Circuits et Systèmes I
Chapitre 5: Circuits en Régime Sinusoïdal 2

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

Circuits en régime sinusoïdal 2

- Phaseurs et nombres complexes
- Nombres complexes
  - Notions d'algèbre complexe
  - Formule d'Euler
  - Dérivation et intégration
- Phaseurs
  - Définition
  - Opérations élémentaires
- Impédance et admittance

Phaseurs et nombres complexes

- Phaseur: moyen simple de représenter des tensions et courants sinusoïdaux. Cette méthode a été proposée par C.P. Steinmetz et est basée sur la relation d'Euler.

Charles Proteus **Steinmetz** (1865-1923), ingénieur électricien américain d'origine allemande. Il développa la méthode symbolique pour les calculs en courant alternatif.

Nombres complexes: définition

- On appelle nombre complexe *z* toute expression de la forme

$$z = a + \mathrm{j}b$$

où $$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \qquad \mathrm{j}^2 = -1$$

et $$\mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} \qquad \mathrm{j}^4 = 1 \qquad \text{Etc.}$$

Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), astronome, mathématicien et physicien allemand. Il introduisit le calcul complexe en 1801.

Notions d’algèbre complexe

- Égalité de deux nombres complexes

$$z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2$$

- Conjugué complexe de $z = a + \mathrm{j}b$

$$z^* = a - \mathrm{j}b$$

$$z + z^* = 2a$$

Notions d’algèbre complexe

- Addition et soustraction

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}(b_1 - b_2)$$

- Multiplication

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + \mathrm{j}(b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)$$

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2$$

Notions d'algèbre complexe

- Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

- Conjugué complexe des opérations élémentaires

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$$

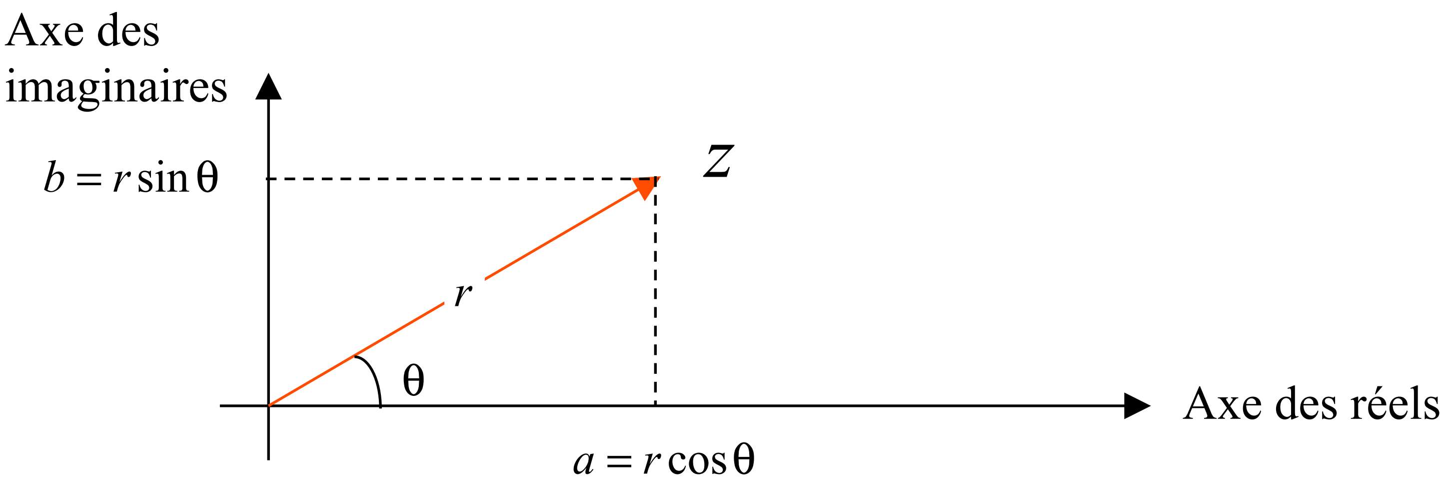
Nombres complexes: représentation géométrique

$$z = a + \mathrm{j}b$$

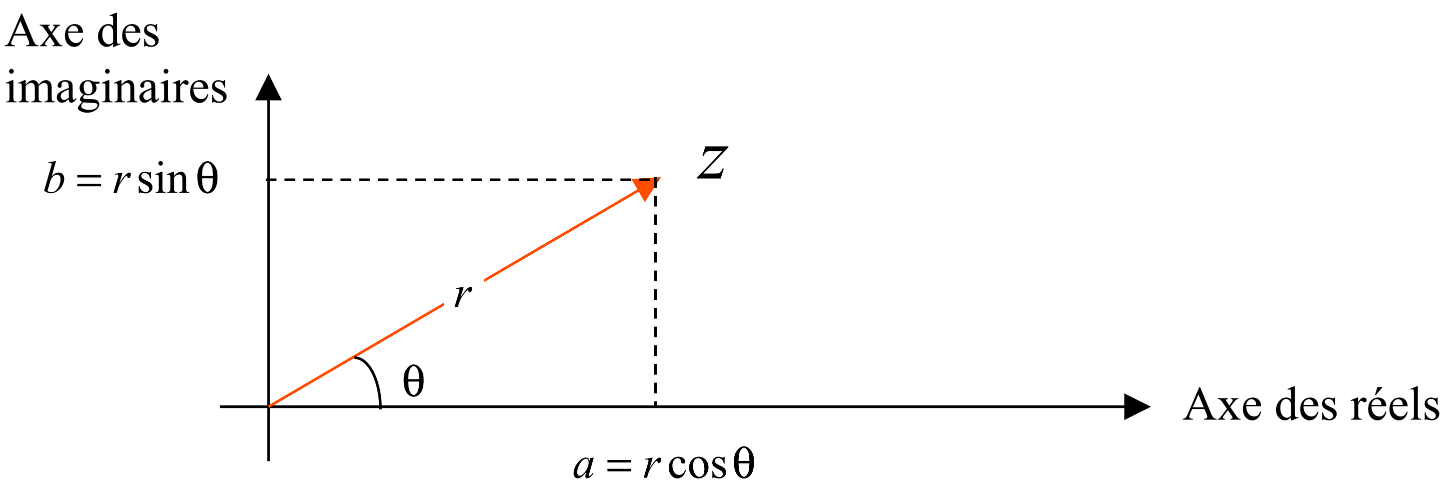
- On appelle *a* la partie réelle, et *b* la partie imaginaire du nombre complexe *z*.

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

- Représentation dans le plan complexe:



Nombres complexes: représentation géométrique



$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$:module du nombre complexe

$\theta = \arg(z) = \arctan\frac{b}{a}$:argument du nombre complexe

Nombres complexes: D'autres propriétés

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Distance entre deux nombres complexes:

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Nombres complexes: Formule d'Euler

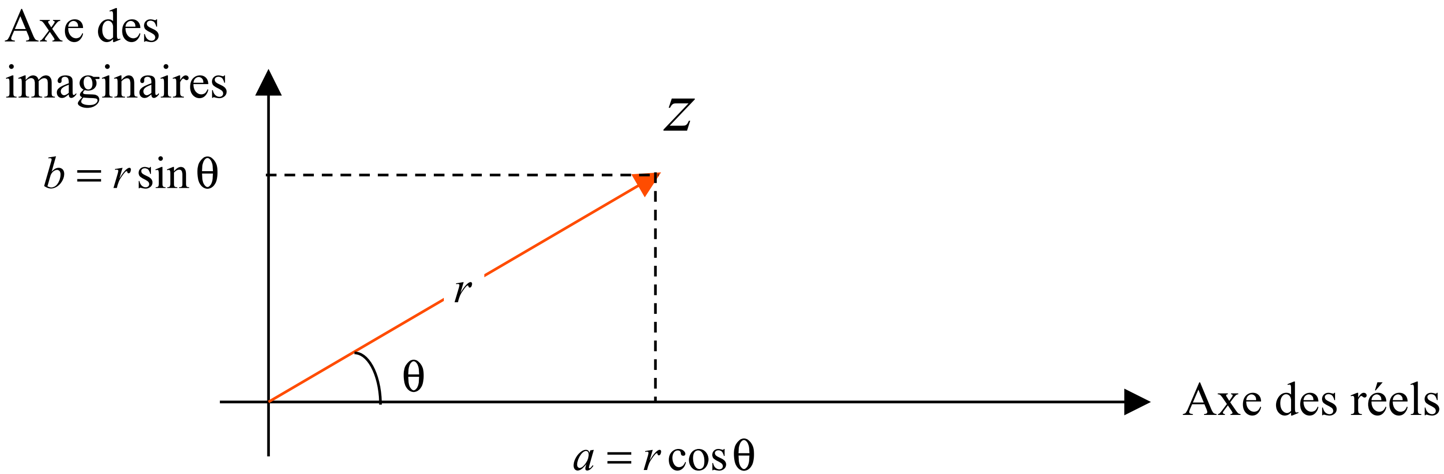
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right) \end{cases}$$

Leonhard **Euler** (1707-1783), mathématicien suisse mort à Saint-Pétersbourg.

Nombres complexes: Formule d'Euler

$$z = a + jb = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$



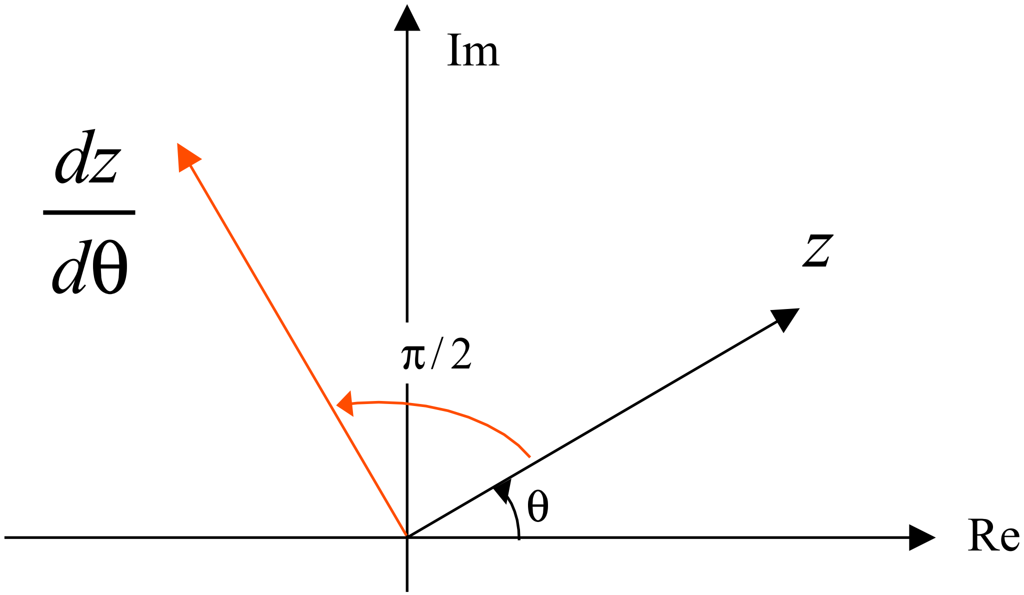
Cas particulier: $j = e^{j\pi/2}$

Nombres complexes: Dérivation par rapport à l'argument

$$\boxed{e^{j\pi/2}e^{j\theta} = e^{j(\theta+\pi/2)}}$$

$$z = re^{j\theta}$$

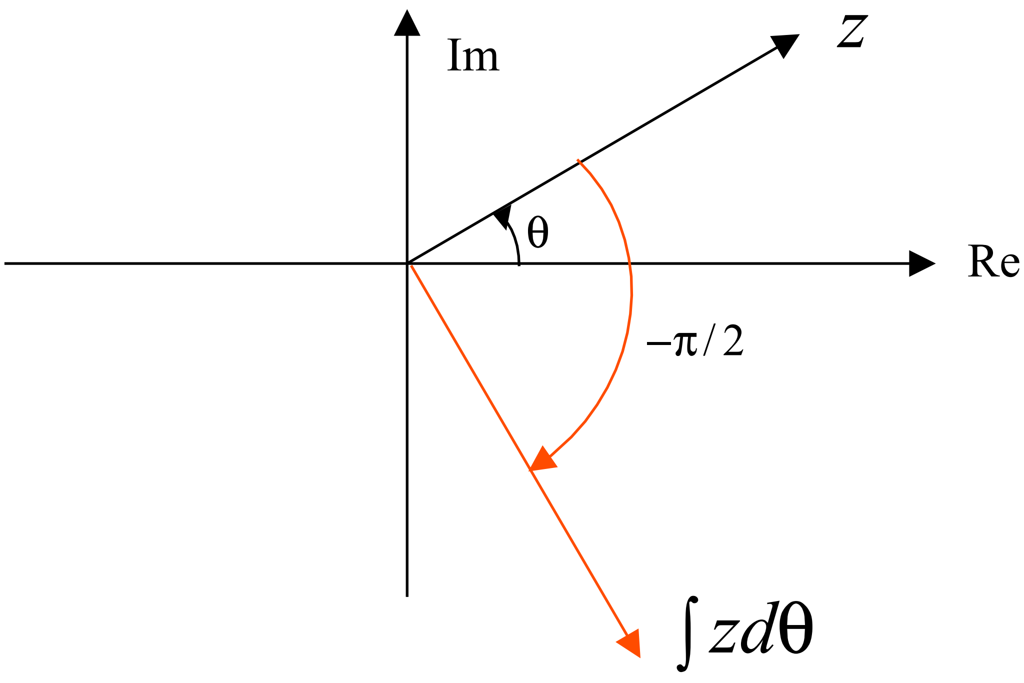
$$\frac{dz}{d\theta} = rje^{j\theta} = re^{j\pi/2}e^{j\theta} = re^{j(\theta+\pi/2)}$$



Nombres complexes: Intégration par rapport à l'argument

$$z = re^{j\theta}$$

$$\int z d\theta = \int re^{j\theta} d\theta = rj^{-1} e^{j\theta} = re^{j(\theta - \pi/2)}$$



Nombres complexes:
Puissances et racines

Puissance:

$$z = a + jb = re^{j\theta}$$

$$z^n = r^n e^{jn\theta}$$

Racine:

$$w = \sqrt[n]{z} = \rho e^{j\psi}$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\psi = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi$$

Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

Rappel: Formule d'Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

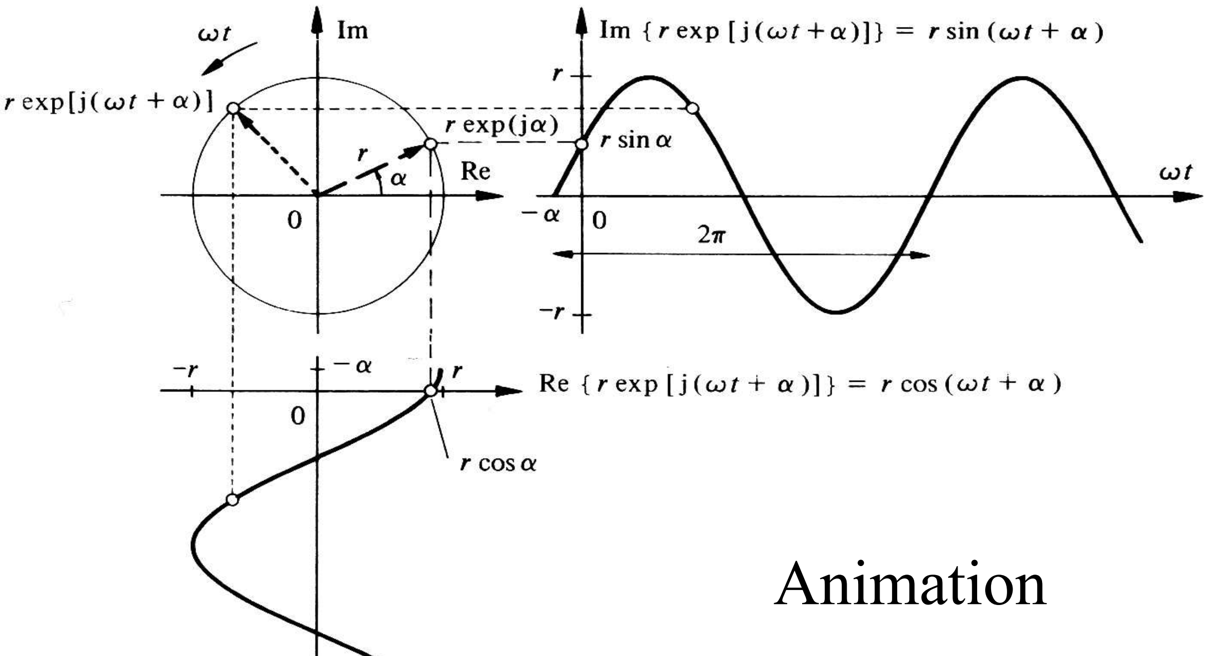
Soit une fonction sinusoïdale

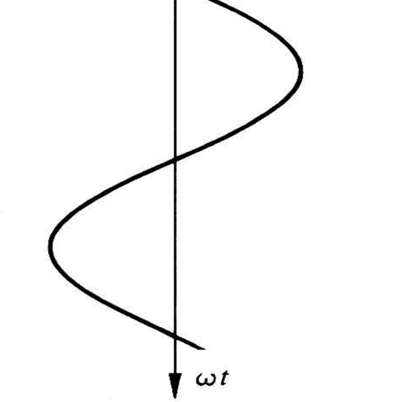
$$x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}Xe^{j(\omega t+\theta)}\right\}$$

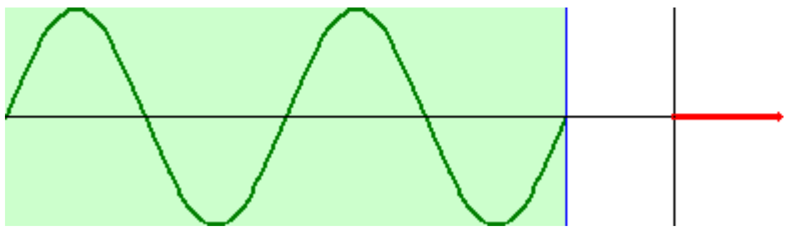
$\underline{x} = \sqrt{2}Xe^{j(\omega t+\theta)}$:valeur instantanée complexe

Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale





Animation



sinusoidal ii

Le phaseur

$$x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \theta) \Longleftrightarrow \underline{x} = \sqrt{2}Xe^{j(\omega t+\theta)}$$

$$\underline{x} = \sqrt{2}Xe^{j(\omega t+\theta)} = \sqrt{2}Xe^{j\theta}e^{j\omega t}$$

Dans un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent, tous les courants et les tensions ont la même pulsation ω. Le terme exp(jωt) est donc commun à toutes les grandeurs (courants et tensions du circuit. Toute grandeur peut être caractérisé uniquement par son amplitude (valeur efficace) X et sa phase θ.

$\Rightarrow$ Le phaseur associé à x(t):

$$\boxed{\underline{X} = Xe^{j\theta}}$$

Le phaseur

$$x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \theta) \Longleftrightarrow \underline{x} = \sqrt{2}Xe^{j(\omega t + \theta)}$$

$$\underline{x} = \sqrt{2}$$

Dans un cir … ermanent, tous les co … . Le terme exp(jωt) es … nts et tensions du circuit. T … ent par son amplitude …

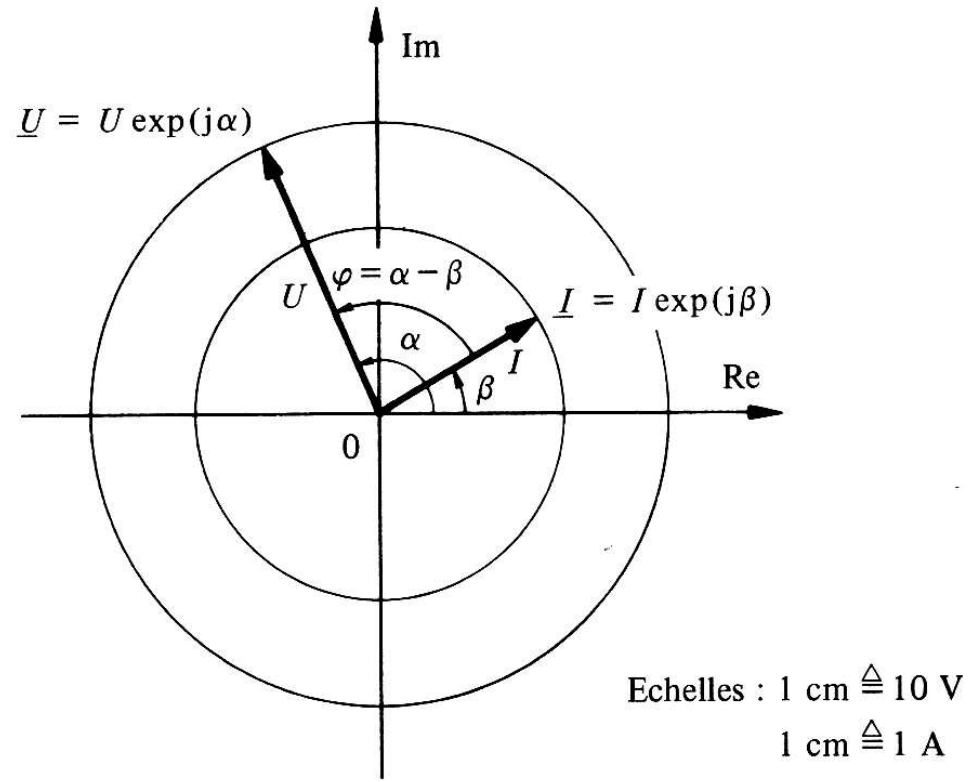
Un phaseur ne dépend pas du temps

⇒ Le phaseur associé à x(t): $\boxed{\underline{X} = Xe^{j\theta}}$

Diagramme des phaseurs

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) \Longleftrightarrow \underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) \Longleftrightarrow \underline{I} = Ie^{j\beta}$$

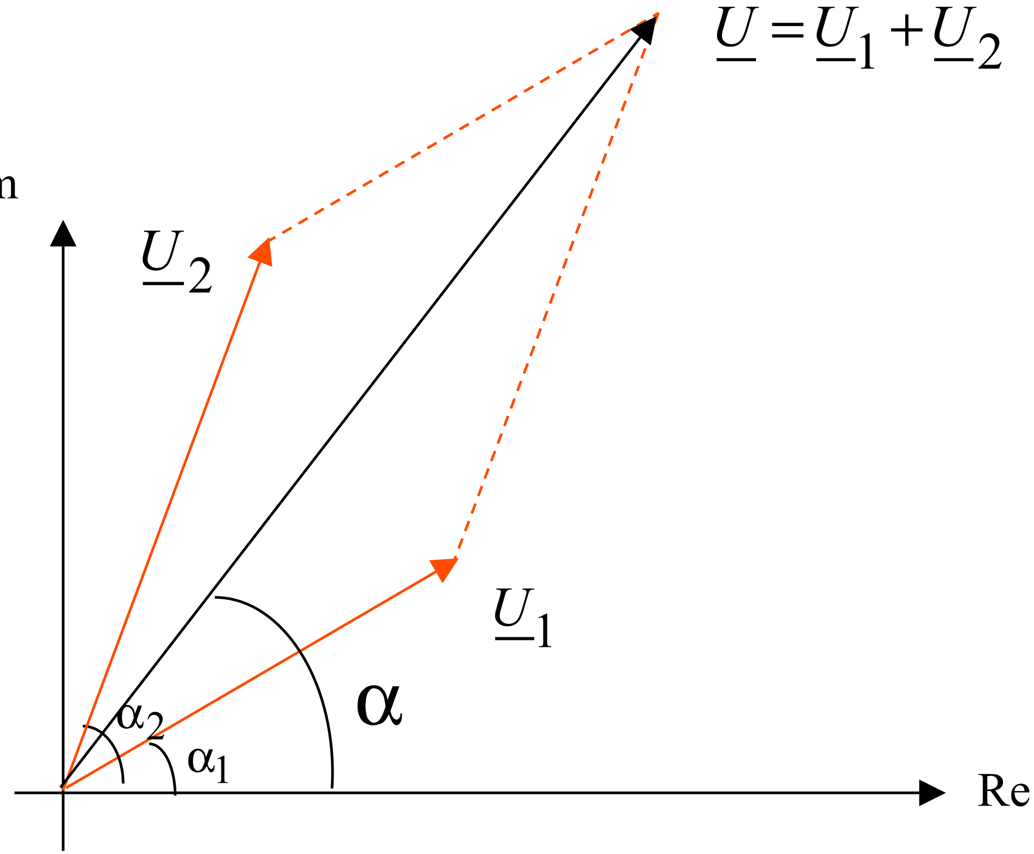


Opérations élémentaires sur les phaseurs

- Addition

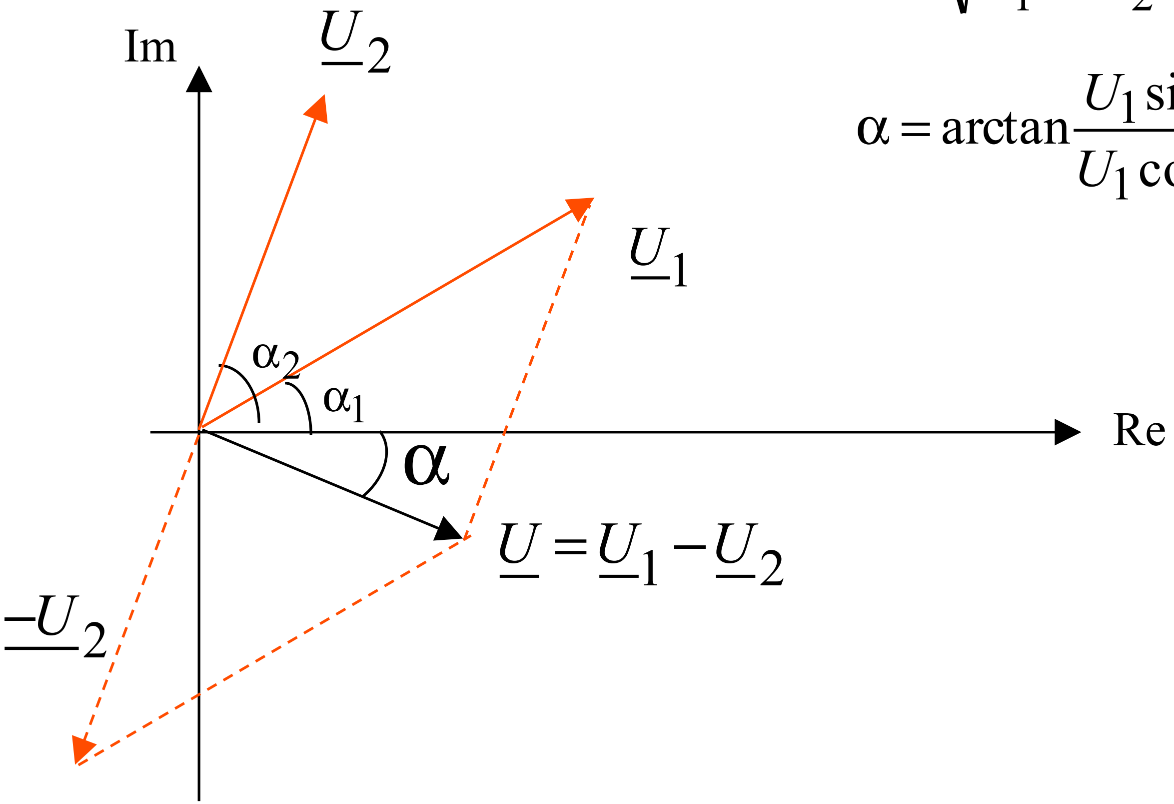
$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\alpha = \arctan\frac{U_1\sin\alpha_1 + U_2\sin\alpha_2}{U_1\cos\alpha_1 + U_2\cos\alpha_2}$$



Opérations élémentaires sur les phaseurs

- Soustraction



$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\alpha = \arctan\frac{U_1\sin\alpha_1 - U_2\sin\alpha_2}{U_1\cos\alpha_1 - U_2\cos\alpha_2}$$

Opérations élémentaires sur les phaseurs

- Multiplication

$$\underline{X} = Xe^{j\alpha} \qquad \underline{Y} = Ye^{j\beta}$$

$$\underline{Z} = \underline{X} \cdot \underline{Y} = Xe^{j\alpha}Ye^{j\beta} = Ze^{j\varphi}$$

avec $Z = XY$ et $\varphi = \alpha + \beta$

Opérations élémentaires sur les phaseurs

- Quotient

$$\underline{X} = Xe^{j\alpha} \qquad \underline{Y} = Ye^{j\beta}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{X}}{\underline{Y}} = \frac{Xe^{j\alpha}}{Ye^{j\beta}} = Ze^{j\varphi}$$

avec $Z = \dfrac{X}{Y}$ et $\varphi = \alpha - \beta$

Dérivation d'une grandeur sinusoïdale

$x(t) = \sqrt{2} X \cos(\omega t + \theta)$ Grandeur sinusoïdale

$\underline{x} = X e^{j\theta} e^{j\omega t}$ Valeur instantanée complexe

$\underline{X} = X e^{j\theta}$ Phaseur

Dérivation par rapport au temps: $y = \dfrac{dx}{dt}$

$$\underline{y} = \frac{d\underline{x}}{dt} = X e^{j\theta} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{Y} = j\omega \underline{X}$$

Equivaut à une multiplication par jω !

Dérivation d'une grandeur sinusoïdale

$$\underline{y} = \frac{d\underline{x}}{dt} = Xe^{j\theta} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{Y} = j\omega \underline{X}$$

Généralisation:

$$\underline{z} = \frac{d^n \underline{x}}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{Z} = (j\omega)^n \underline{X}$$

Intégration d'une grandeur sinusoïdale

Intégration par rapport au temps: $y = \int x(t)dt$

$$\underline{y} = \int \underline{x}dt = \int Xe^{j\theta}e^{j\omega t}dt = \frac{X}{j\omega}e^{j\theta}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{x}$$

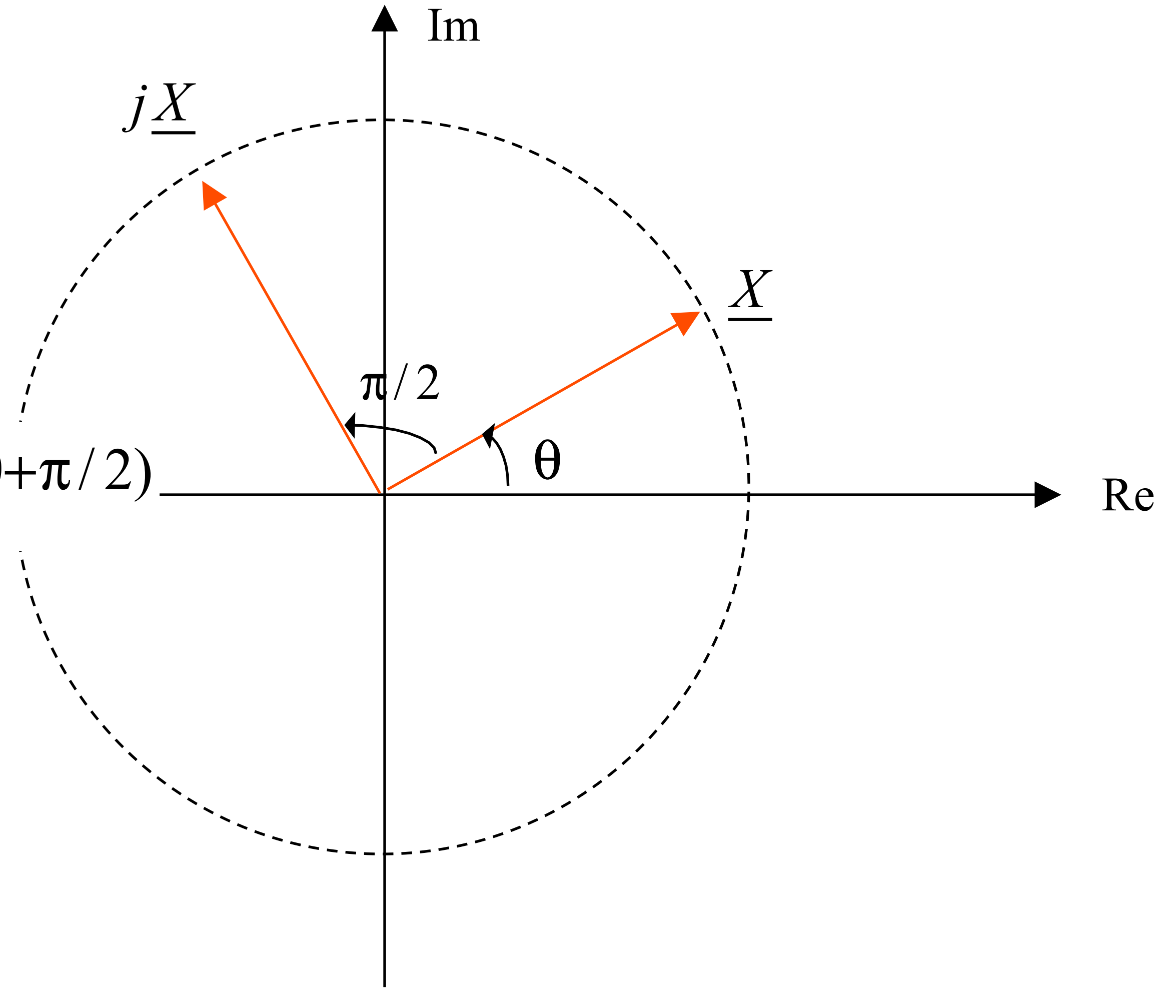
$$\Longleftrightarrow \quad \underline{Y} = \frac{1}{j\omega}\underline{X}$$

Equivaut à une division par jω !

Dérivation et intégration d'une grandeur sinusoïdale

- L'utilisation d'une représentation complexe des grandeurs sinusoïdales permet de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par une multiplication ou une division par $j\omega$.
- Ainsi une équation intégro-différentielle se transforme en une équation algébrique!

Interprétation géométrique

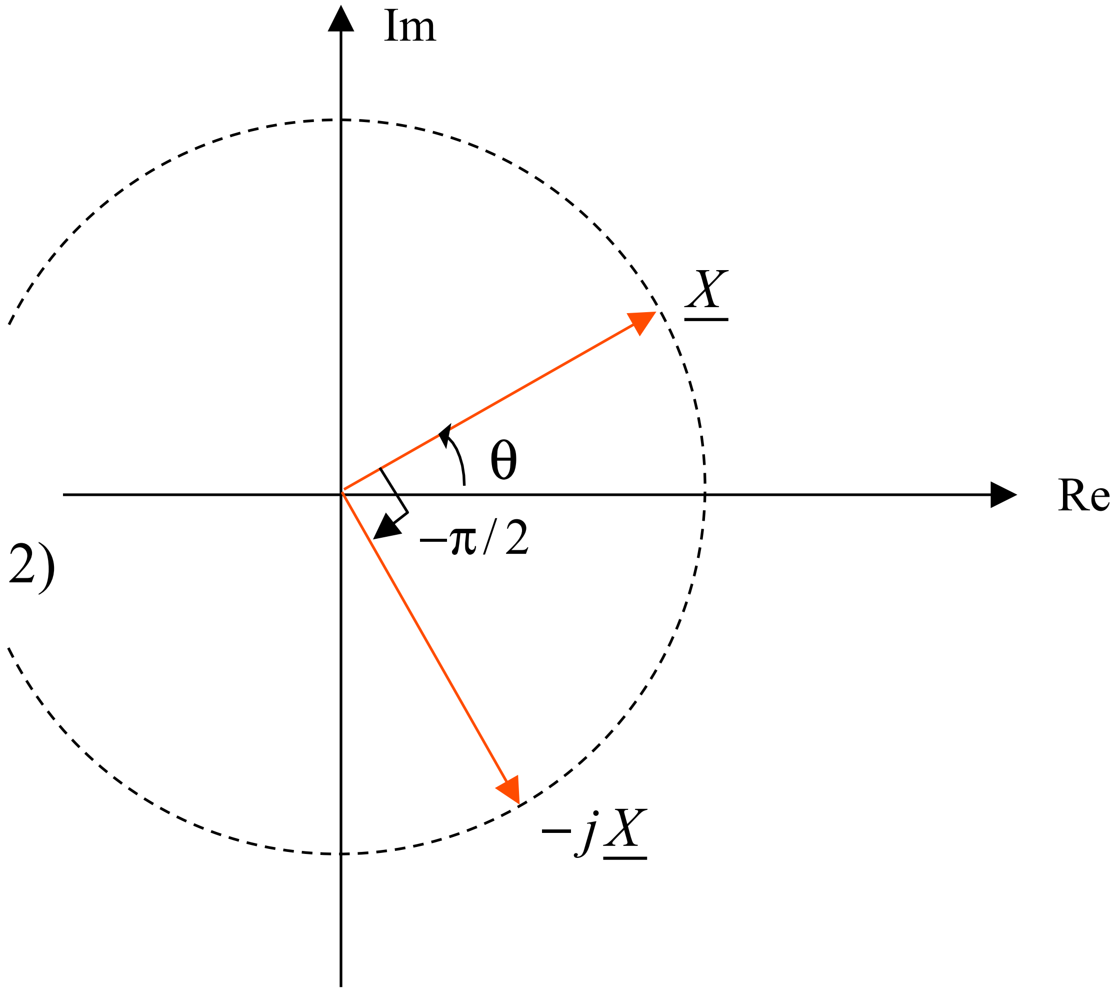


$$j\underline{X} = e^{j\pi/2}\,\underline{X} = Xe^{j(\theta+\pi/2)}$$

Interprétation géométrique

$$\frac{\underline{X}}{j} = -j\underline{X}$$

$$= e^{-j\pi/2}\underline{X} = Xe^{j(\theta-\pi/2)}$$



Impédance et admittance

- L'impédance complexe d'un bipôle en régime permanent sinusoïdal:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

- L'admittance complexe d'un bipôle en régime permanent sinusoïdal:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Impédance et admittance

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha} \qquad \underline{I} = Ie^{j\beta}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = Ze^{j\varphi}$$

$$Z = \frac{U}{I} \qquad \varphi = \alpha - \beta$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\beta}}{Ue^{j\alpha}} = Ye^{-j\varphi}$$

$$Y = \frac{I}{U} \qquad \varphi = \alpha - \beta$$

Z exprimé en ohm

Y exprimé en siemens

Impédance et admittance

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX$$

R: résistance $R = Z\cos\varphi$

X: réactance $X = Z\sin\varphi$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctan(X/R)$$

$$\underline{Y} = Ye^{-j\varphi} = G + jB$$

G: conductance $G = Y\cos\varphi$

B: susceptance $B = -Y\sin\varphi$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

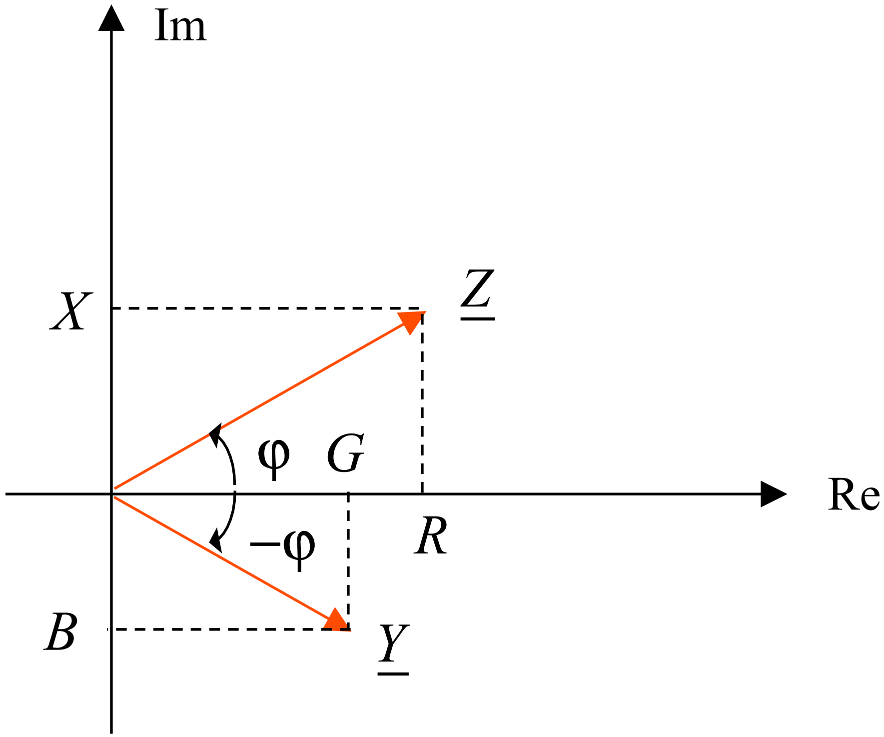
$$\varphi = \arctan(-B/G)$$

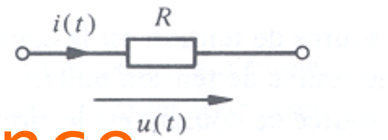
Impédance et admittance

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = Ze^{j\varphi} \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\beta}}{Ue^{j\alpha}} = Ye^{-j\varphi}$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Y} = G + jB$$

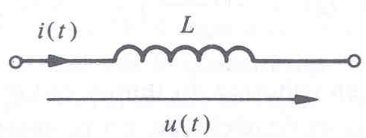




Application à la résistance

Valeurs instantanées	Phaseurs
$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\alpha)$	$\underline{U}=Ue^{j\alpha}$
$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\beta)$	$\underline{I}=Ie^{j\beta}$
$u(t)=Ri(t)$	$\underline{U}=R\underline{I}$

$$\boxed{\underline{Z}_R=R,\quad Z_R=R,\quad \varphi_R=0}$$



Application à l'inductance

Valeurs instantanées ⟷ **Phaseurs**

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) \qquad \underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

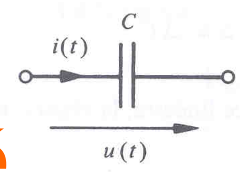
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) \qquad \underline{I} = Ie^{j\beta}$$

$$u(t) = L\frac{di}{dt} \qquad \underline{U} = j\omega L\underline{I}$$

$$\boxed{\underline{Z}_L = j\omega L, \quad Z_L = \omega L, \quad \varphi_L = \pi/2}$$

$$R_L = 0, \quad X_L = \omega L$$

Application à la capacité



Valeurs instantanées ⟷ **Phaseurs**

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) \qquad \underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) \qquad \underline{I} = Ie^{j\beta}$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} \qquad \underline{I} = j\omega C\underline{U}$$

$$\boxed{\underline{Z}_C = 1/j\omega C, \quad Z_C = 1/\omega C, \quad \varphi_C = -\pi/2}$$

$$R_C = 0, \quad X_C = -1/\omega C$$

Exemple

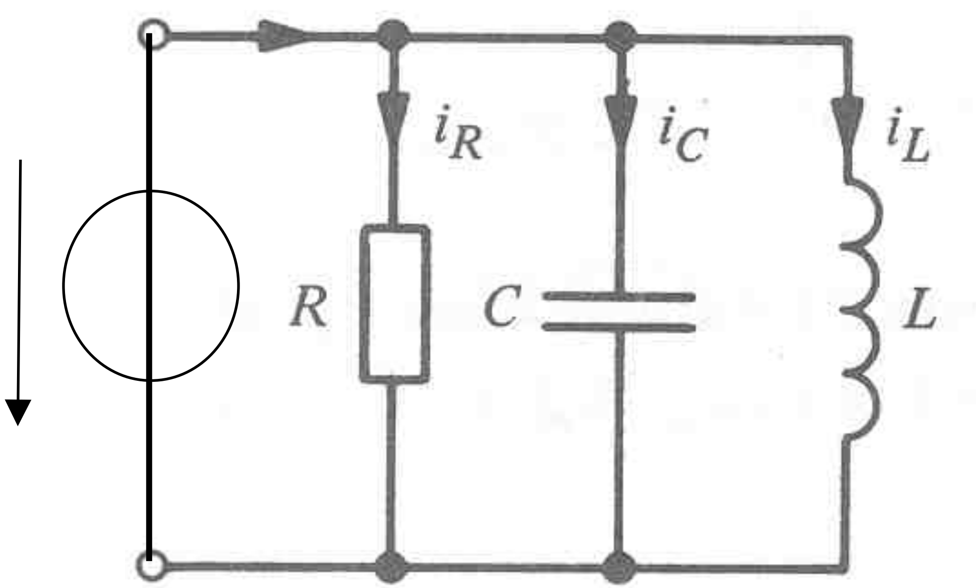
- Evaluer la valeur efficace, la fréquence et la période de la tension appliquée u(t)
- Déterminer analytiquement le courant dans chacun des éléments et celui fourni par la source
- Tracer chacun de ces courants

$$u(t) = 170\cos(157.1t + \pi/6)$$

$$R = 170\Omega$$

$$C = 46.8\mu F$$

$$L = 0.722H$$



Exemple

- Evaluer la valeur efficace, la fréquence et la période de la tension appliquée u(t)
- Déterm … des élémen…
- Tracer …

Calcul au tableau!
Mais cette fois à l'aide des phaseurs!

$u(t) = 170 \ldots$

$R = 170\Omega$

$C = 46.8\mu F$

$L = 0.722 H$