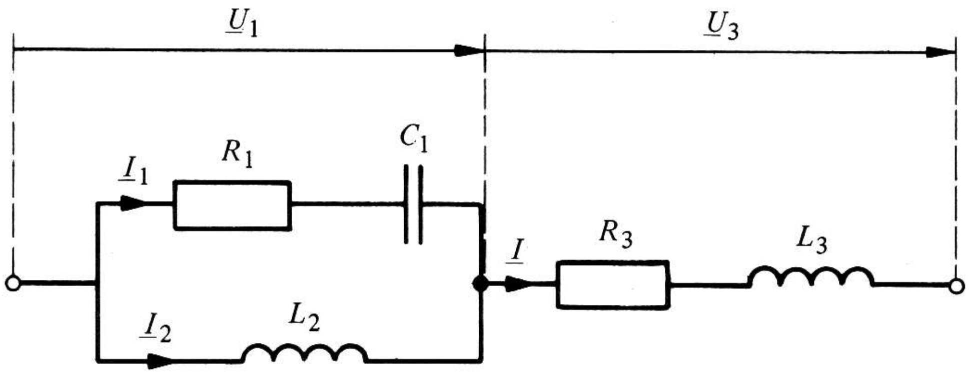
$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I}$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$



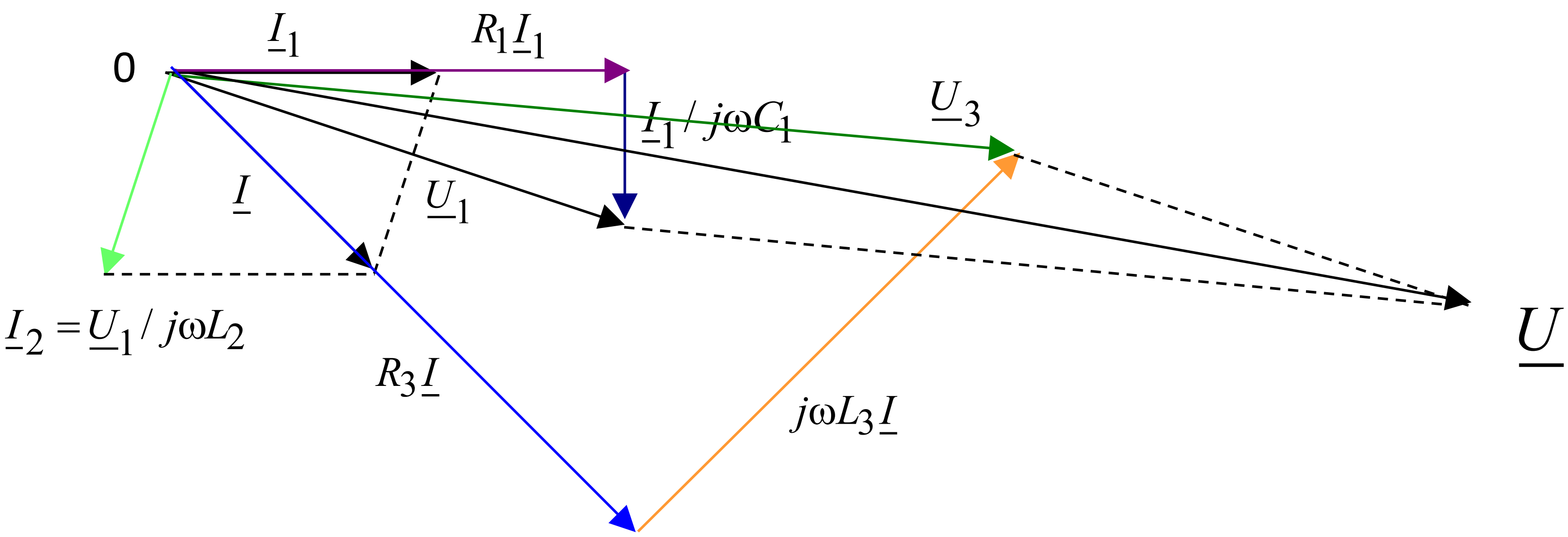
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

Diagramme de phaseur: circuit série-parallèle



Donnée: le courant $\underline{I}_1$

Problème: calculer $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_3$



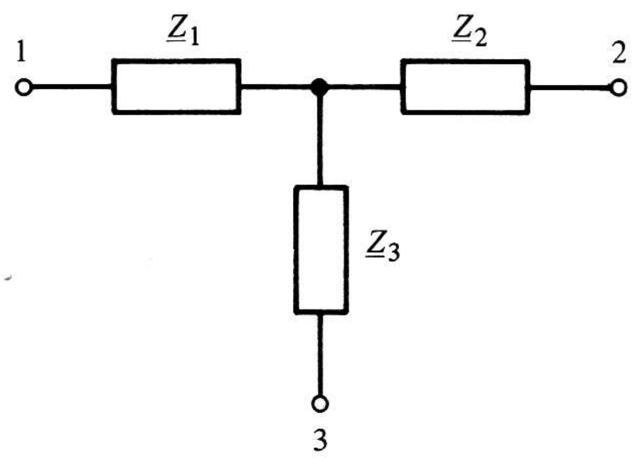
Question

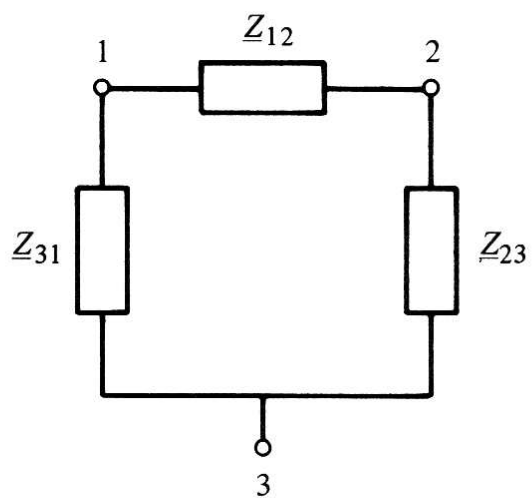
- On a deux impédances en série $\underline{Z}_1$et $\underline{Z}_{2.}$ Le module de l'impédance équivalente est la somme des modules.

A: Vrai

B: faux

Tripôles équivalents





$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}$$

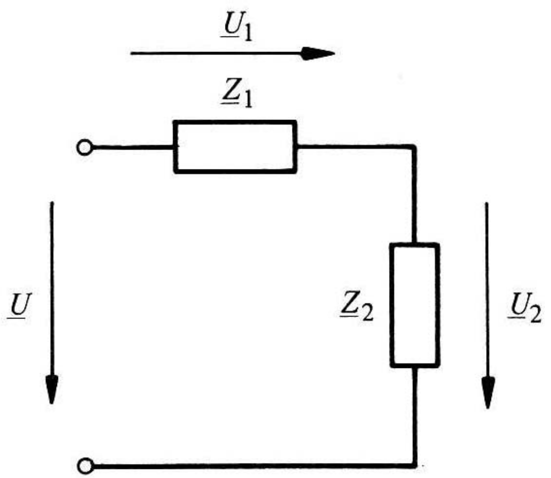
$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

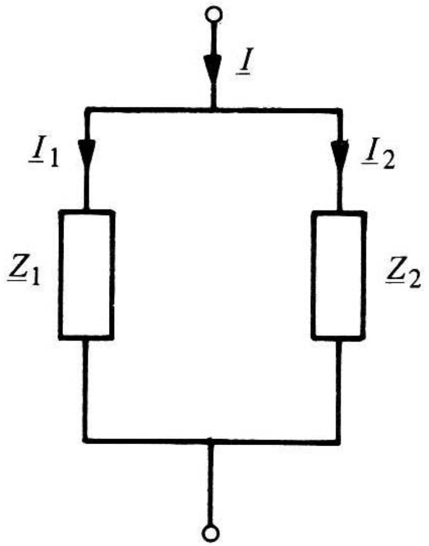
$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

Diviseurs de tension et de courant



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$

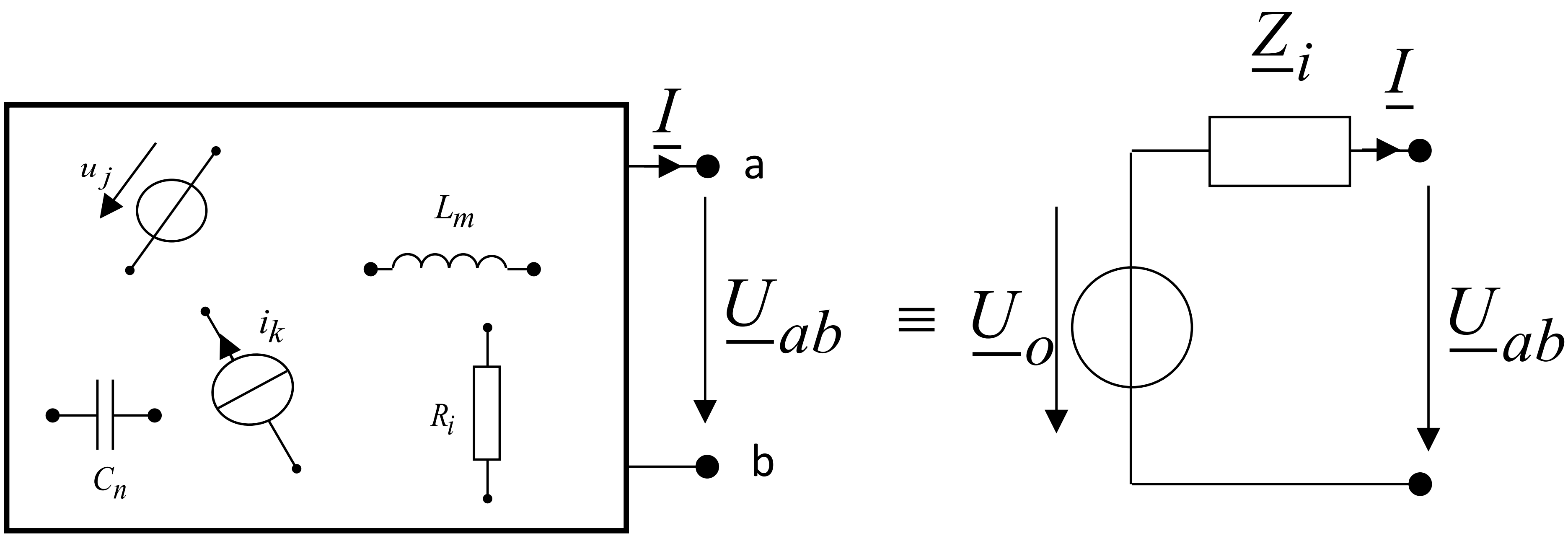
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

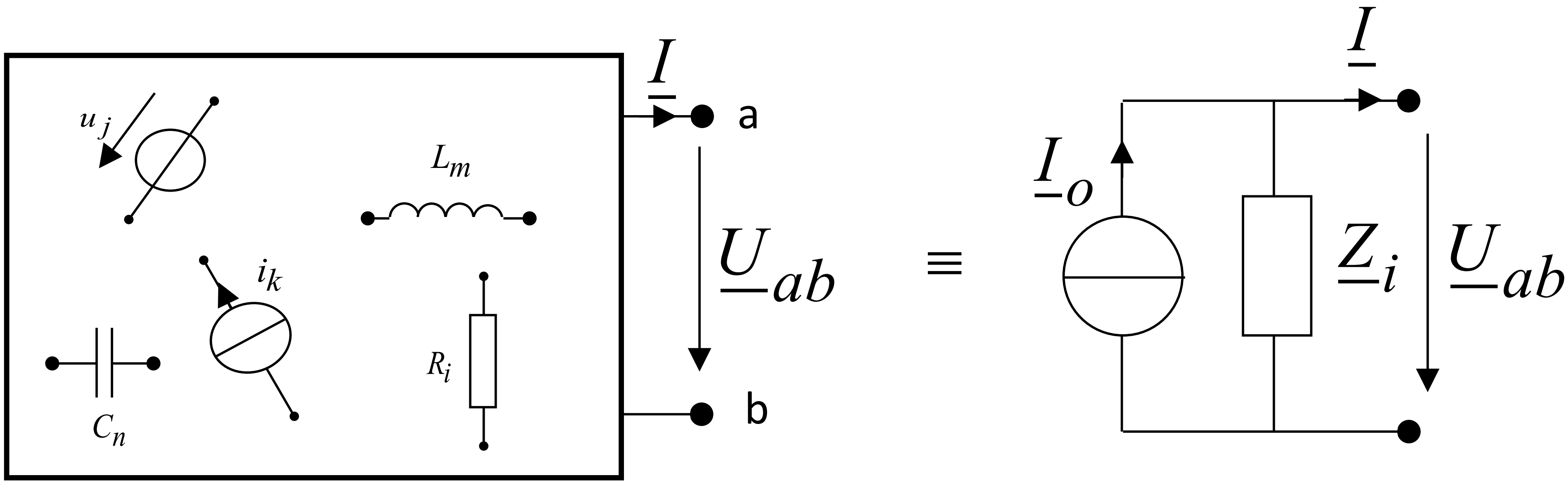
Théorème de Thévenin en régime sinusoïdal



Toutes les sources ont la même fréquence

$$\underline{U}_o = \underline{U}_{ab}\Big|_{\underline{I}=0} \qquad \underline{Z}_i = \underline{Z}_{ab}\Big|_{u_j=0,\, i_k=0}$$

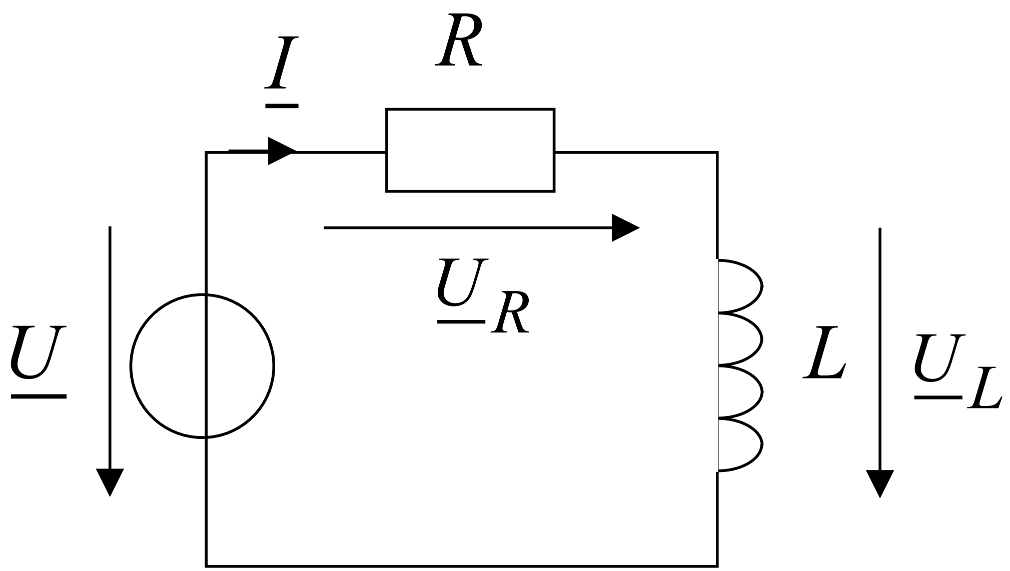
Théorème de Norton en régime sinusoïdal



Toutes les sources ont la même fréquence

$$\underline{I}_o = \underline{I}\,\Big|_{\underline{U}_{ab}=0} \qquad \underline{Z}_i = \underline{Z}_{ab}\Big|_{u_j=0,\, i_k=0}$$

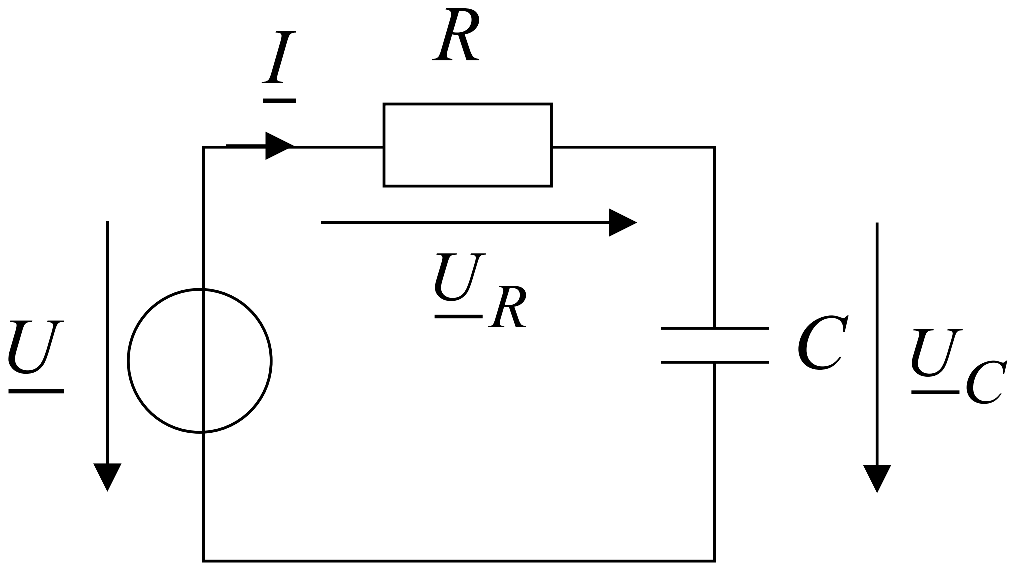
Exemple 1: Circuit RL série



$$\underline{U} = Ue^{j\theta}$$

Déterminer $\underline{I}$, $\underline{U}_R$ et $\underline{U}_L$

Exemple 2: Circuit RC série



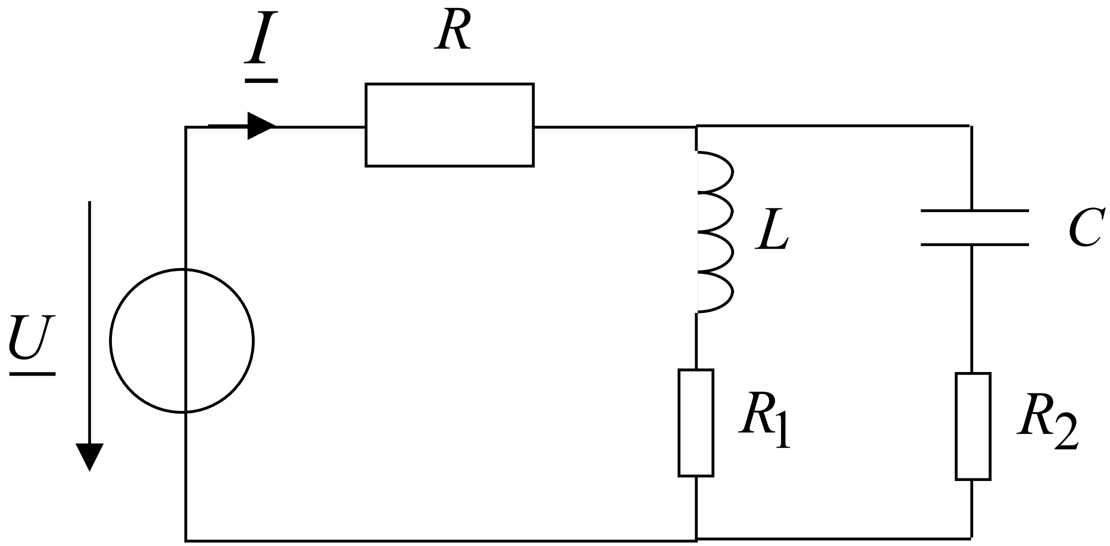
$$R = 5\,\Omega$$

$$\underline{Z}_C = -j8.66\,\Omega$$

$$\underline{U} = 20e^{j45^{\mathrm{o}}}$$

Déterminer $\underline{I}$, $\underline{U}_R$ et $\underline{U}_C$

Exemple 3: Circuit RLC



$\underline{U} = 10e^{j15^{o}}$, $\omega = 500$ rad/s

$R = 2\Omega$

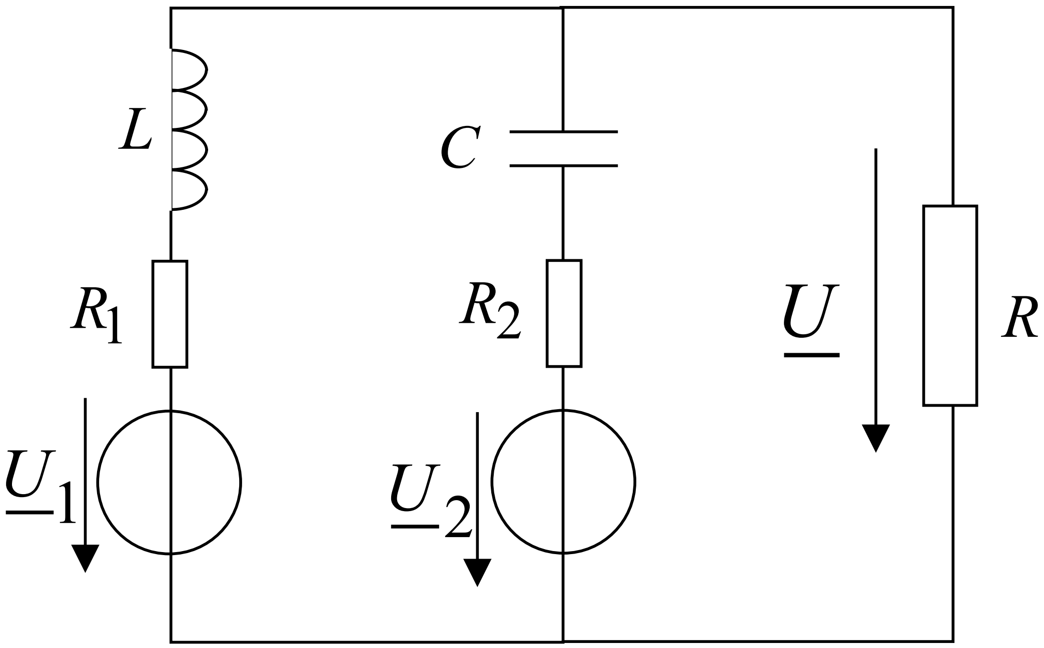
$L = 2$ mH

$C = 1000\ \mu$F

$R_1 = R_2 = 1\Omega$

Déterminer le courant $i(t)$

Exemple 4: Théorème de Thévenin



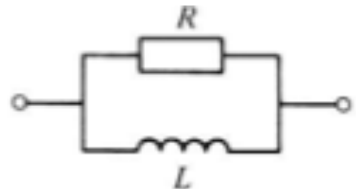
Déterminer la tension $\underline{U}$

Question

- Avantages du calcul complexe?

Question

- La résistance de l'impédance du circuit suivant est



A: R

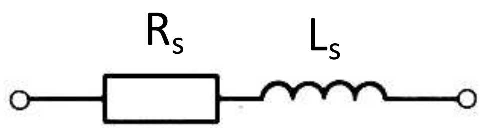
B: $$\frac{R\omega^2 L^2}{R^2+\omega^2 L^2}$$

C: $$\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}$$

Inductance avec pertes

- Une inductance réelle comporte des pertes qui peuvent être introduites dans le modèle par une résistance en série avec l'inductance.
- On définit alors le facteur de qualité Q de l'inductance comme le rapport

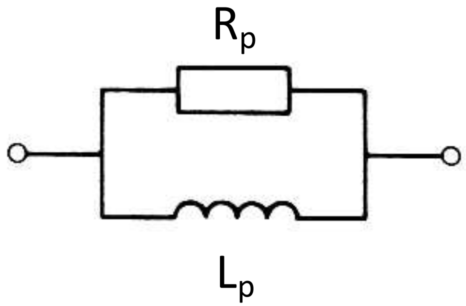
$$Q = \frac{\text{réactance}}{\text{résistance}} = \frac{\omega L_S}{R_S}$$



$$\underline{Z}_s = R_s + j\omega L_s$$

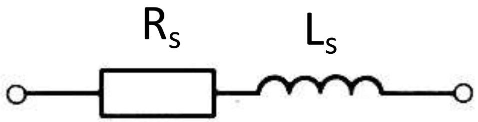
Inductance avec pertes

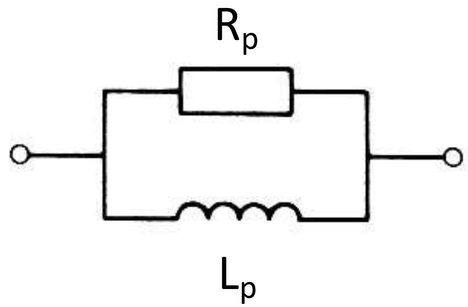
- On peut aussi utiliser une représentation équivalente avec un schéma en parallèle:



$$\underline{Z}_p = \frac{j\omega L_p R_p}{R_p + j\omega L_p}$$

Inductance avec pertes



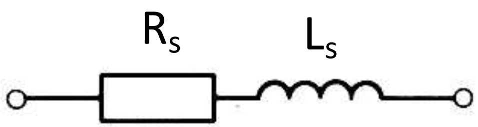


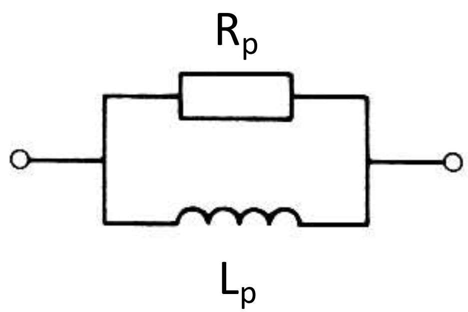
Pour que les deux modèles soient équivalents, il faut avoir

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_p$$

$$R_s + j\omega L_s = \frac{j\omega L_p R_p}{R_p + j\omega L_p}$$

Inductance avec pertes

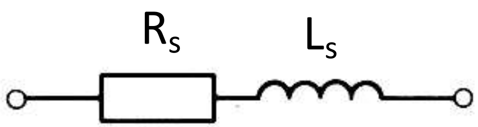


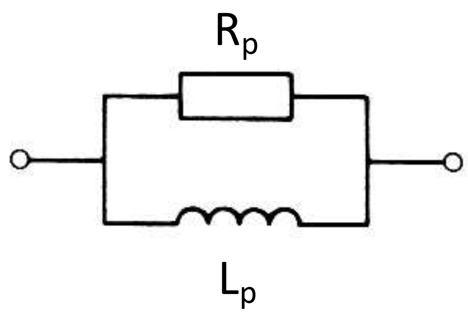


$$R_s + j\omega L_s = \frac{j\omega L_p R_p}{R_p + j\omega L_p}$$

$$R_s + j\omega L_s = \frac{j\omega L_p R_p (R_p - j\omega L_p)}{R_p^2 + (\omega L_p)^2}$$

Inductance avec pertes





En égalisant les parties réelles et imaginaires:

$$R_s = \frac{\omega^2 L_p^2 R_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \qquad \omega L_s = \frac{\omega L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2}$$

Inductance avec pertes

$$R_s = \frac{\omega^2 L_p^2 R_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \quad \text{(a)}$$

$$\omega L_s = \frac{\omega L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \quad \text{(b)}$$

En divisant (b) par (a), on obtient:

$$Q = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p}$$

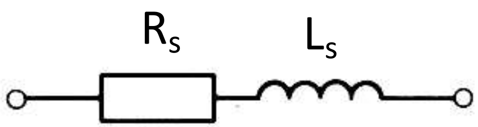
Inductance avec pertes

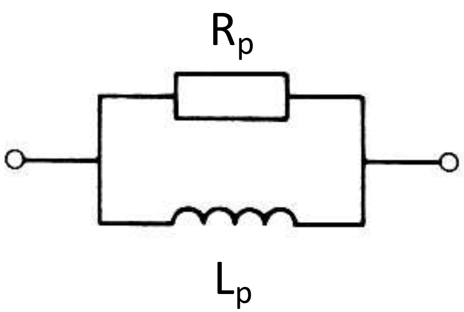
On peut aussi exprimer (a) et (b) en fonction de Q:

$$R_s = \frac{R_p}{\dfrac{R_p^2}{(\omega L_p)^2} + 1} = \frac{R_p}{Q^2 + 1} \cong \frac{R_p}{Q^2} \qquad Q^2 >> 1$$

$$\omega L_s = \frac{\omega L_p}{1 + \dfrac{(\omega L_p)^2}{R_p^2}} = \frac{\omega L_p}{1 + \dfrac{1}{Q^2}} \cong \omega L_p \qquad Q^2 >> 1$$

Inductance avec pertes

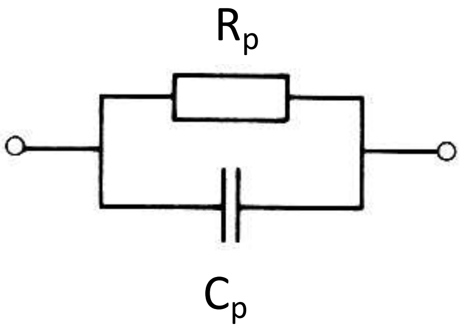




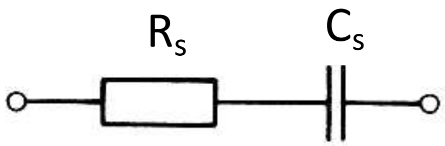
En résumé, lorsque $Q^2 >> 1$, on a

$$L_s = L_p \qquad\qquad R_p = Q^2 R_s$$

Capacité avec pertes



Modèle parallèle



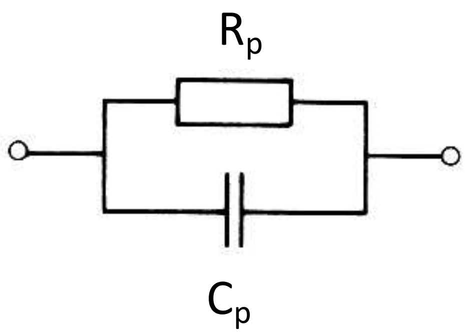
Modèle série

De la même manière, on peut définir le facteur de qualité Q:

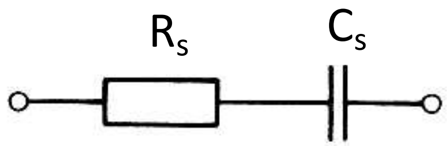
$$Q = \frac{-\text{réactance}}{\text{résistance série}} = \frac{1/\omega C_s}{R_s}$$

$$= \frac{R_p}{1/\omega C_p}\left(= \frac{\text{résistance parallèle}}{\text{réactance}} \right)$$

Capacité avec pertes



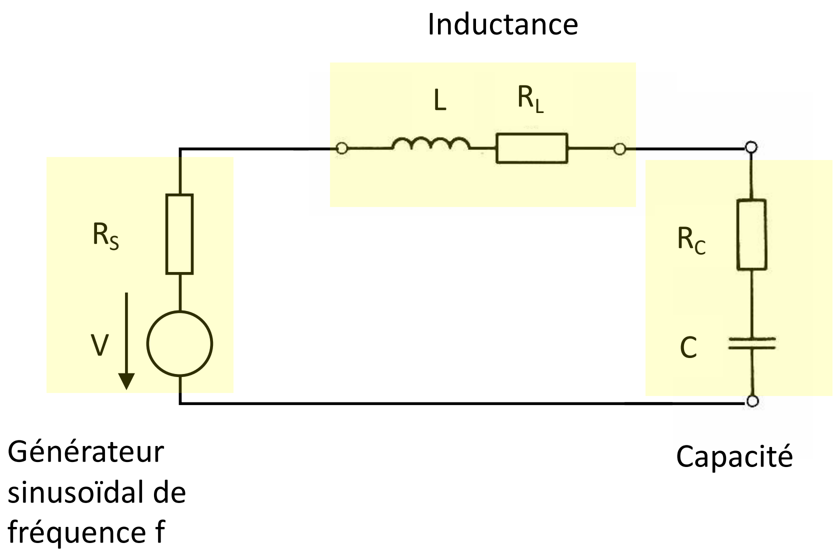
Modèle parallèle



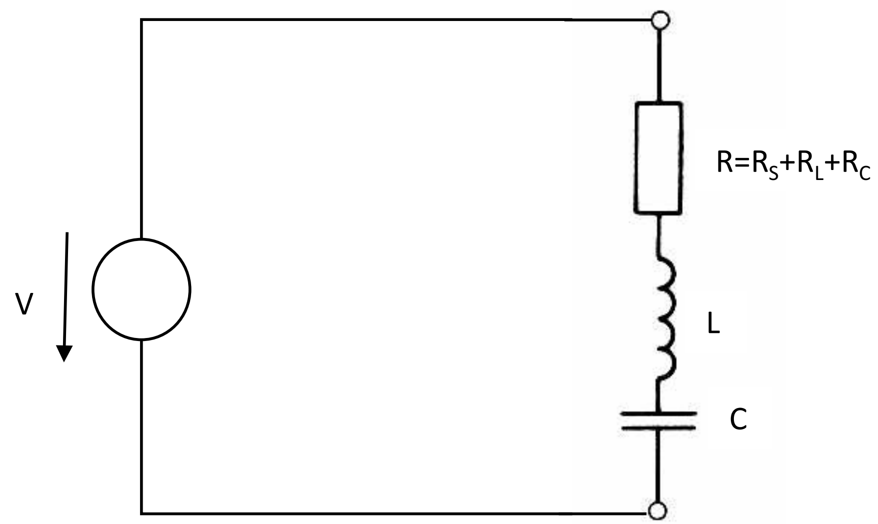
Modèle série

$$C_s = C_p \qquad R_p = Q^2 R_s \qquad Q^2 >> 1$$

Circuit résonant série



$\equiv$



Circuit résonant série

L'impédance du circuit: $\underline{Z} = R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$

Le courant dans le circuit est alors donné par:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})}$$

L'amplitude et la phase du courant:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}} \qquad \phi = -\tan^{-1}\left[\frac{(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})}{R}\right]$$

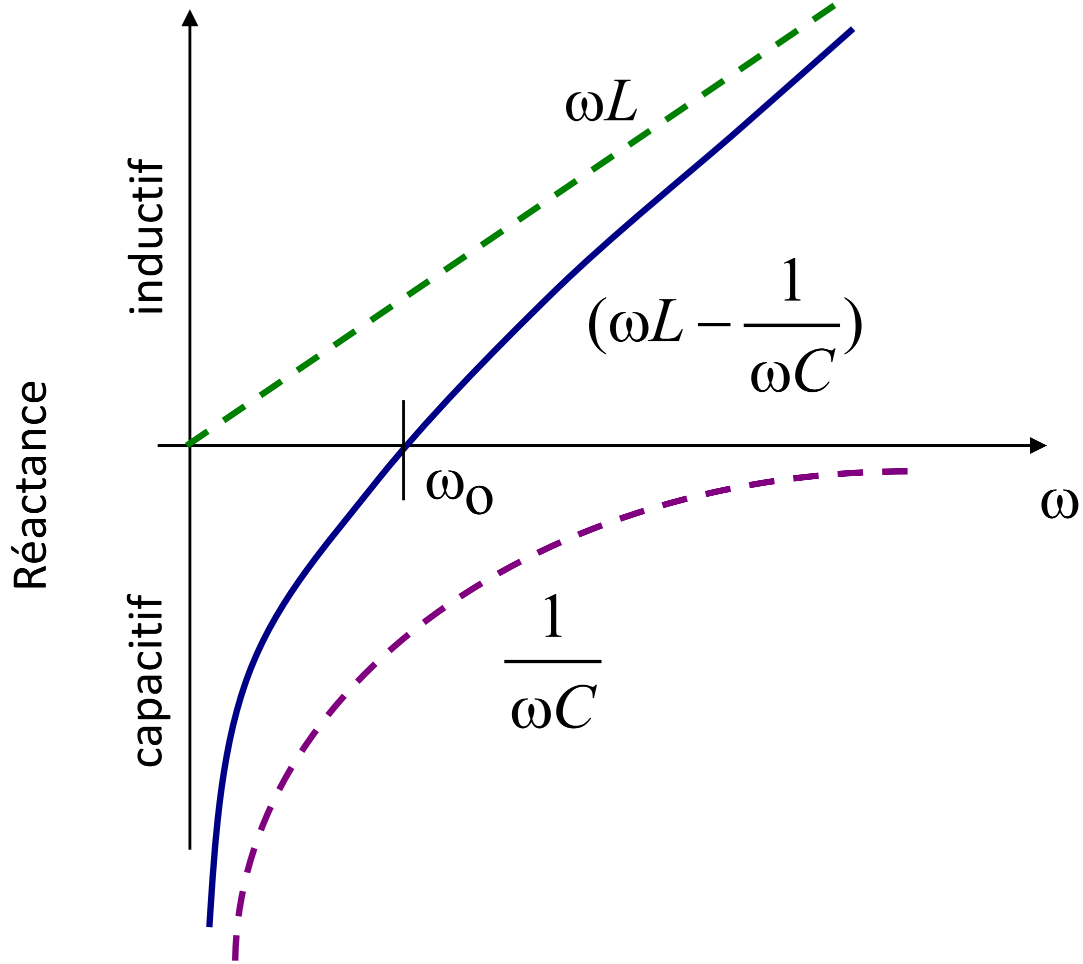
Circuit résonant série

L'impédance du circuit: $\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Le circuit se comporte comme une pure résistance et le courant passe par une valeur maximale:

$$I_0 = \frac{V}{R}$$



Circuit résonant série

Le facteur de qualité Q_o du circuit complet est défini par:

$$Q_o = \frac{\omega_o L}{R} \equiv \frac{1}{\omega_o C R}$$

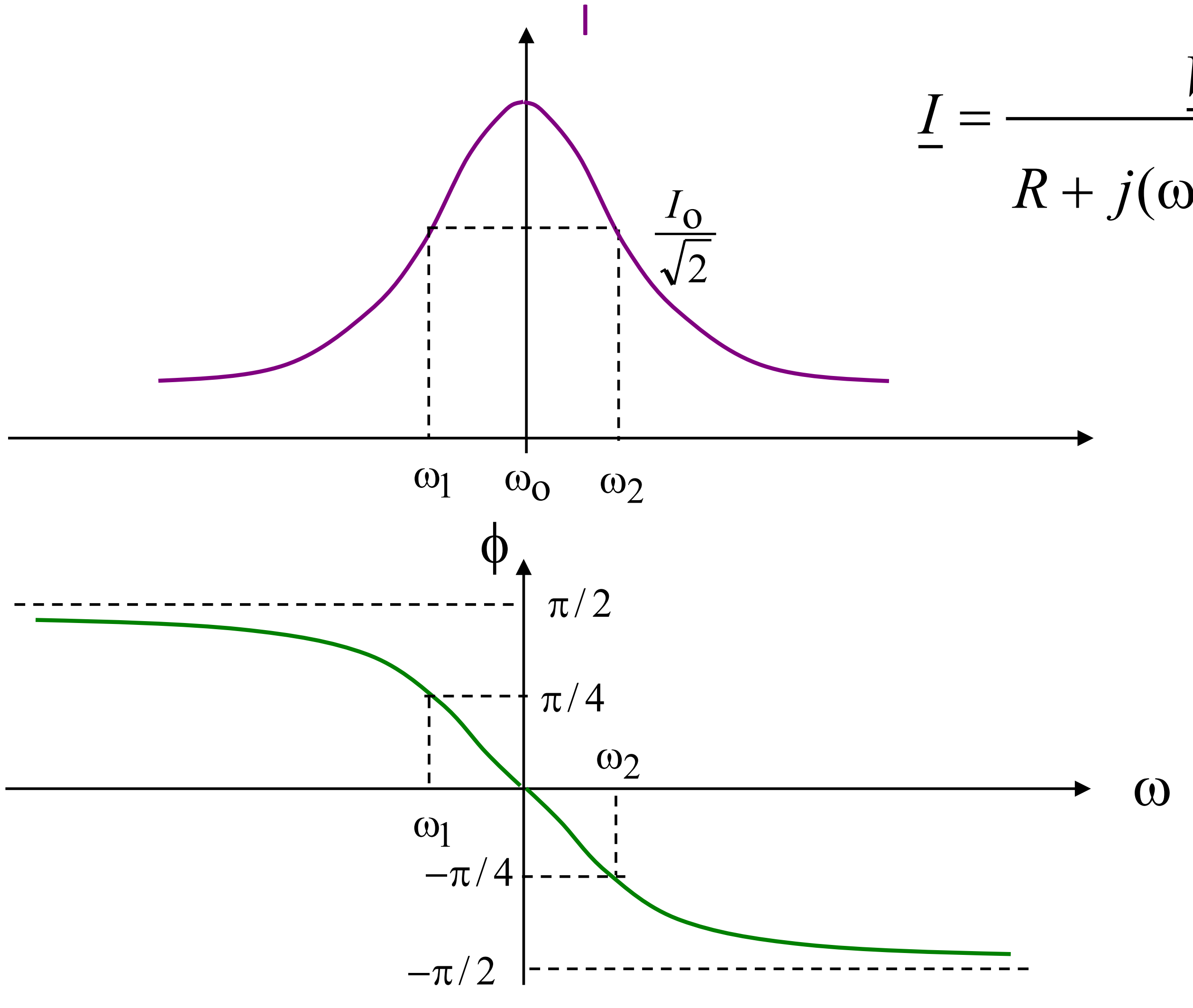
Défini à la fréquence de résonance!

$$= \frac{\omega_o L}{R_s + R_L + R_C} = \frac{1/\omega_o C}{R_s + R_L + R_C}$$

Et alors $$\frac{1}{Q_o} = \frac{R_s}{\omega_o L} + \frac{R_L}{\omega_o L} + \frac{R_C}{1/\omega_o C} = \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}$$

où $Q_s = \omega_o L / R_s$ et Q_L et Q_C sont respectivement les facteurs de qualité de l'inductance et de la capacité à la fréquence de résonnance.

Circuit résonant série

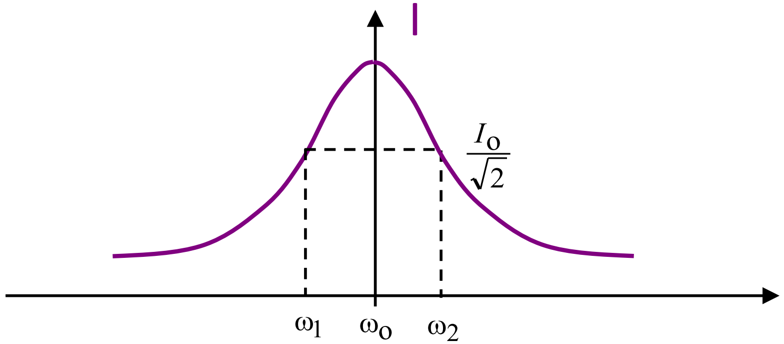


$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Circuit résonant série

On peut facilement démontrer que:

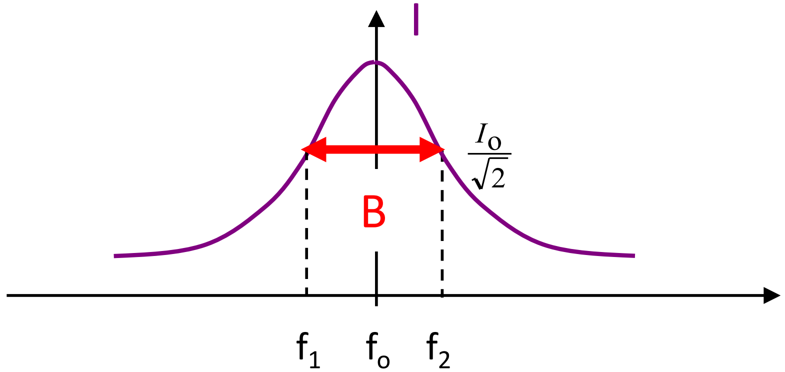
$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \omega_o \frac{R}{\omega_o L} = \frac{\omega_o}{Q_o}$$



En définissant $f_o = \dfrac{\omega_o}{2\pi}$

La bande passante B du circuit est définie par

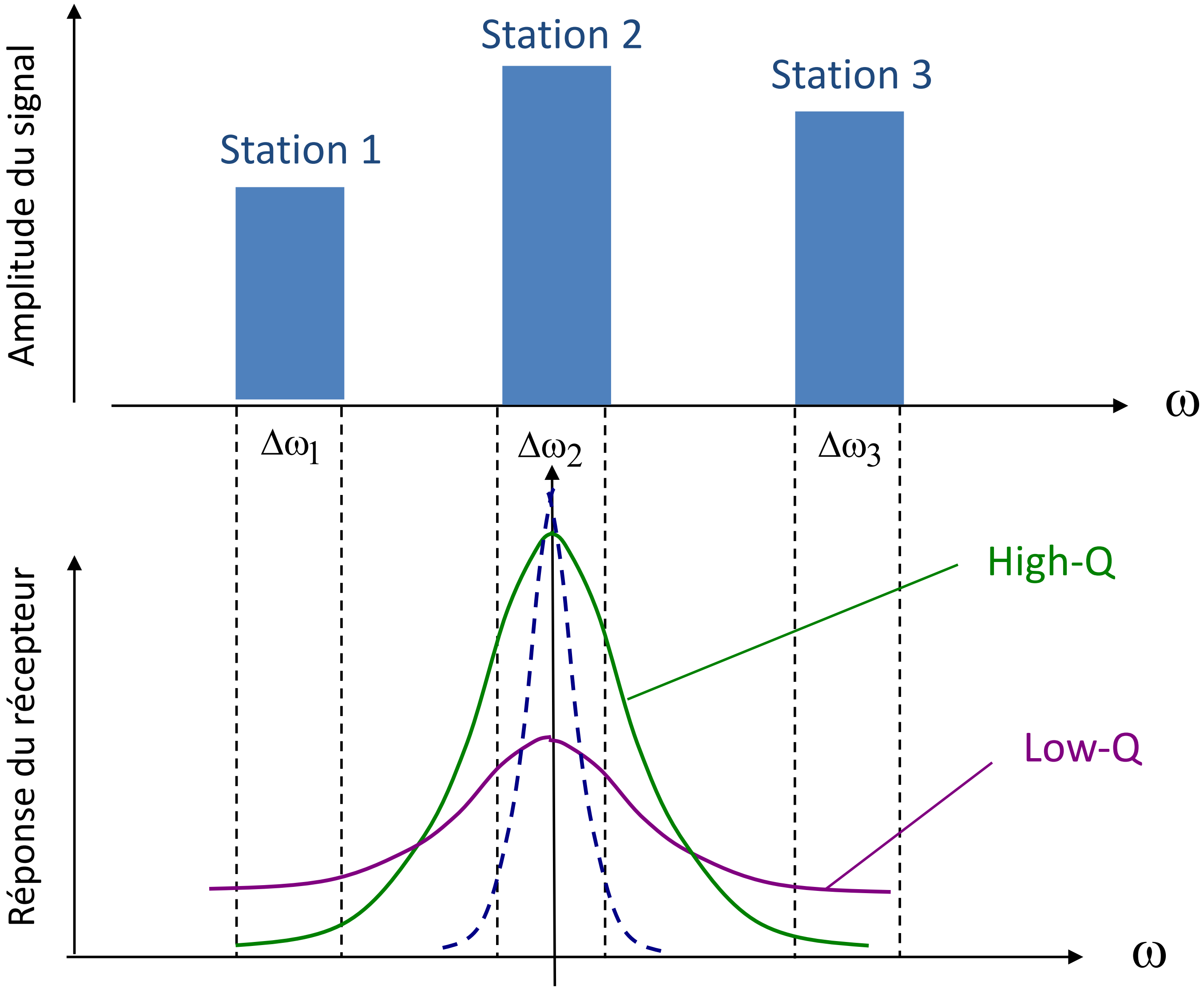
$$B = \frac{f_o}{Q_o}$$



Importance du facteur de qualité

- Cette relation montre qu'un circuit avec un grand facteur de qualité a une petite bande passante et vice-versa.
- La sélectivité en fréquence et les propriétés d'amplification de circuits résonants jouent un grand rôle dans les équipements de télécommunication. Nous avons vu que ces propriétés peuvent se décrire à l'aide du facteur de qualité.
- Par exemple, lorsqu'un circuit résonant est utilisé dans un récepteur radio pour sélectionner une station parmi d'autres, il est important d'utiliser un circuit avec un grand facteur de qualité pour éviter de recevoir les signaux d'une station adjacente. Cette situation est illustrée à la figure suivante.

Importance du facteur de qualité



Importance du facteur de qualité

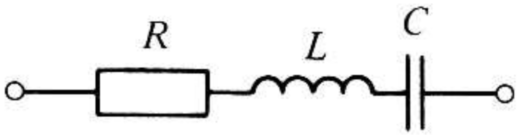
- Il est aussi important de réaliser qu'un facteur de qualité trop grand (courbe bleue en pointillé) n'est pas non plus désirable car les composantes fréquentielles du signal sélectionné seront atténuées.
- Il faut aussi mentionner que la situation illustrée par la figure précédente est hautement simplifiée; en pratique, plusieurs circuits résonants sont utilisés dans un récepteur, chacun accordé à une fréquence légèrement différente pour atteindre la réponse désirée.

Exemple

- Une bobine d'inductance et une capacité variable sont connectées à une source de tension pour former un circuit résonant série. La bobine a une inductance de 0.2 mH et un facteur de qualité de 150. La capacité a une résistance interne série de 0.502 Ω. Le générateur est réglé sur une fréquence de 1 MHz, une tension à vide de 2 V et sa résistance interne est de 2 Ω. Calculer (a) la valeur de la capacité pour accorder le circuit, (b) la résistance totale et le facteur de qualité total du circuit, (c) le courant complexe à la fréquence de résonnance et à 10 kHz au-dessus de la fréquence de résonnance.

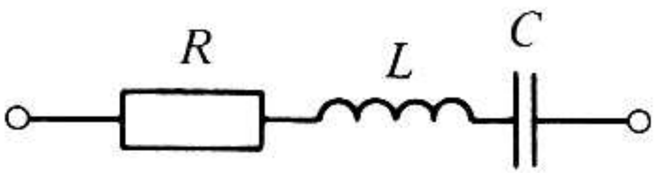
Lieu complexe

Le lieu complexe relatif à une grandeur complexe est l
par l'extrémité du vecteur représentant cette grandeu
varier un paramètre, généralement la pulsation ω.



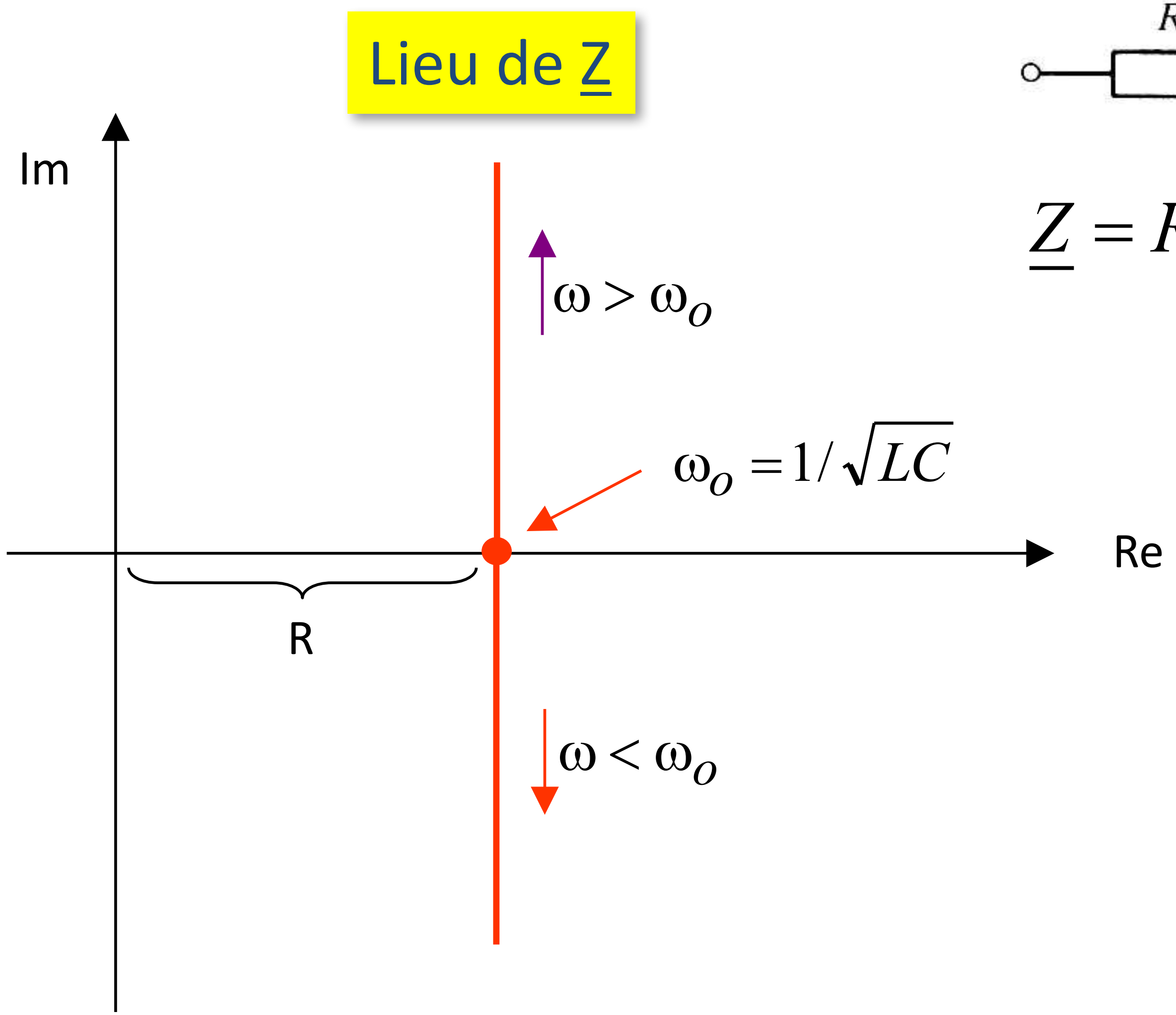
$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

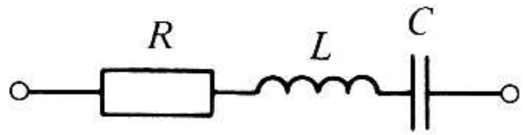
Exemple: circuit résonnant RLC série



$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Lieu complexe: circuit résonnant série

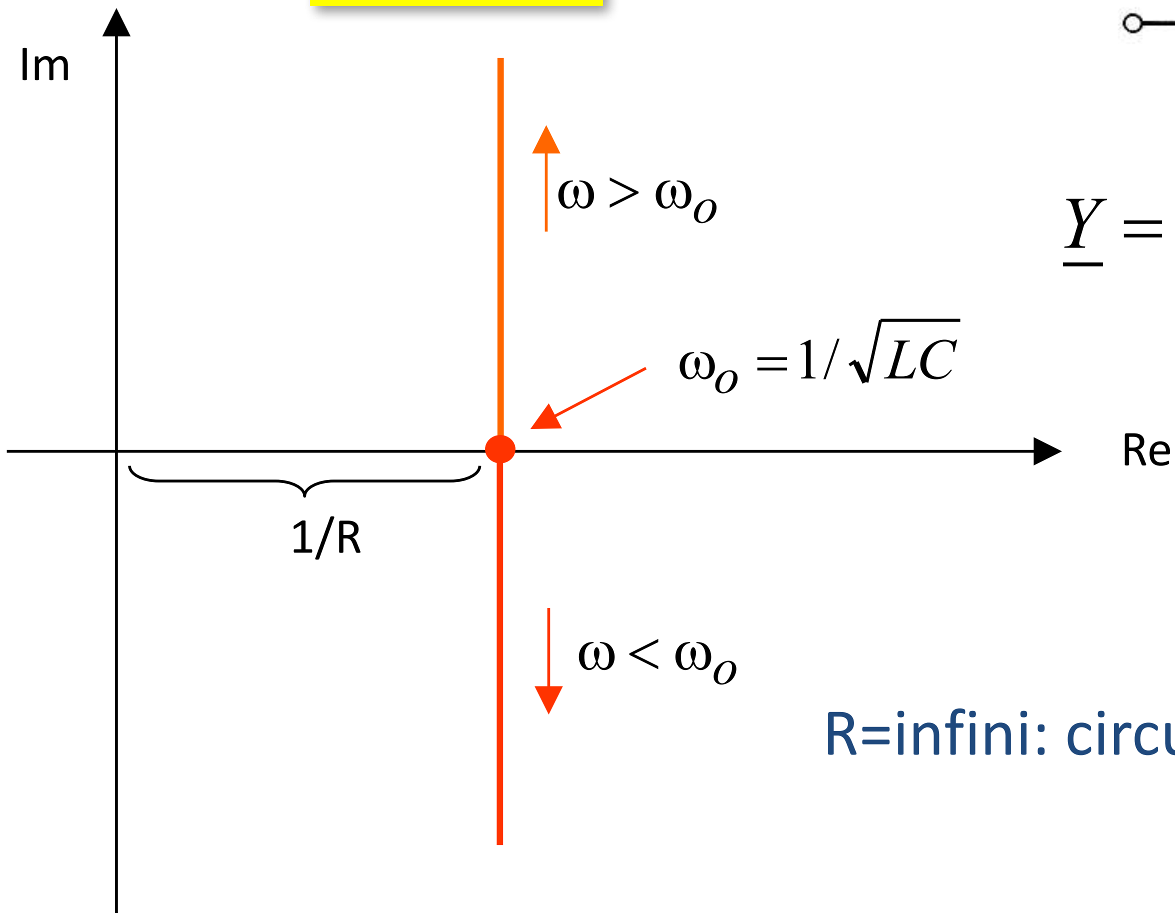


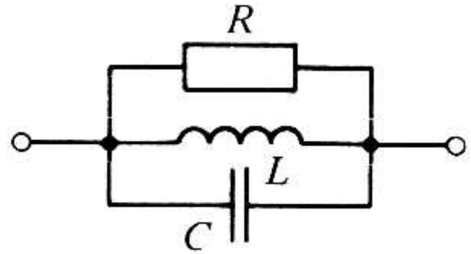


$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Lieu complexe: circuit résonnant parallèle

Lieu de $\underline{Y}$

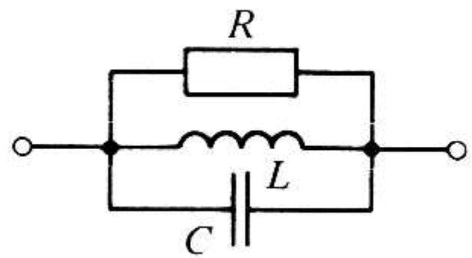




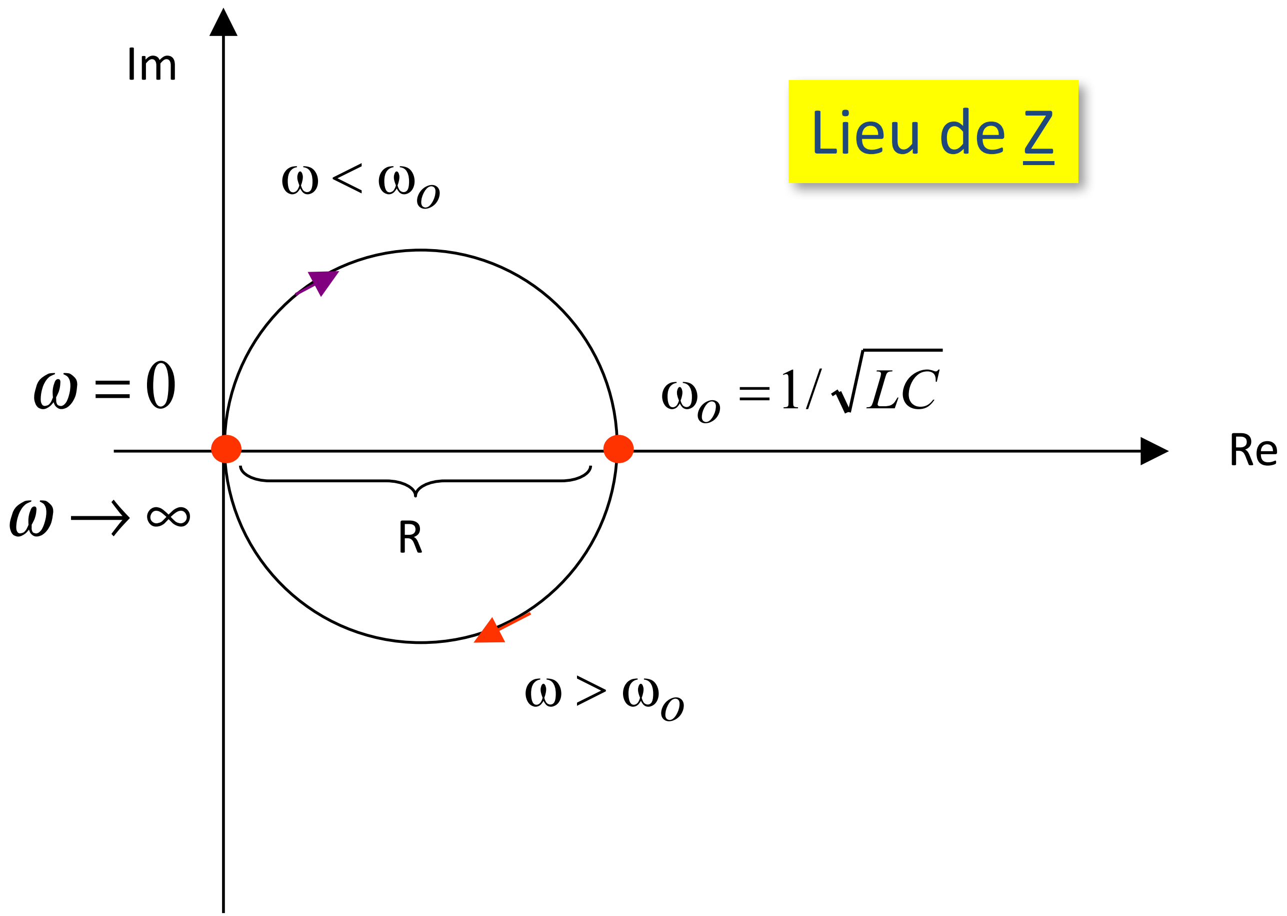
$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

R=infini: circuit bouchon

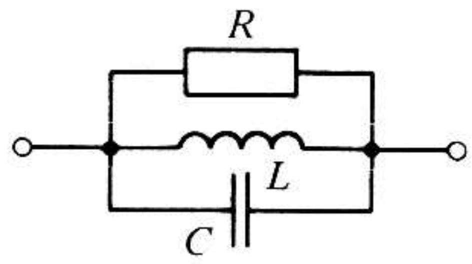
Lieu complexe



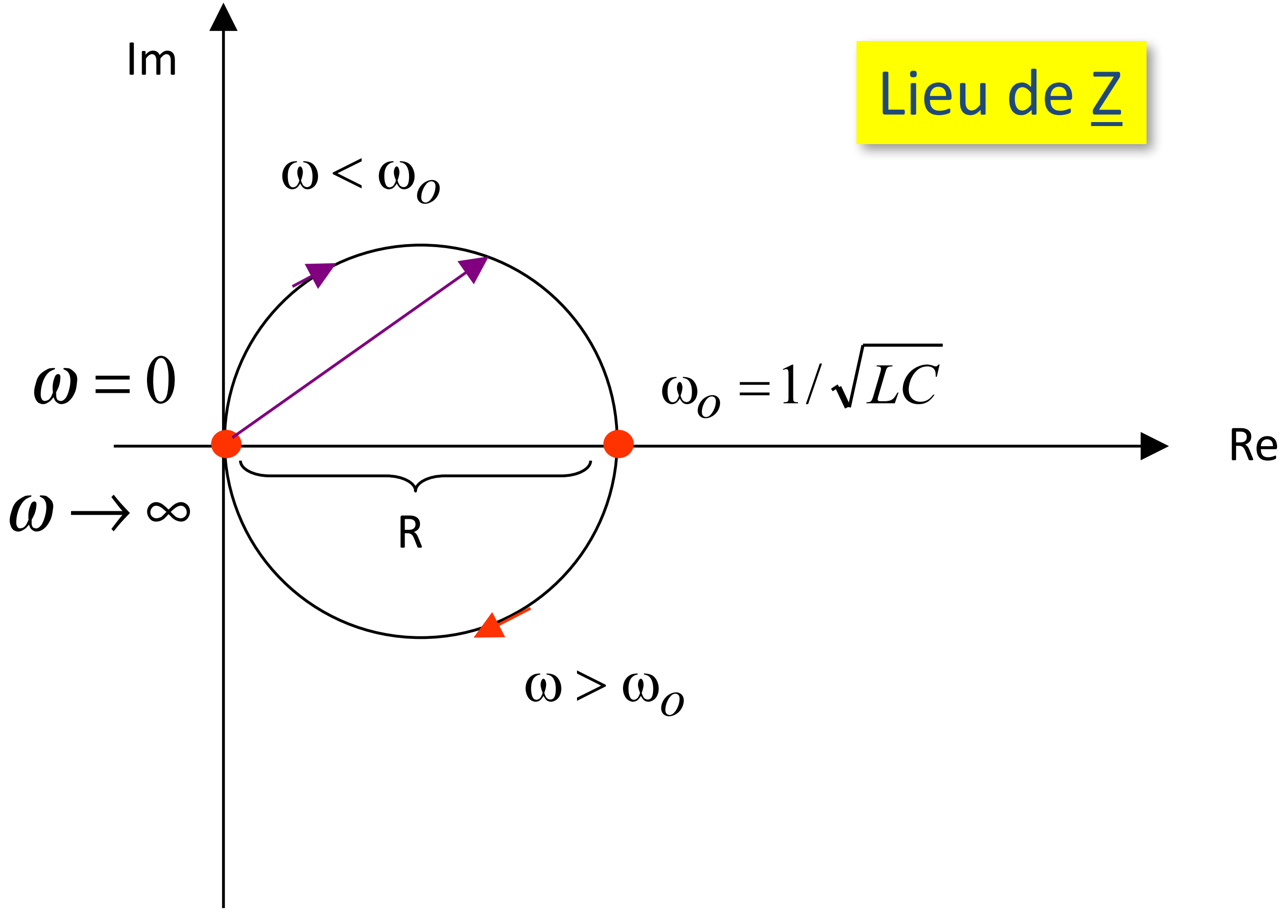
Dans le plan complexe, l’inverse d’une droite (demi-droite) est un cercle (demi-cercle).



Lieu complexe

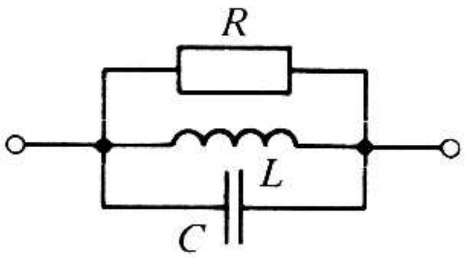


Dans le plan complexe, l'inverse d'une droite (demi-droite) est un cercle (demi-cercle).



Question

A la fréquence de résonance ($1/\sqrt{LC}$), l'impédance du circuit…



A. est maximal

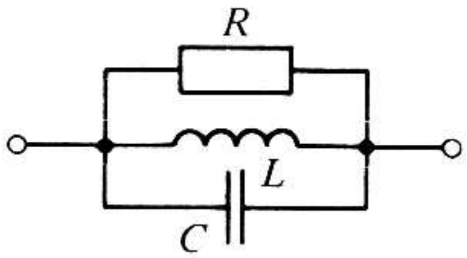
B. est minimal

C. est nulle

D. est infinie

Question

Comment se comporte le circuit à la fréquence de résonance ($1/\sqrt{LC}$), lorsque R tend vers l'infini?



A. Court-circuit

B. Circuit ouvert

C. Une pure inductance

D. Eune pure capacité