Circits et Systèmes I

Chapitre 4: Circuits en Régime Sinusoïdal 1

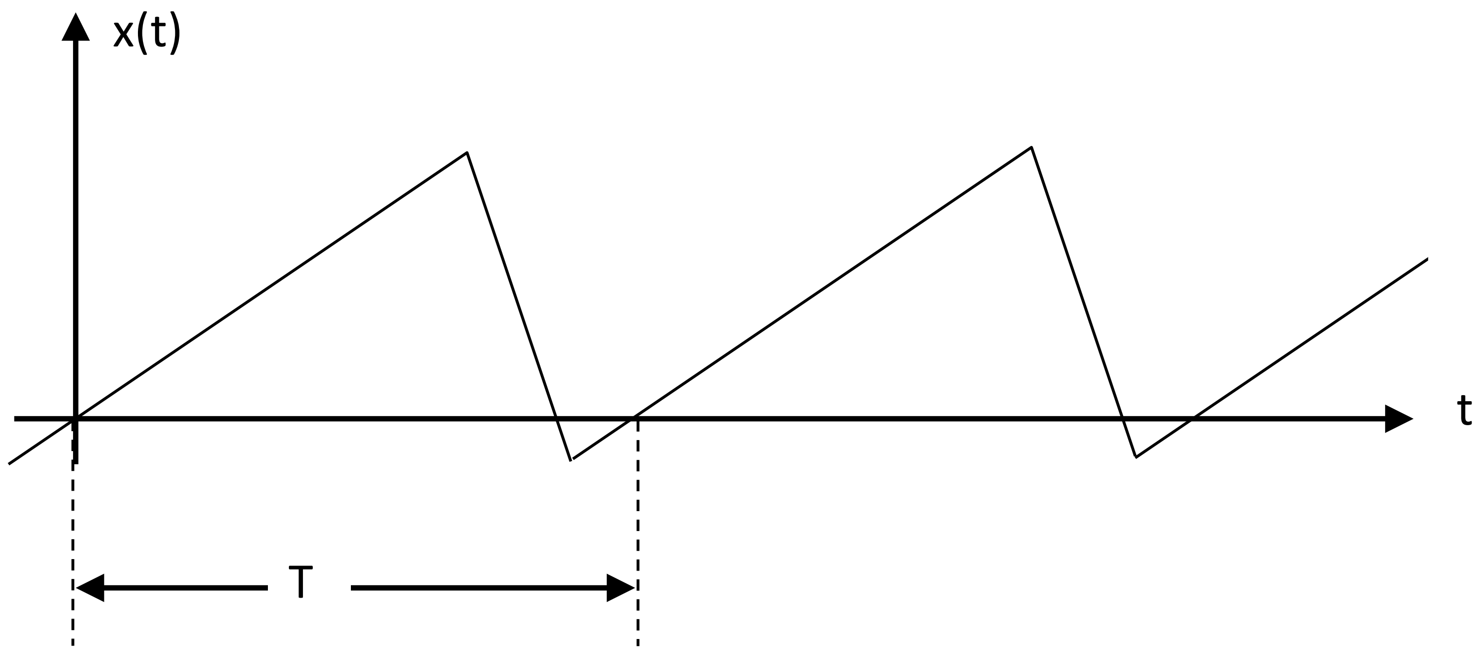
Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

Circuits en régime sinusoïdal 1

- Fonctions périodiques
- Grandeurs sinusoïdales
- Importance du régime sinusoïdal
- Réponse d’un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale
- Exemple

Fonctions périodiques

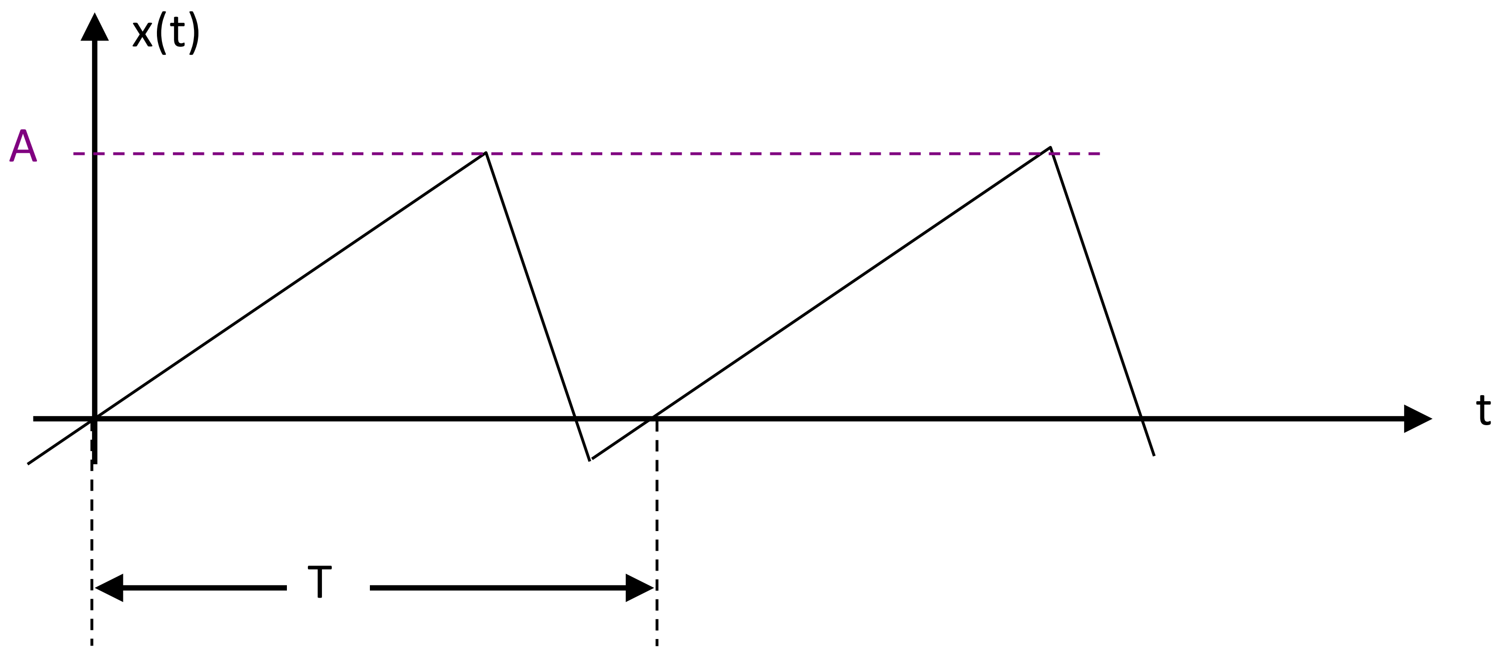
- Une fonction périodique est une fonction qui vérifie la relation f(t)=f(t+nT), où n est un nombre entier et T la période mesurée en unité de temps.



Quelques définitions

- Valeur crête ou amplitude A:

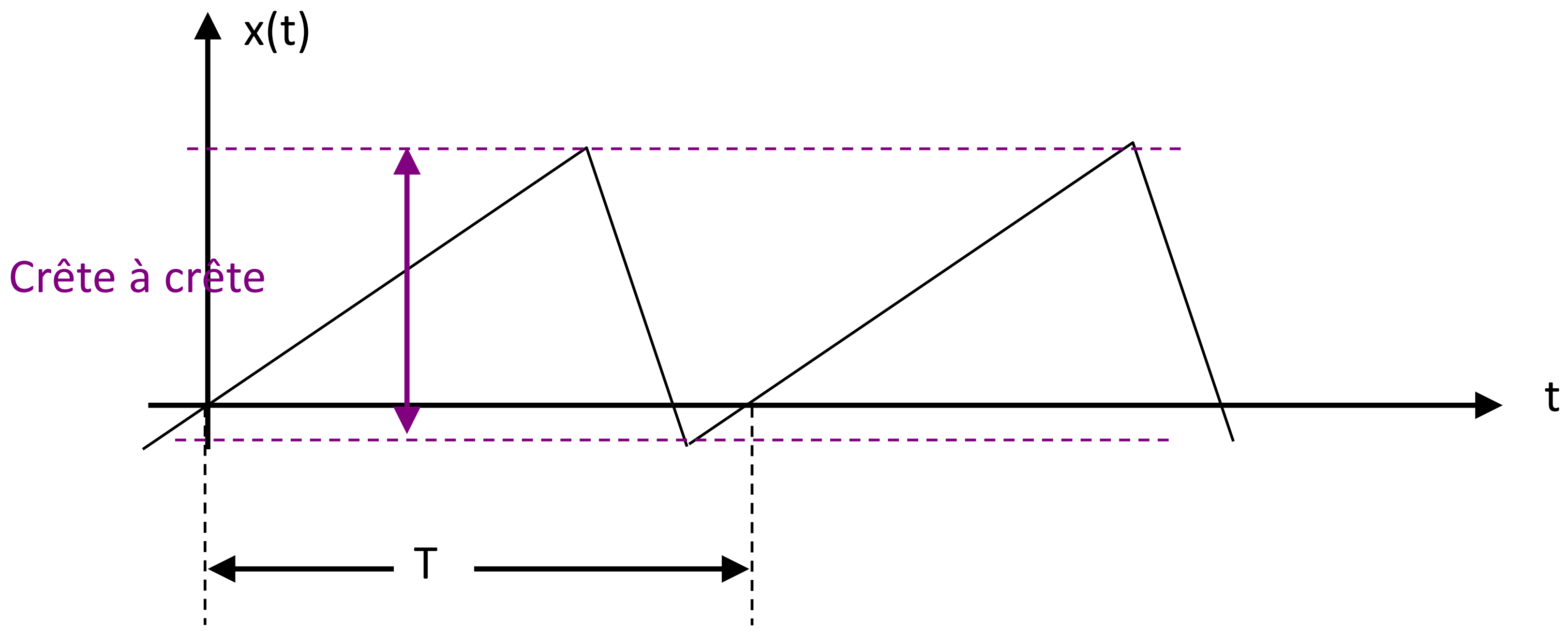
  valeur maximale d'une fonction périodique



Quelques définitions

- Valeur crête à crête:

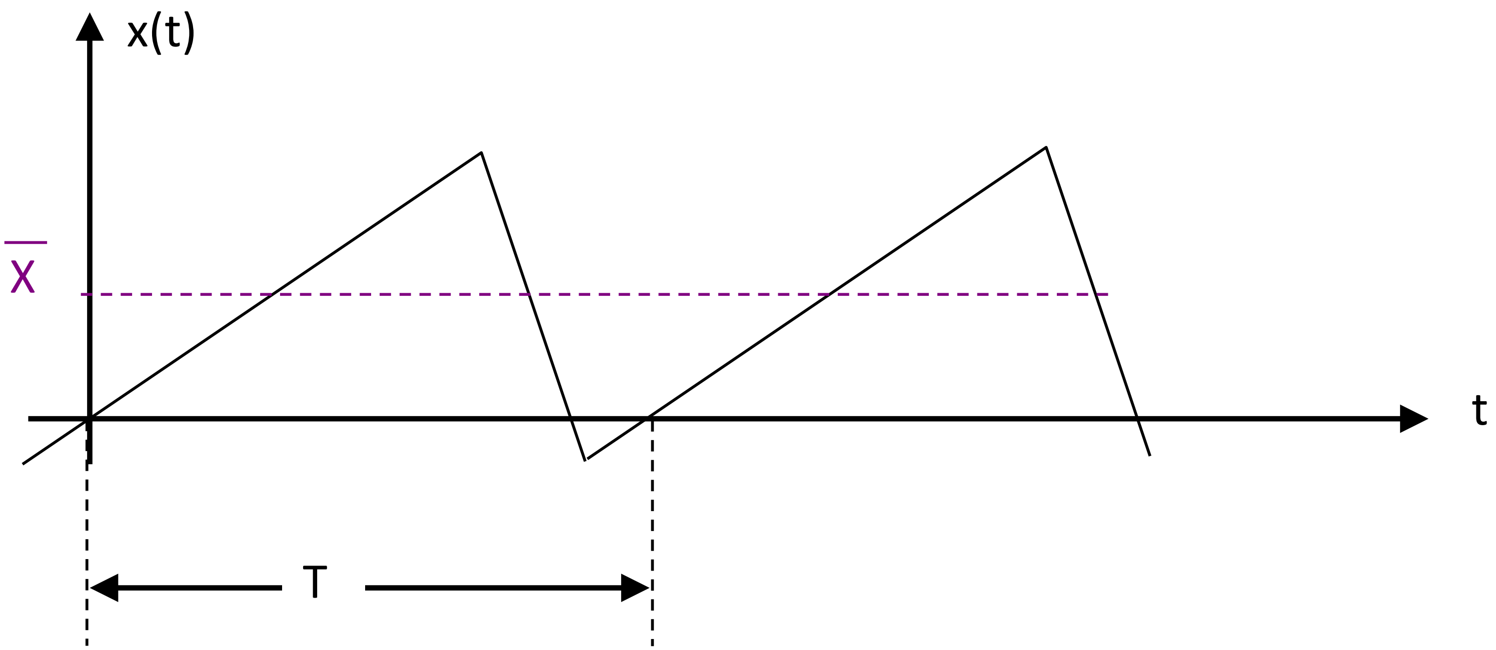
  écart maximal d'amplitude atteint durant une période



Quelques définitions

- Valeur moyenne:

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(\tau)\,d\tau$$



Quelques définitions

- Valeur efficace:

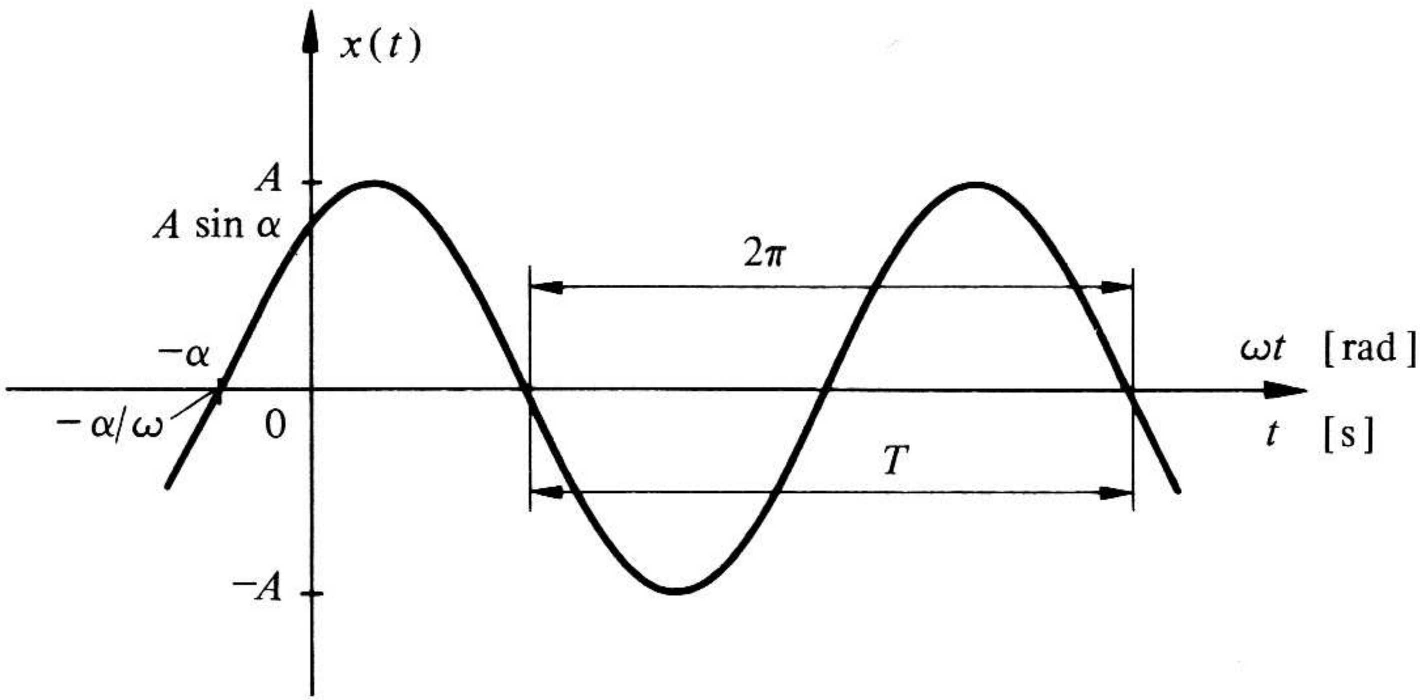
$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} x^2(\tau) d\tau}$$

En anglais: rms value (Root Mean Square)

La valeur efficace est toujours positive !

Fonction sinusoïdale

$$x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)$$



Fonction sinusoïdale: fréquence

- Fréquence: Nombre de cycle par unité de temps

$$f = 1/T$$

$$x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha) = A\sin(2\pi f t + \alpha)$$

Fonction sinusoïdale: fréquence

- L’unité de mesure la fréquence: le hertz (Hz)
- Un hertz correspond à la fréquence d’un phénomène périodique dont la période T est une seconde

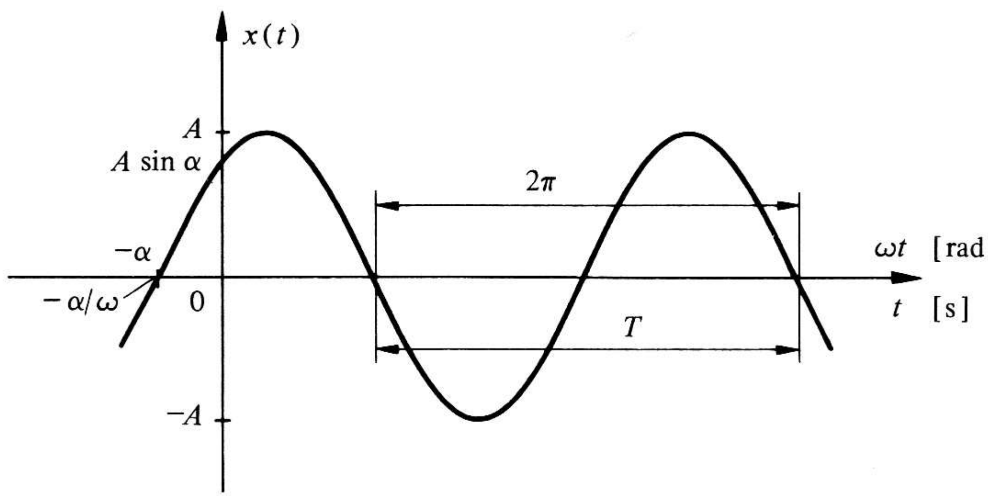
Heinrich **Hertz** (1857-1894), physicien allemand. Ses travaux confirmèrent la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell.

Fonction sinusoïdale: fréquence angulaire ou pulsation

- Fréquence angulaire ou pulsation: ω
- Unité rad/s

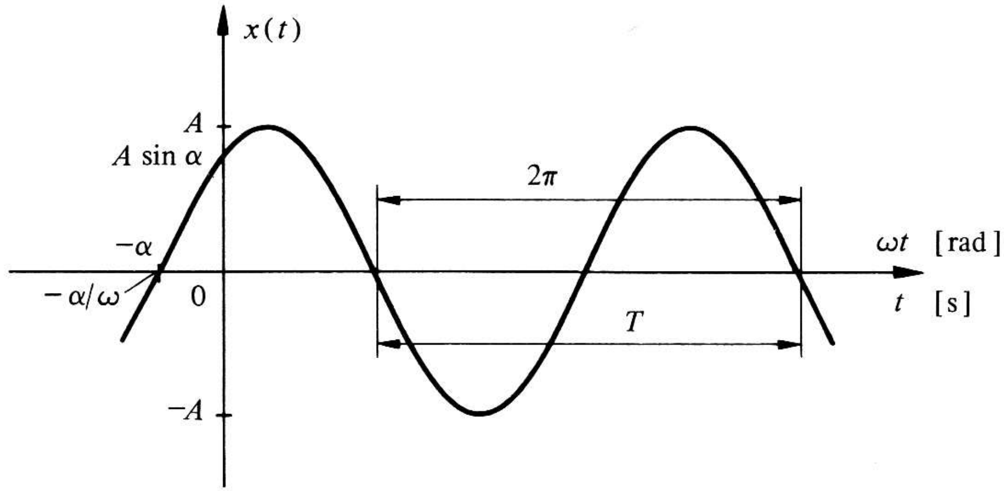
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)$$
$$= A\sin(2\pi f t + \alpha)$$
$$= A\sin(\omega t + \alpha)$$



Fonction sinusoïdale: valeurs moyenne et efficace

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$



- Valeur moyenne

$$\overline{X} = 0$$

- Valeur efficace

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a$$

$$X = \sqrt{\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha)dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}dt - \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\alpha)dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale:

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

- Valeurs efficaces

$$U = \hat{U}/\sqrt{2} \qquad I = \hat{I}/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) \\ i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

Question

- Quand on parle d’une tension sinusoïdale de 230 V, il s’agit de

A. sa valeur crête
B. sa valeur moyenne
C. sa valeur efficace
D. Aucune des réponses ci-dessus

Déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

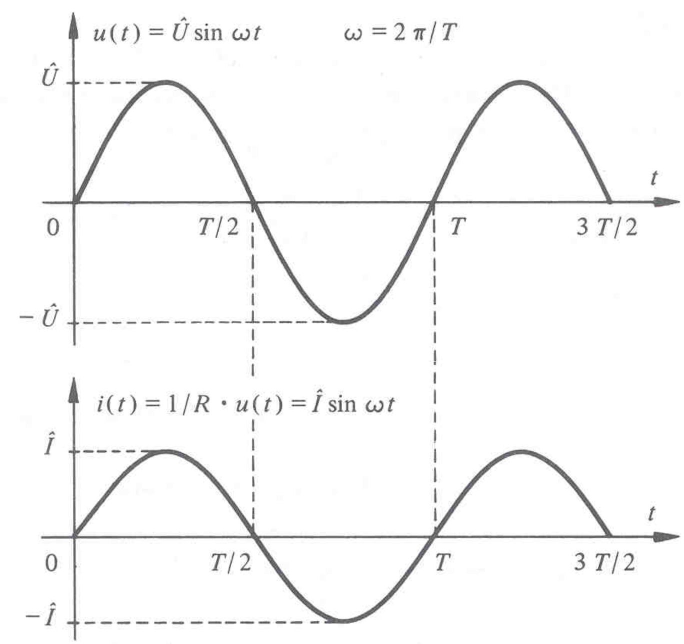
- Déphasage entre *u*(*t*) et *i*(*t*): $\varphi = \alpha - \beta$
- Remarque: on considère toujours la valeur principale du déphasage comprise entre –π et π.
- $\varphi > 0$: tension en avance sur le courant
- $\varphi < 0$: tension en retard sur le courant

Échauffement d'une résistance

- Lorsque la tension est sinusoïdale, la puissance moyenne dissipée dans une résistance est égale à l'intégrale, sur une période, du produit du courant et de la tension instantanés.

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t)$$

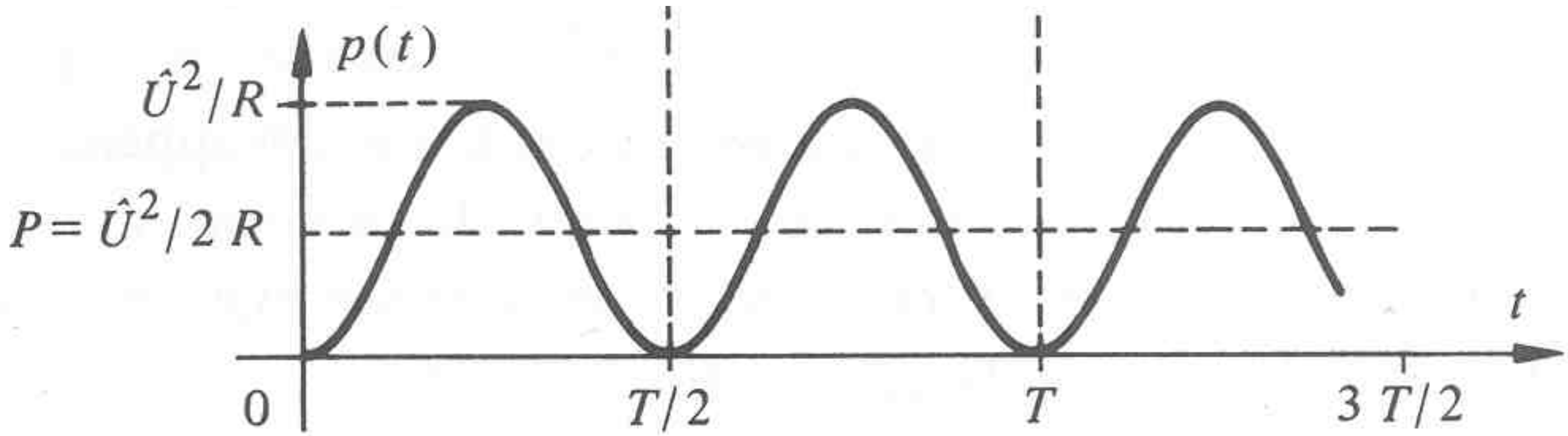
$$i(t) = \frac{\hat{U}}{R}\sin(\omega t)$$



Échauffement d'une résistance

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t) \qquad\qquad i(t) = \frac{\hat{U}}{R}\sin(\omega t)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{\hat{U}^2}{R}\sin^2(\omega t)$$



Échauffement d'une résistance

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{\hat{U}^2}{2R}$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \Rightarrow P = \frac{U^2}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{U} &= R\hat{I} \\ I &= \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = RI^2$$

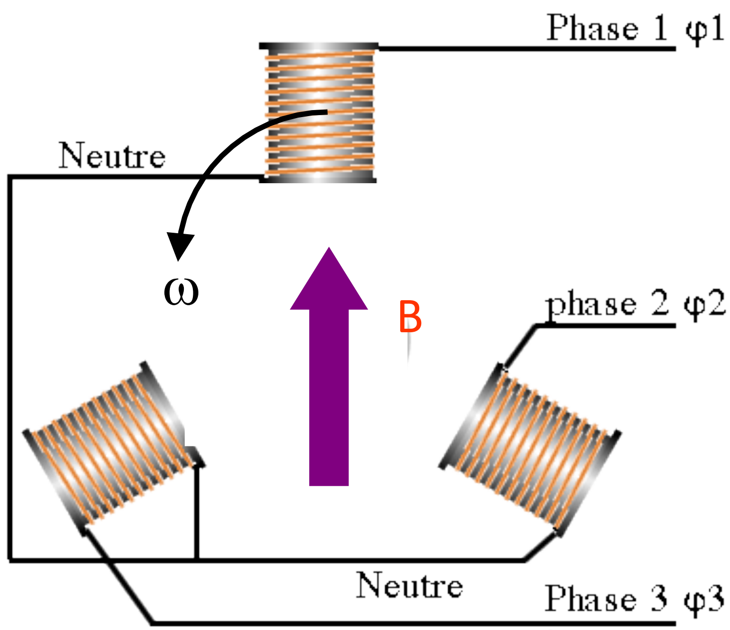
Échauffement d’une résistance

$$P = \frac{U^2}{R} \qquad\qquad P = RI^2$$

- La valeur efficace a été définie de sorte qu’un volt continu ou 1 volt alternatif produise le même échauffement dans une résistance!

Importance du régime sinusoïdal

- La production d'énergie électrique fournit une tension sinusoïdale: conversion énergie mécanique – énergie électrique: rotation d'un bobinage placé dans un champ magnétique



Moteur à 1 paire de pôles

Importance du régime sinusoïdal

- La seule fonction périodique qui possède une dérivée et une intégrale analogue

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) = A\omega\cos(\omega t + \alpha + 90^{o})$$

$$\int x(t)dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \alpha - 90^{o})$$

Importance du régime sinusoïdal

- La somme de deux fonctions sinusoïdales est une fonction sinusoïdale

$$x(t) = \cos(\omega t + \alpha)$$

$$y(t) = \cos(\omega t + \beta)$$

$$x(t) + y(t) = 2\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos(\omega t + \frac{\alpha + \beta}{2})$$

Importance du régime sinusoïdal

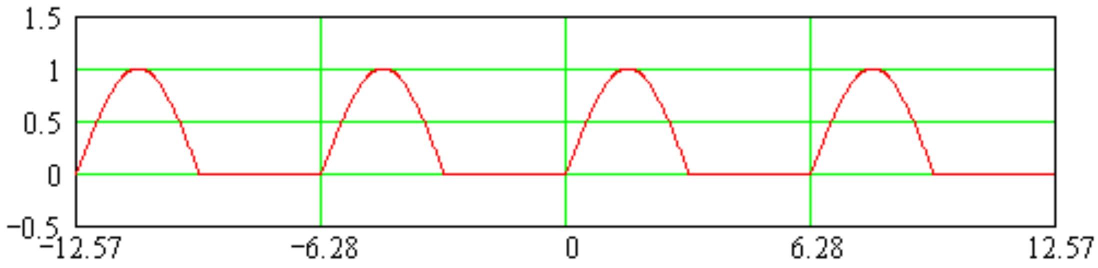
- Développement en série de Fourier: représentation d'un signal périodique *f*(*t*) par des fonctions sinusoïdales

$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

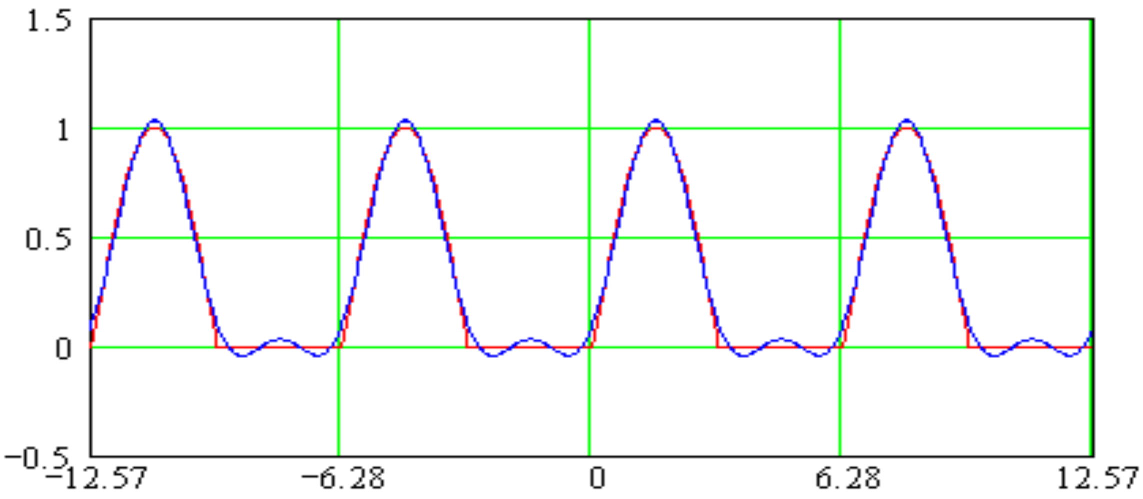
avec
$$\begin{cases} A_o = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \\ b_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{cases}$$

Représentation d'un signal périodique par des fonctions sinusoïdales:Exemple 1

Fonction sinusoïdale redressée:

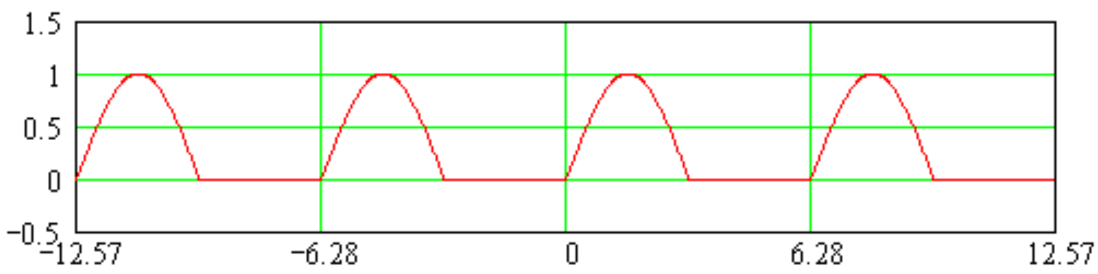


2 premiers termes de la série de Fourier:

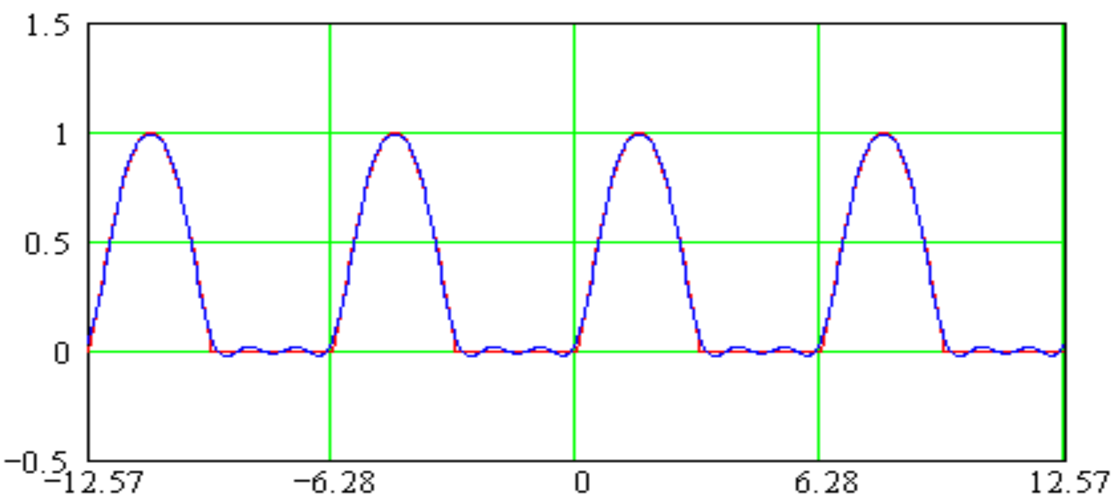


Représentation d'un signal périodique par des fonctions sinusoïdales:Exemple 1

Fonction sinusoïdale redressée:

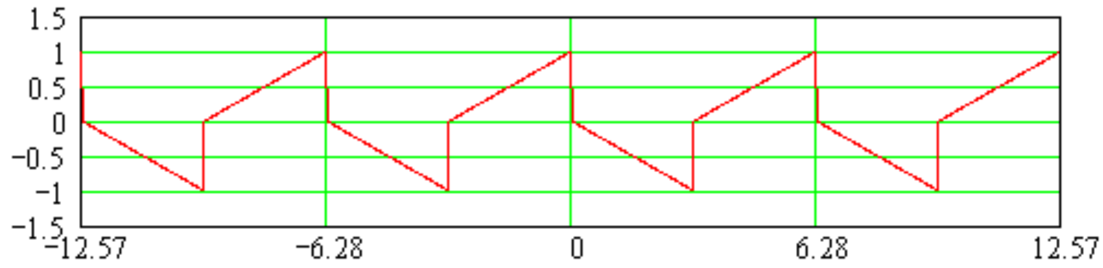


4 premiers termes de la série de Fourier:

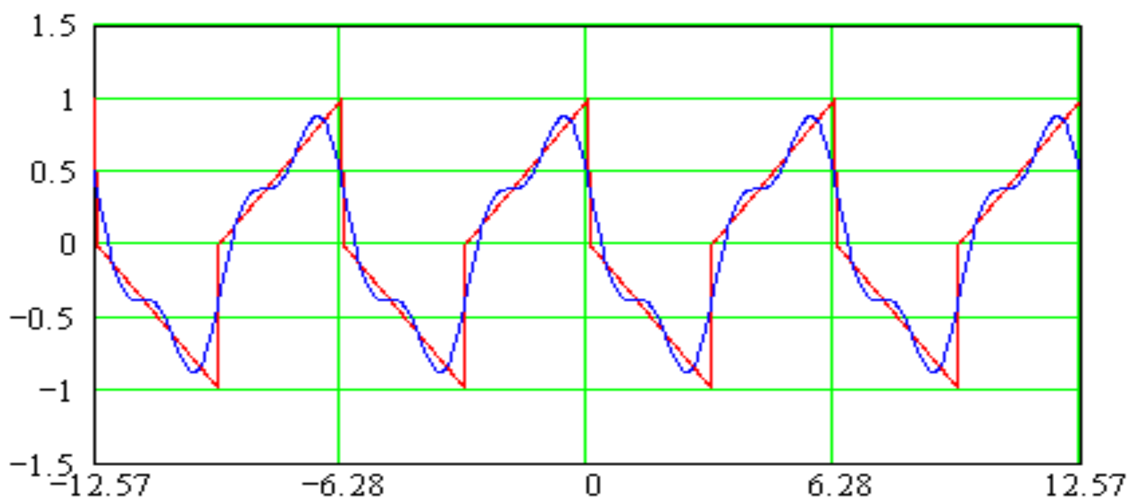


Représentation d'un signal périodique par des fonctions sinusoïdales:Exemple 2

Fonction triangulaire:



4 premiers termes de la série de Fourier:



Représentation d'un signal périodique par des fonctions sinusoïdales

- Java Applet
  http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html

Importance du régime sinusoïdal

- Transformation de Fourier:

  Généralisation de la série de Fourier

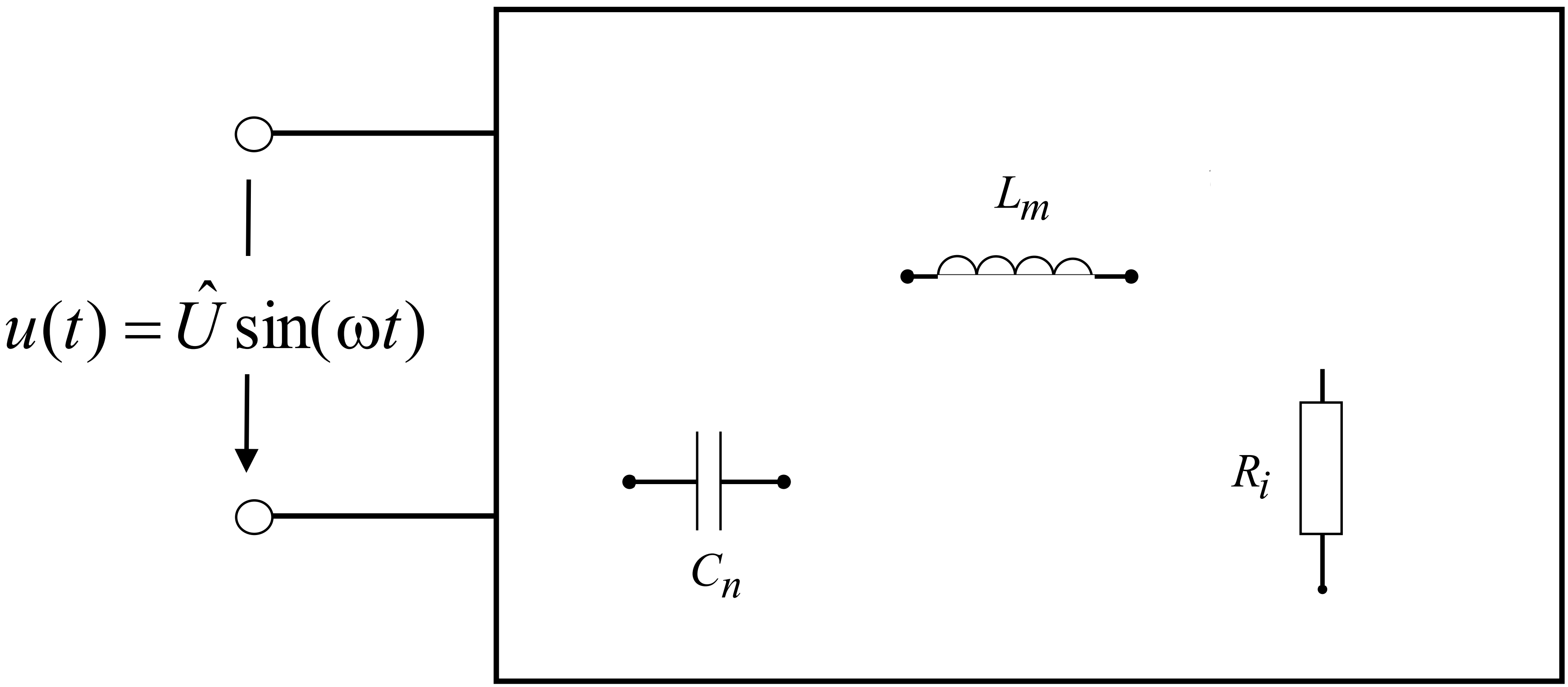
  Analyse fréquentielle de signaux non périodiques

Question

- On applique une tension sinsusoïdale à un circuit linéaire (R, L, C). Qu'est-ce qu'on peut dire des courants et tensions dans le circuit?

A. Ils sont tous sinusoïdaux
B. Ils sont tous sinusoüdaux de même fréquence (que celle de la source)
C. Ils sont tous périodiques
D. Aucune des réponses ci-dessus

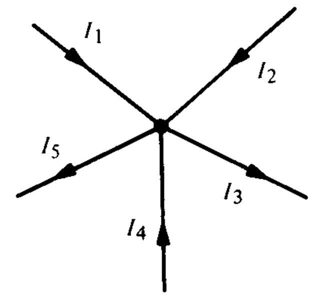
Réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale

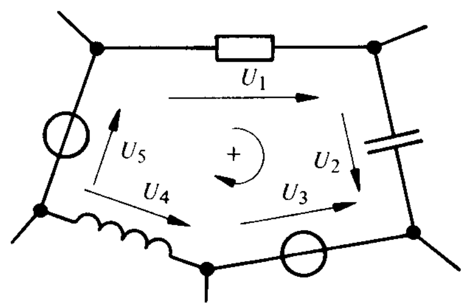


Réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t)$$

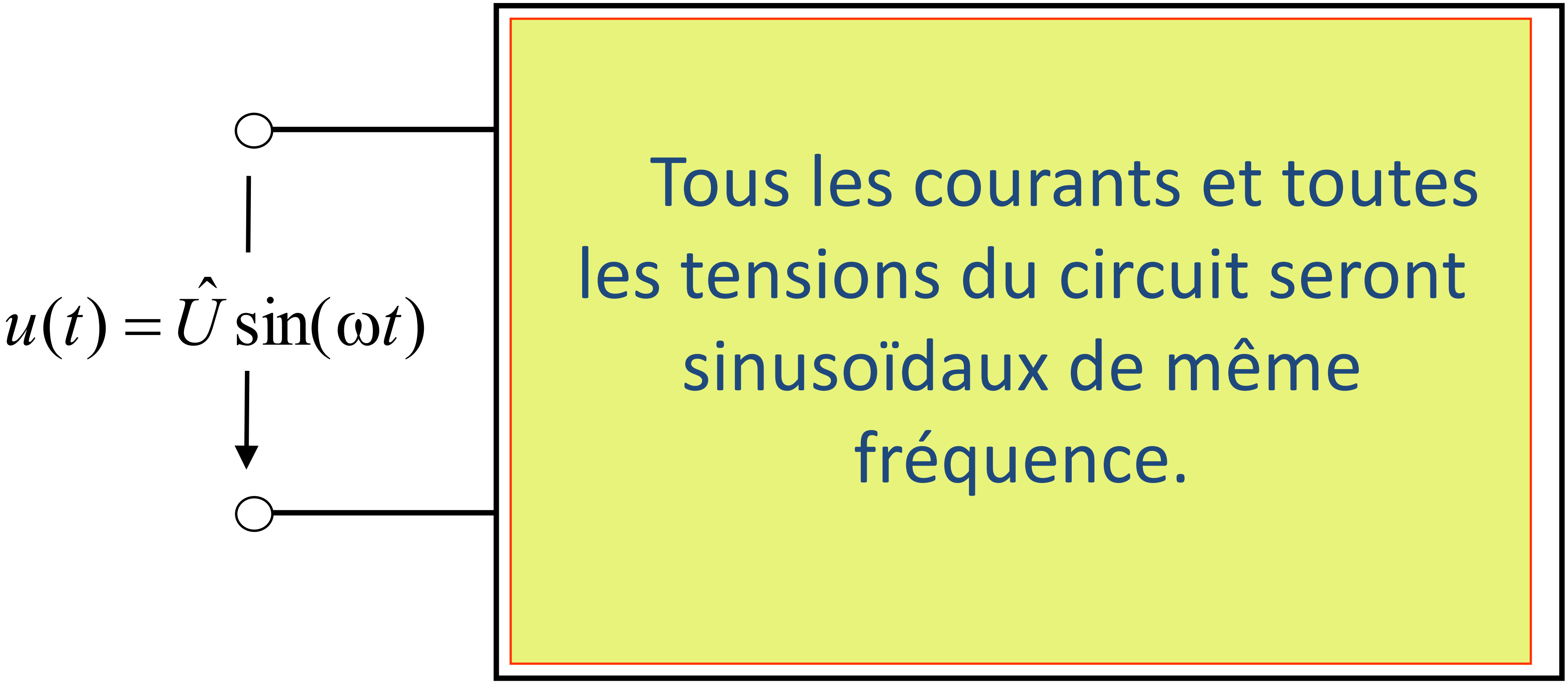
$$\sum_{j=1}^{N} i_j = 0$$





$$\sum_{j=1}^{N} u_j = 0$$

Réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale



Exemple

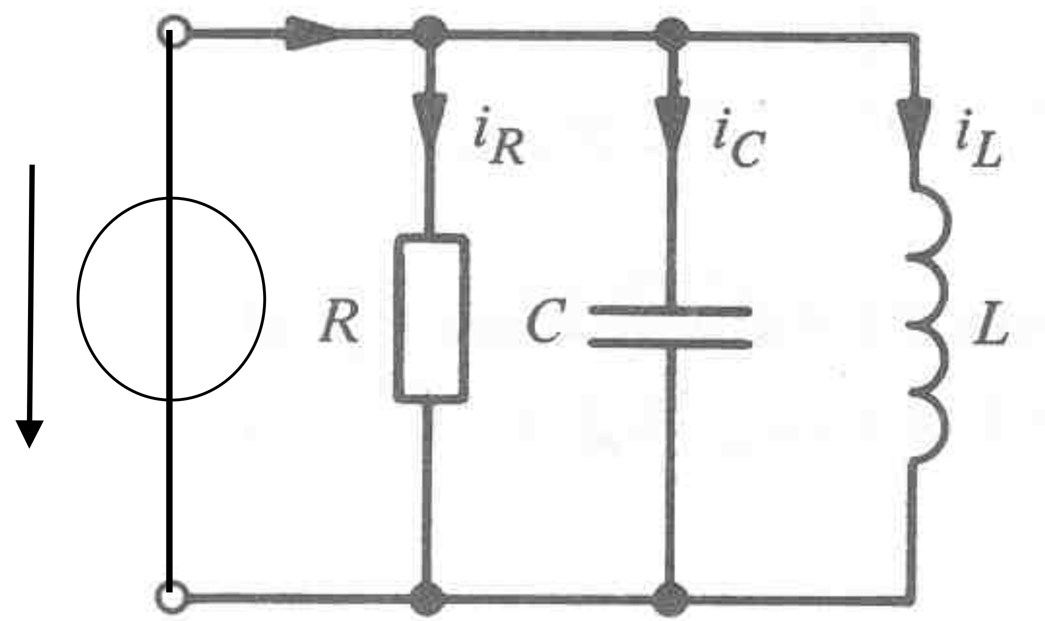
- Evaluer la valeur efficace, la fréquence et la période du courant total $i(t)$
- Déterminer analytiquement le courant dans chacun des éléments et celui fourni par la source
- Tracer chacun de ces courants

$$u(t) = 170\cos(157.1t + \pi/6)$$

$$R = 170\Omega$$

$$C = 46.8\mu F$$

$$L = 0.722H$$



Exemple

- Evaluer la valeur efficace, la fréquence et la période du courant i(t)
- Déterm … des élémen …
- Tracer …

Calcul au tableau!

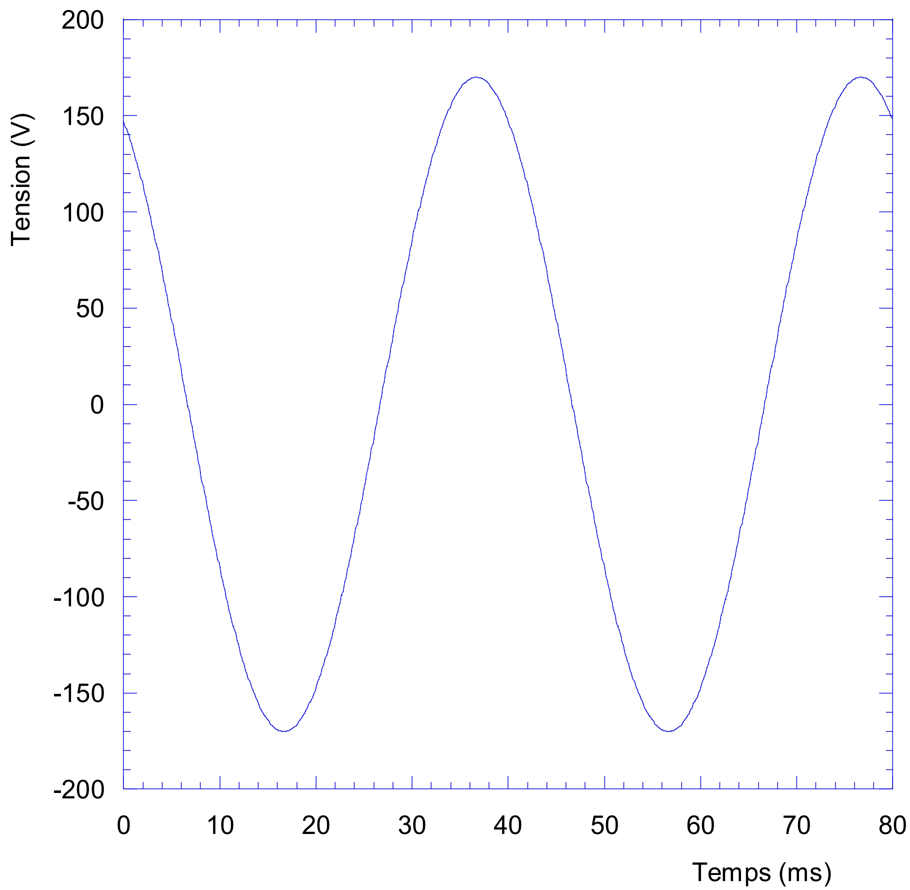
$u(t) = 170 \ldots$

$R = 170\Omega$

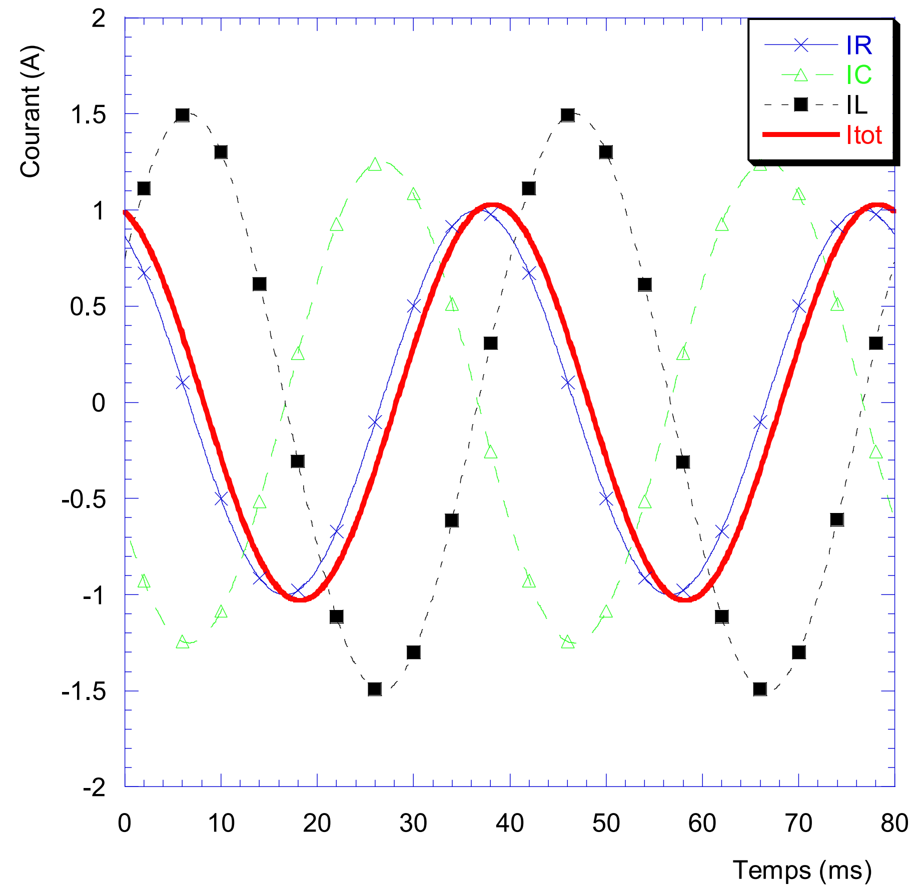
$C = 46.8\mu F$

$L = 0.722H$

Exemple



Tension (V)
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Temps (ms)



Courant (A)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Temps (ms)
IR
IC
IL
Itot

Exemple

- Cet exemple nous montre que la solution pour un circuit simple est déjà laborieuse et deviendrait vite inutilisable pour des problèmes complexes.

$\Rightarrow$ Phaseurs!