Circuits et Systèmes I
Chapitre 3: Méthodes d'Analyse

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

Méthodes d'Analyse

- Analyse nodale
  - Basée sur l'application systématique de la loi de Kirchhoff sur les courants
- Analyse de mailles
  - Basée sur l'application sytématique de la loi de Kirchhoff sur les tensions

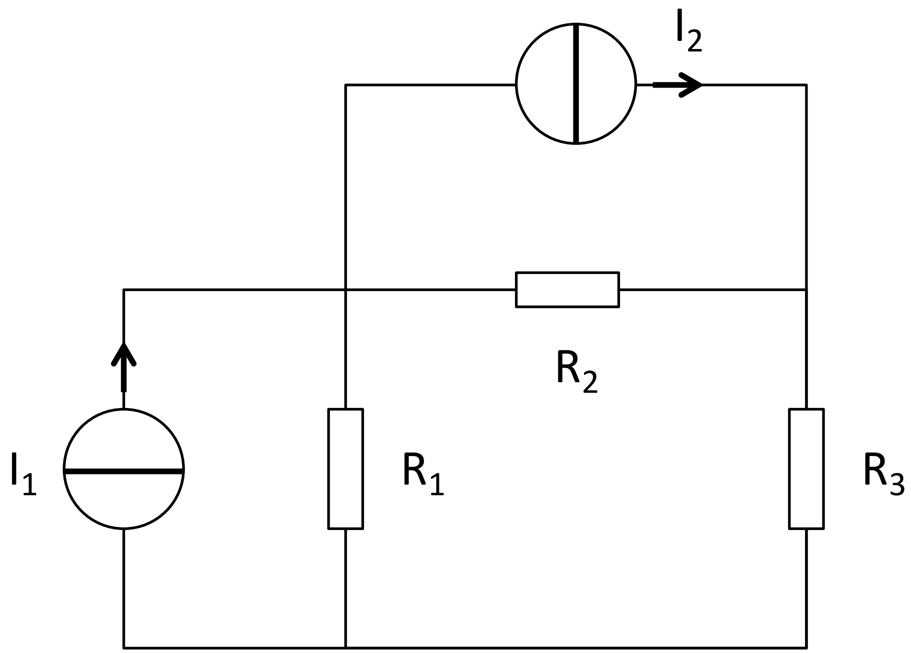
Analyse nodale

- Procédure générale d'analyse des circuits utilisant les tensions des nœuds comme variables du circuit.
- Dans l'analyse nodale, nous sommes intéressés de trouver les tensions des nœuds.
- On va considérer d'abord un circuit résistif avec *n* nœuds et sans source de tension.

Analyse nodale: Étapes pour déterminer les tensions des noeuds

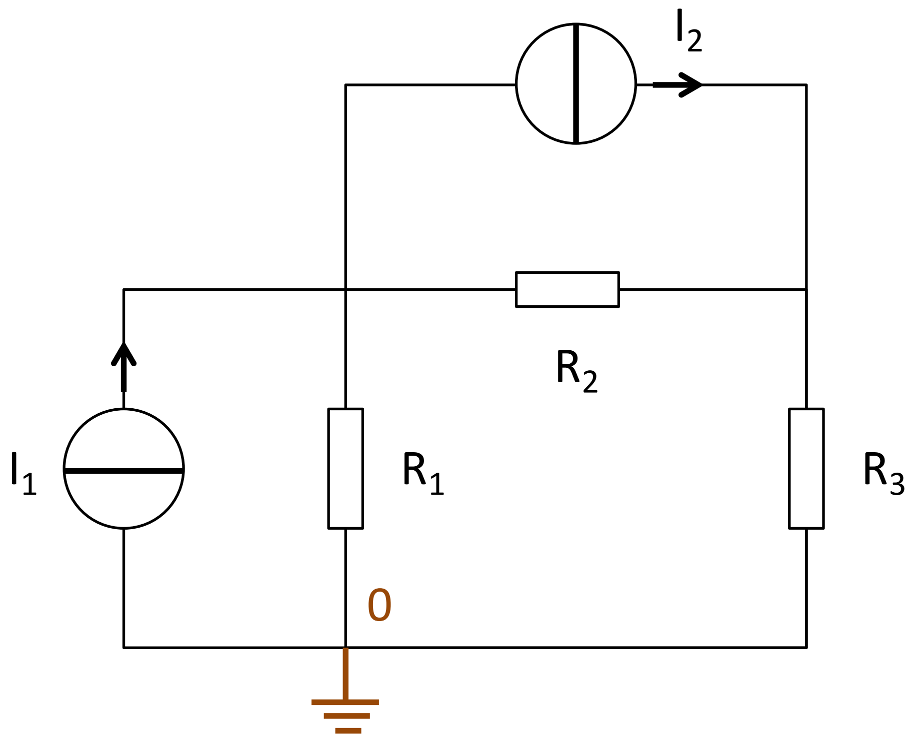
1. Sélectionner le nœud *n* comme nœud de référence. Attribuer les tensions v_1, v_2, …v_{n-1} aux autres (*n*-1) nœuds. Les différences de potentiel sont établies par rapport au nœud de référence.
2. Appliquer la loi de Kirchoff (courants) à chacun des *n*-1 nœuds. Exprimer les courants des branches
3. Résoudre le système d'équations simultanées afin d'obtenir les valeurs des tensions inconnues.

Analyse nodale: Exemple d'Application



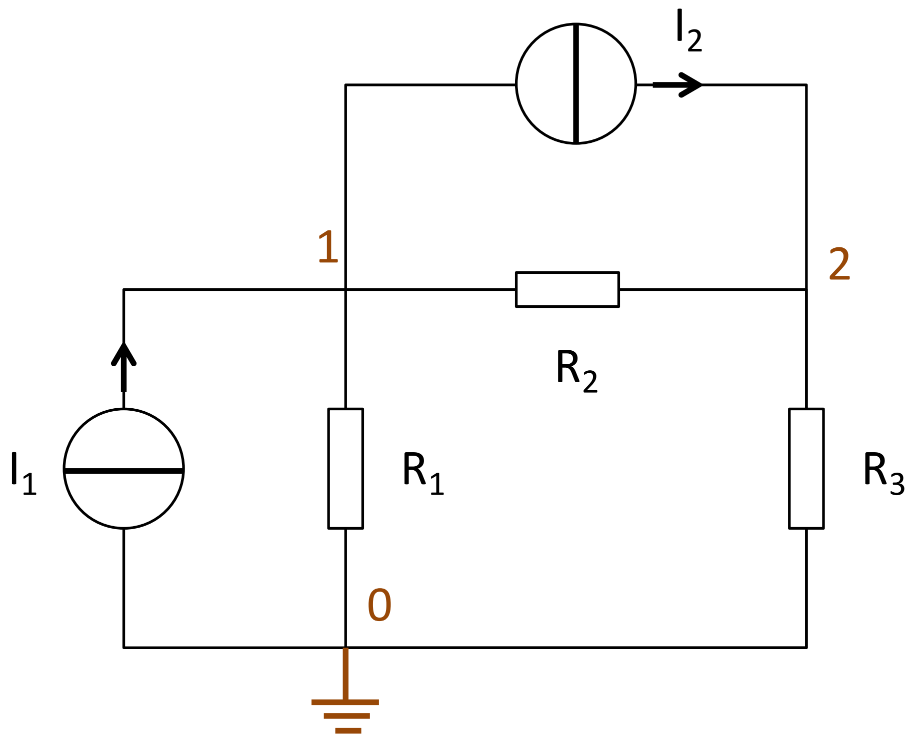
Analyse nodale: Exemple d'Application

Étape 1: sélection du nœud de référence



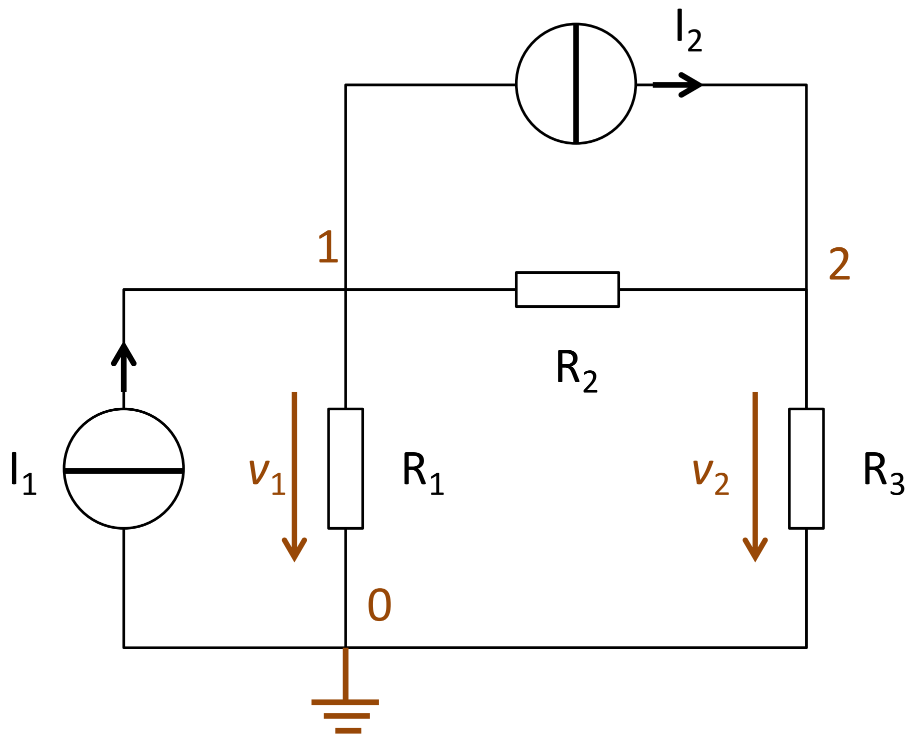
Analyse nodale: Exemple d'Application

Étape 1: les autres nœuds



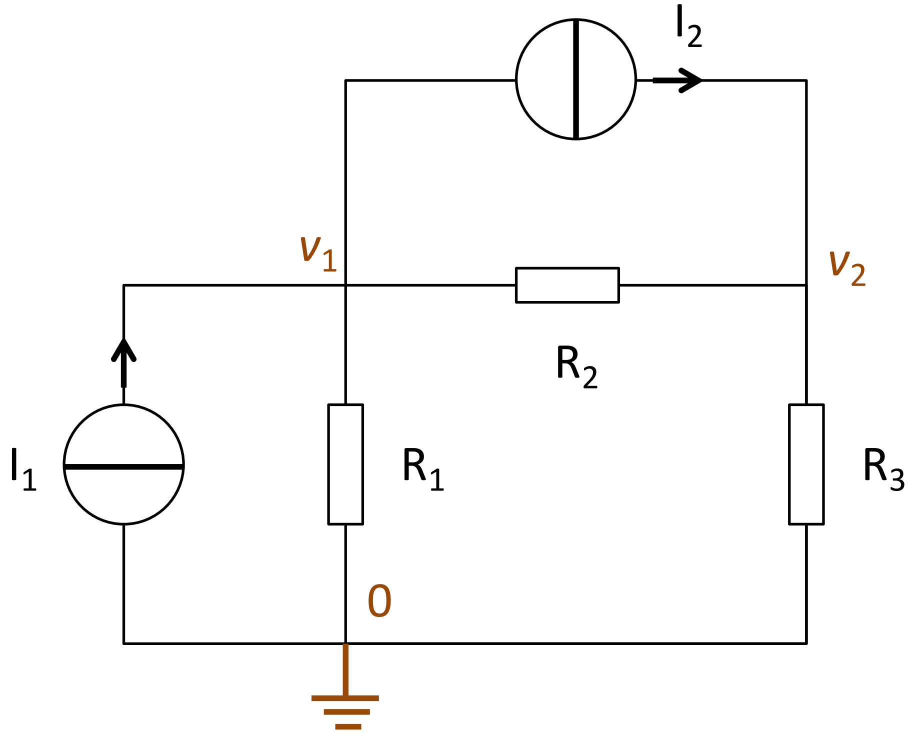
Analyse nodale: Exemple d'Application

Étape 1: attribution des tensions aux noeuds



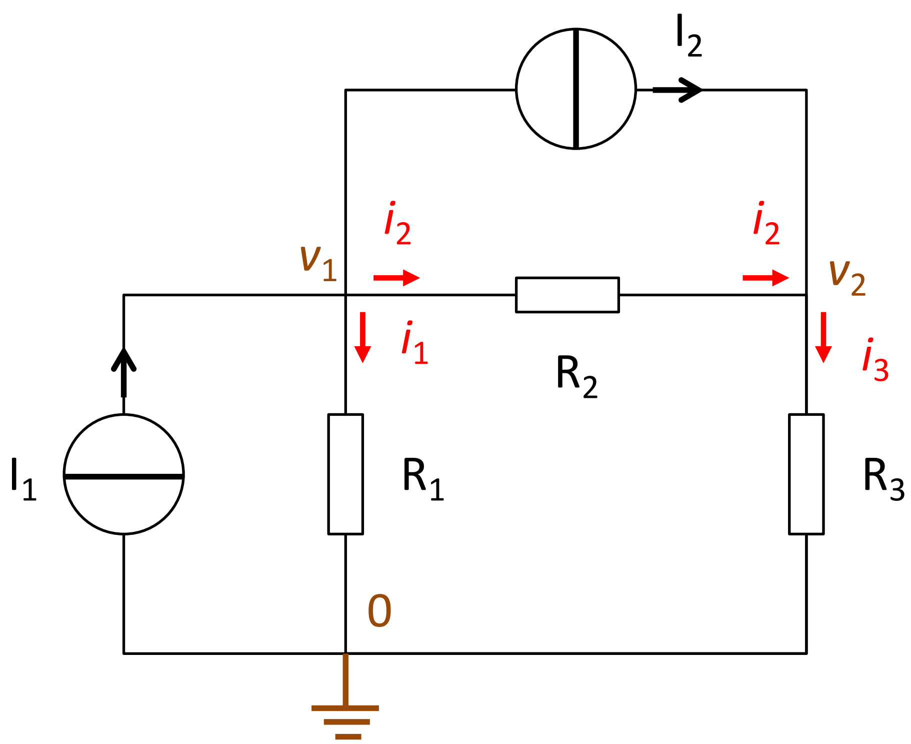
Analyse nodale: Exemple d’Application

Étape 1: attribution des tensions aux noeuds



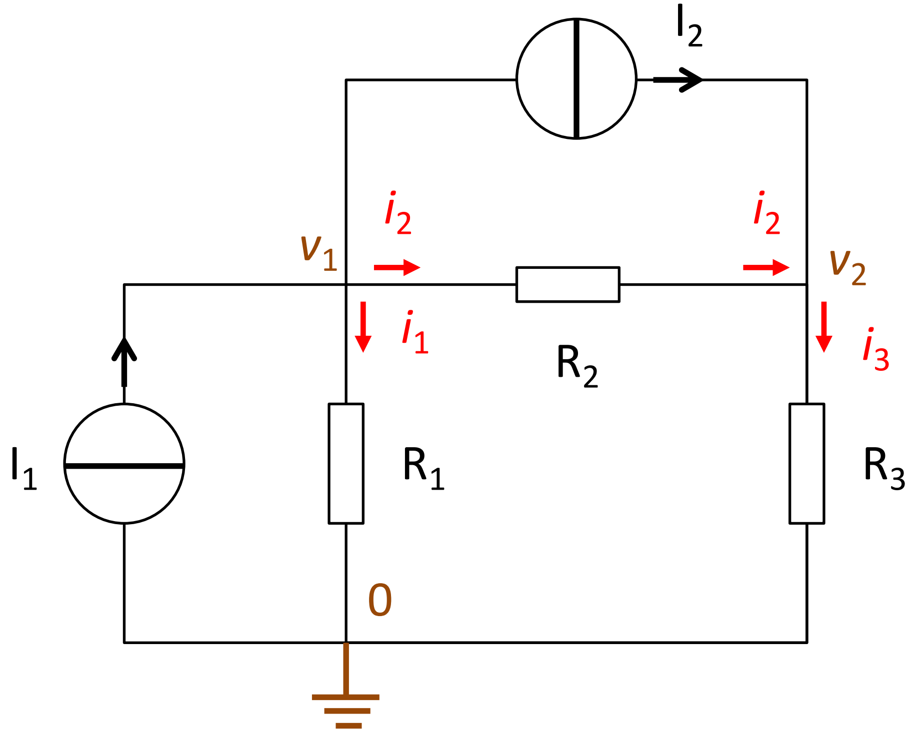
Analyse nodale: Exemple d'Application

Étape 2: application de la loi de Kirchoff (courants)



Analyse nodale: Exemple d'Application

Étape 2: application de la loi de Kirchoff (courants)



Nœud 1:

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2$$

Nœud 2:

$$I_2 + i_2 = i_3$$

Relations courants-tensions:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} \qquad i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \qquad i_3 = \frac{v_2}{R_3}$$

En substituant ces relations dans les équations de Kirchoff aux nœuds 1 et 2, on obtient (voir planche suivante)

Analyse nodale: Exemple d'Application

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \qquad I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3}$$

En termes de conductances, ces équations deviennent:

$$I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) \qquad I_2 + G_2 (v_1 - v_2) = G_3 v_2$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Analyse nodale: Exemple d'Application

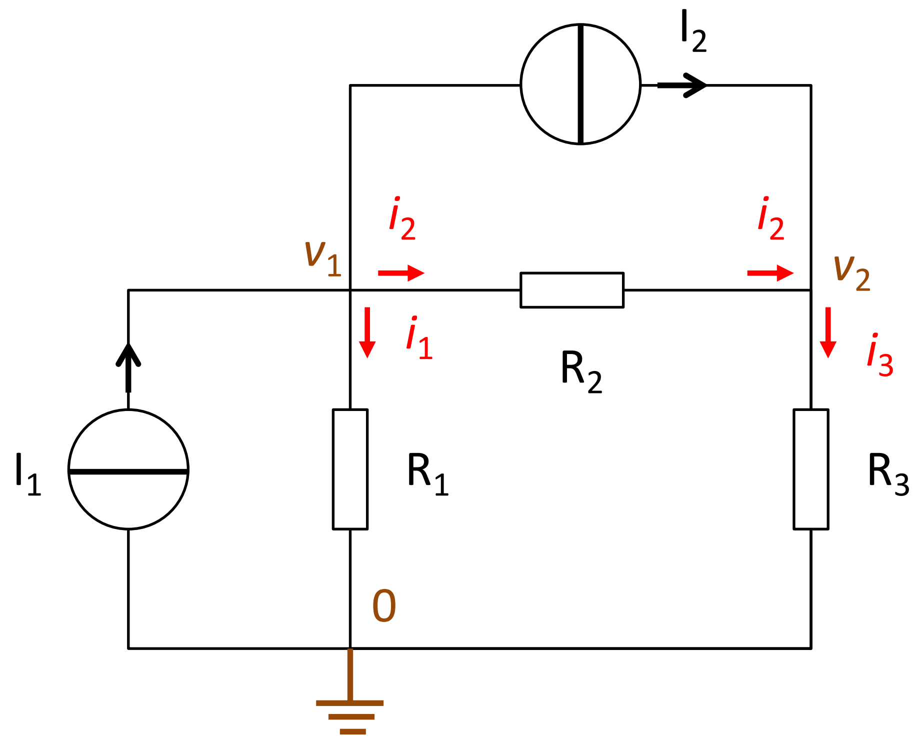
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Solution:

- Méthode de substitution
- Méthode d'élimination
- Règle de Kramer
- Inversion de matrice

Analyse nodale par inspection du circuit

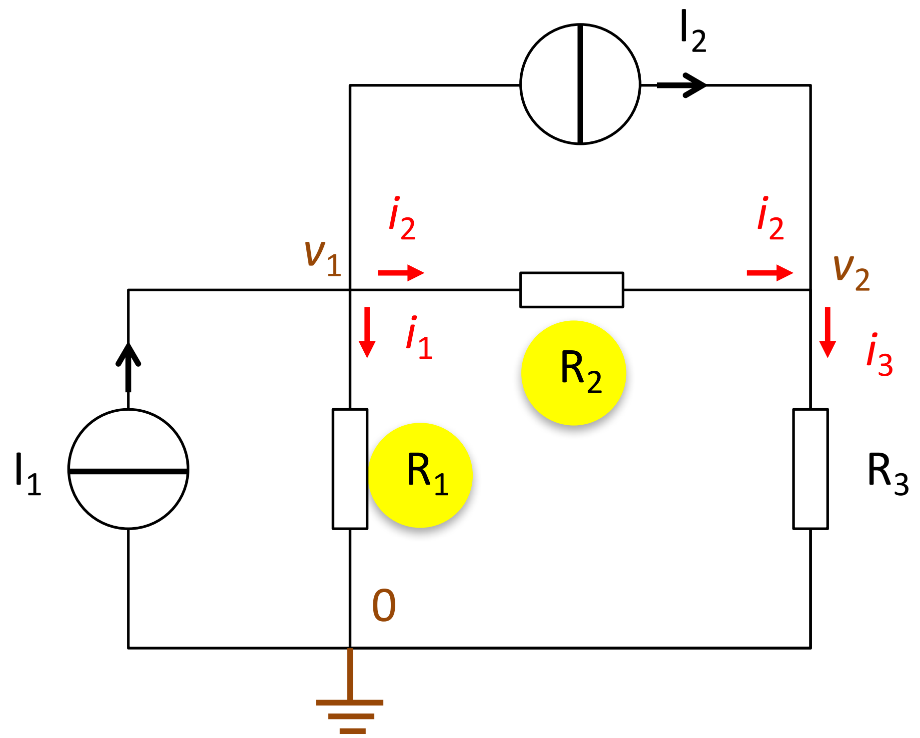
$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Analyse nodale par inspection du circuit

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

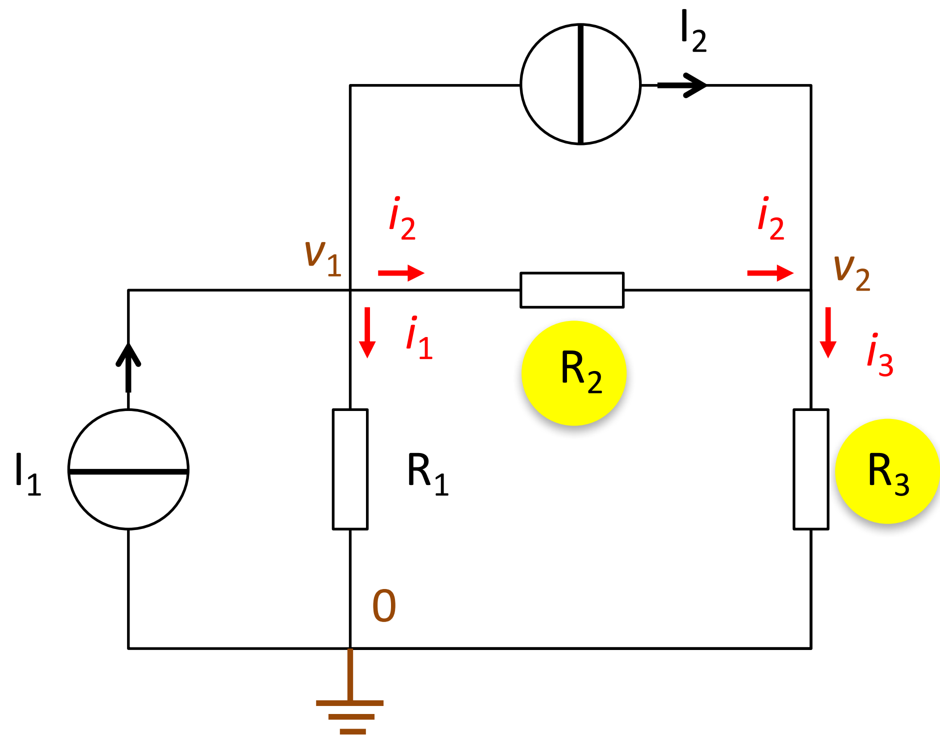
Somme des conductances connectées au nœud 1



Analyse nodale par inspection du circuit

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

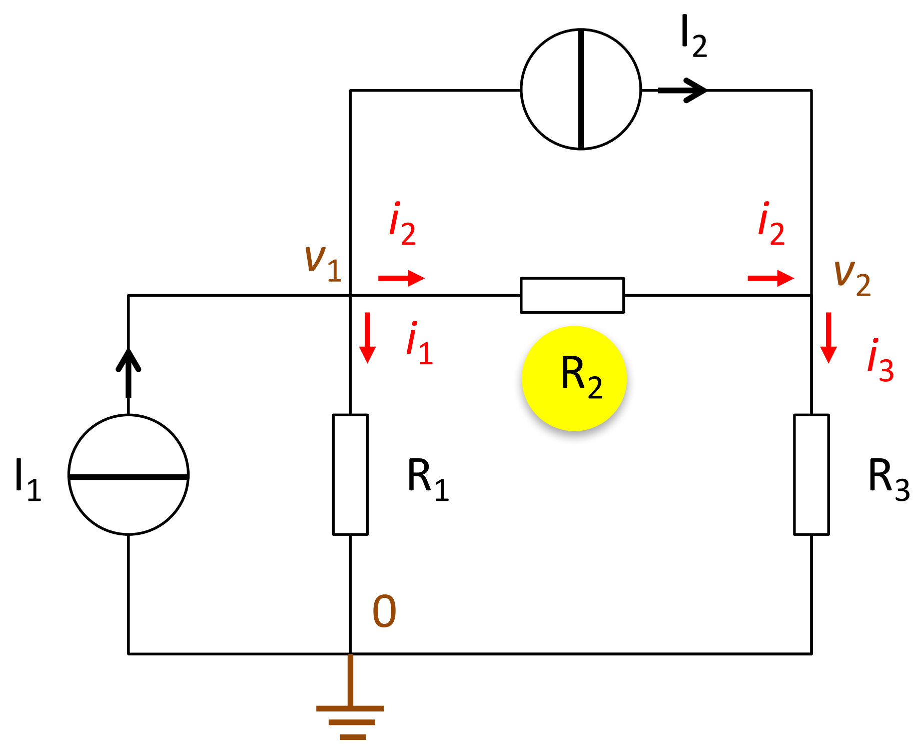
Somme des conductances connectées au nœud 2



Analyse nodale par inspection du circuit

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

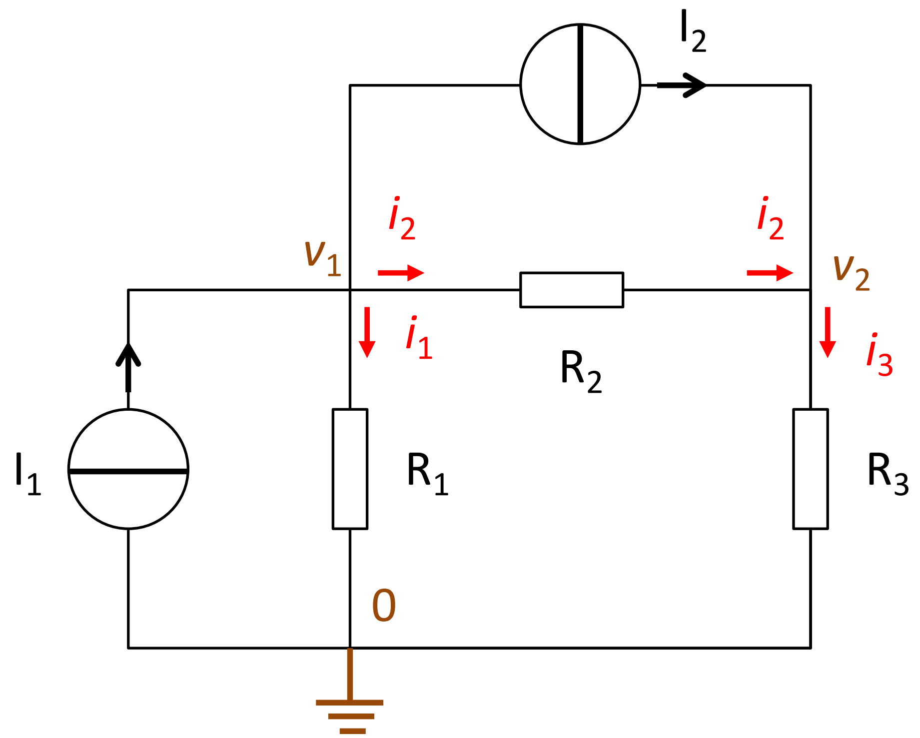
Conductance connectée entre les nœuds 1 et 2, avec un signe -.



Analyse nodale par inspection du circuit

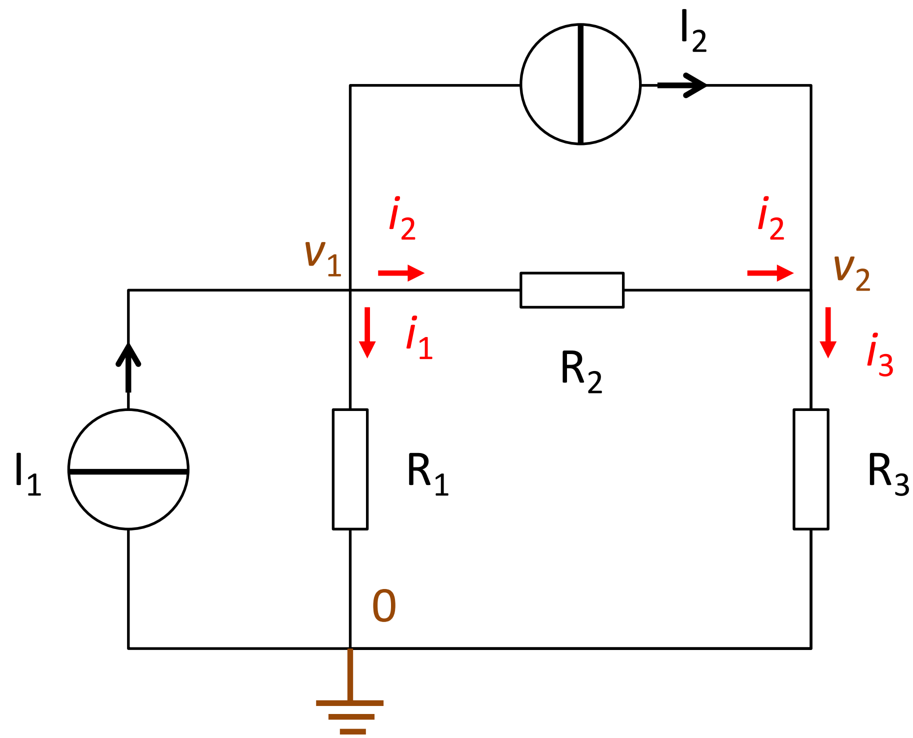
$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Somme des courants injectés au nœud 1



Analyse nodale par inspection du circuit

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2+G_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1-I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Somme des courants injectés au nœud 2

Analyse nodale par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N nœuds avec sources indépendantes de courant, les équations pour les tensions de nœuds peuvent être écrites en termes de conductances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}$$

avec: G_{kk}: somme des conductances reliées au nœud k

Analyse nodale par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N nœuds avec sources indépendantes de courant, les équations pour les tensions de nœuds peuvent être écrites en termes de conductances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}$$

avec:

$G_{kj}=G_{jk}$: somme avec signe négatif des conductances reliant directement les nœuds k et j (avec k≠j).

Analyse nodale par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N nœuds avec sources indépendantes de courant, les équations pour les tensions de nœuds peuvent être écrites en termes de conductances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}$$

avec:

v_k: tension inconnue au nœud k

Analyse nodale par inspection du circuit: Cas général

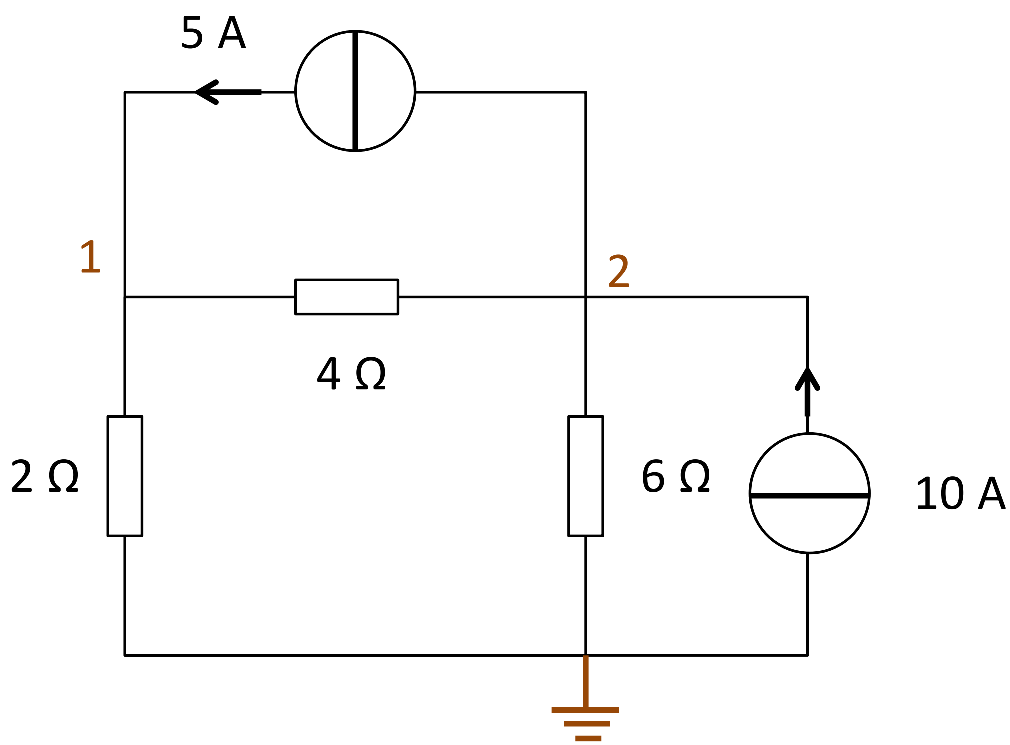
- En général, pour un circuit à N nœuds avec sources indépendantes de courant, les équations pour les tensions de nœuds peuvent être écrites en termes de conductances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}$$

avec:

i_k: somme de toutes les sources indépendantes de courant diretement relié au nœud k, avec des courants entrant dans le nœud considérés comme positifs.

Analyse nodale: Exemple numérique



Solution au tableau!

Analyse de mailles

- Procédure générale d'analyse des circuits utilisant les courants des mailles comme variables du circuit.
- L'analyse nodale fait appel à la loi de Kirchhoff pour les *courants* pour trouver les tensions inconnues, alors que l'analyse des mailles utilise la loi de Kirchhoff pour les *tensions* pour trouver les courants inconnus.

Analyse de mailles

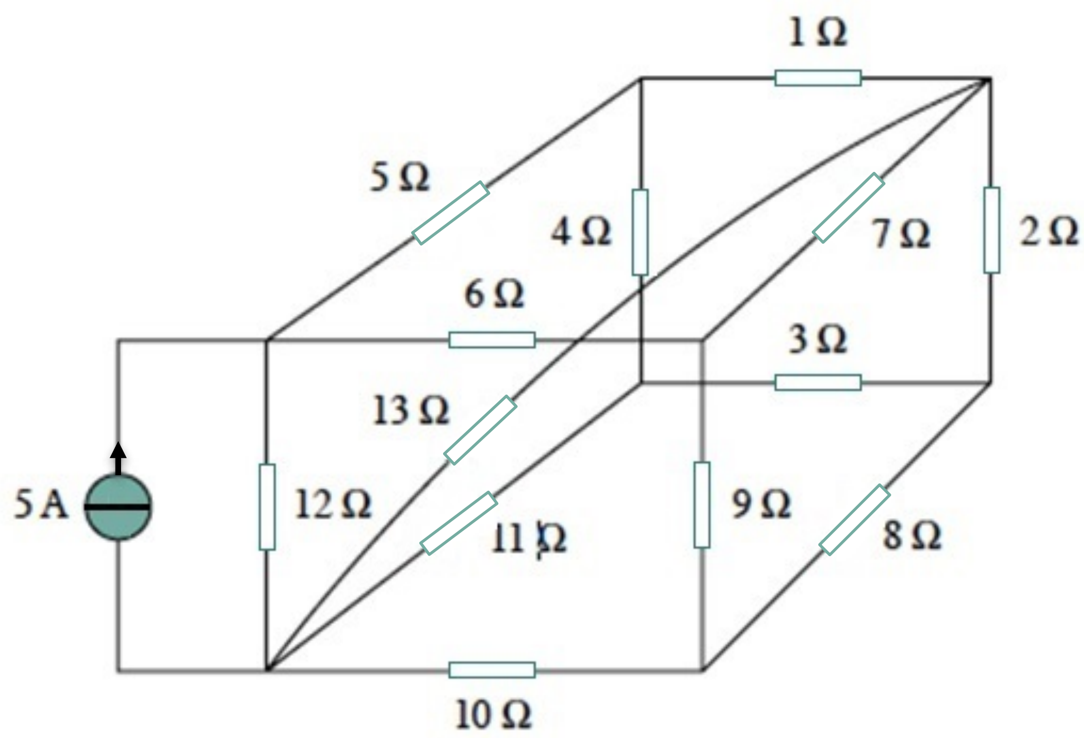
- Procédure générale d'analyse des circuits utilisant les courants des mailles comme variables du circuit.
- L'analyse nodale fait appel à la loi de Kirchhoff pour les *courants* pour trouver les tensions inconnues, alors que l'analyse des mailles utilise la loi de Kirchhoff pour les *tensions* pour trouver les courants inconnus.

L'analyse des mailles n'est pas aussi générale que l'analyse nodale, car elle est applicable uniquement à un circuit de type planaire! (voir planche suivante)

Circuit planaire

- Définition: un circuit planaire est un circuit pour lequel les branches ne se croisent pas.
- Sinon, le circuit est du type non-planaire ou spatial.

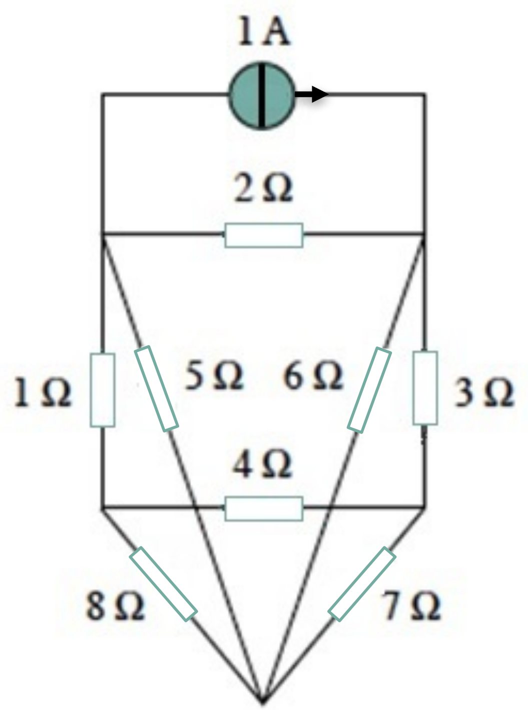
Circuit planaires et non-planaires



☐ planaire

☐ non-planaire

Circuit planaires et non-planaires

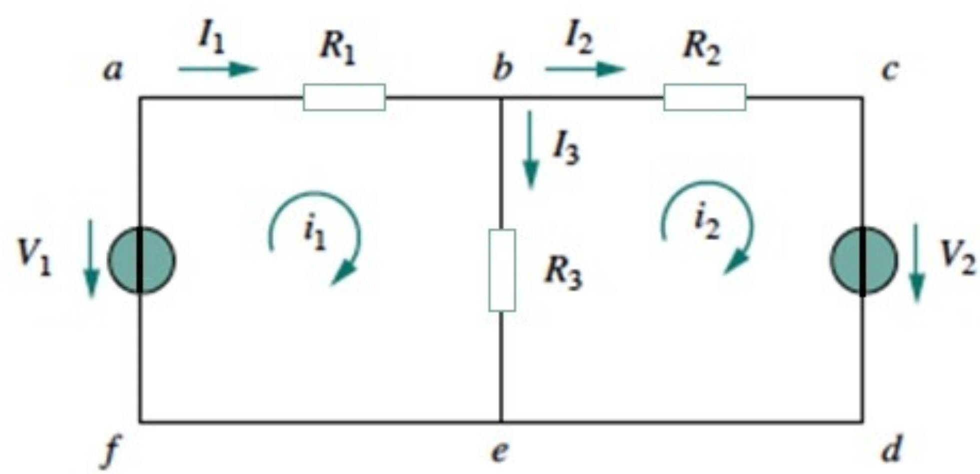


☐ planaire

☐ non−planaire

Définition d’une boucle

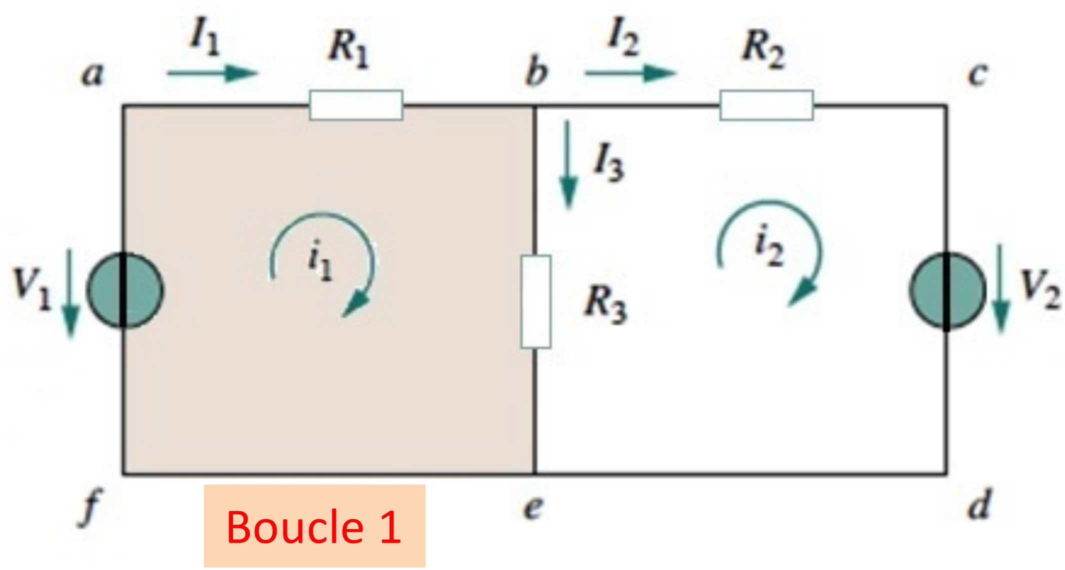
- Une boucle est une maille qui ne contient pas d’autres mailles en son sein.



Exemple: circuit avec deux boucles

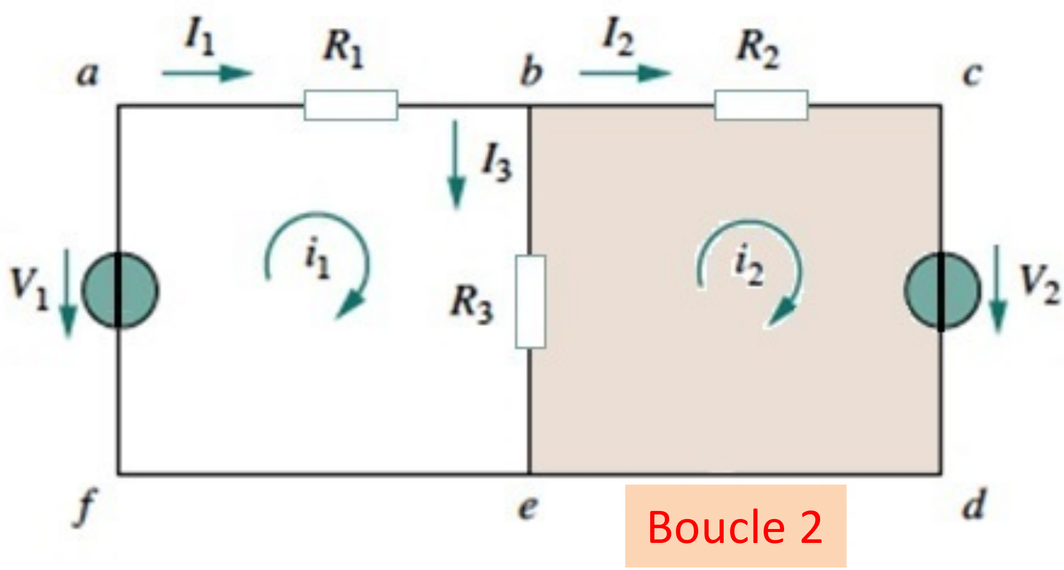
Définition d’une boucle

- Une boucle est une maille qui ne contient pas d’autres mailles en son sein.



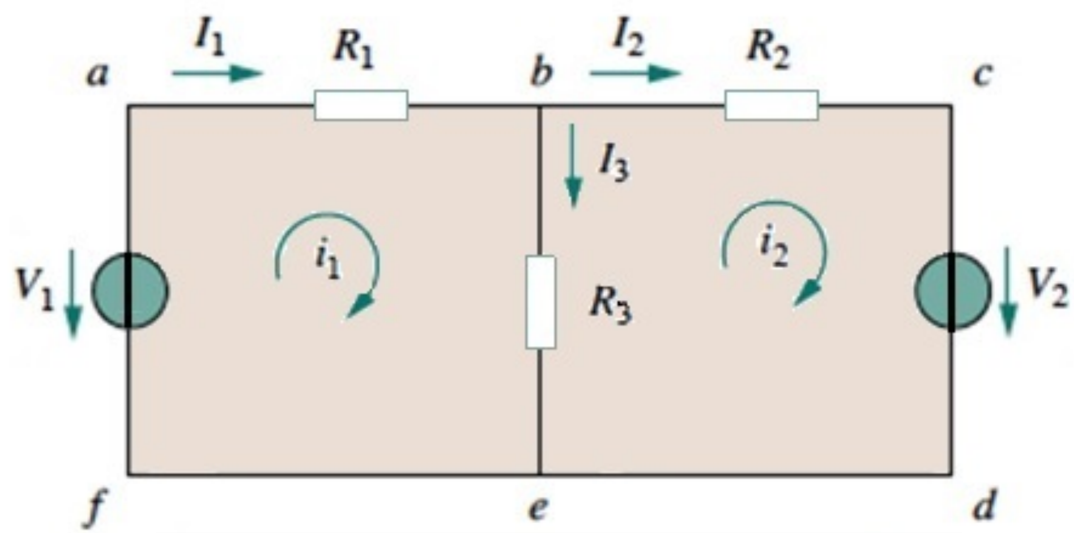
Définition d'une boucle

- Une boucle est une maille qui ne contient pas d'autres mailles en son sein.



Définition d'une boucle

- Une boucle est une maille qui ne contient pas d'autres mailles en son sein.

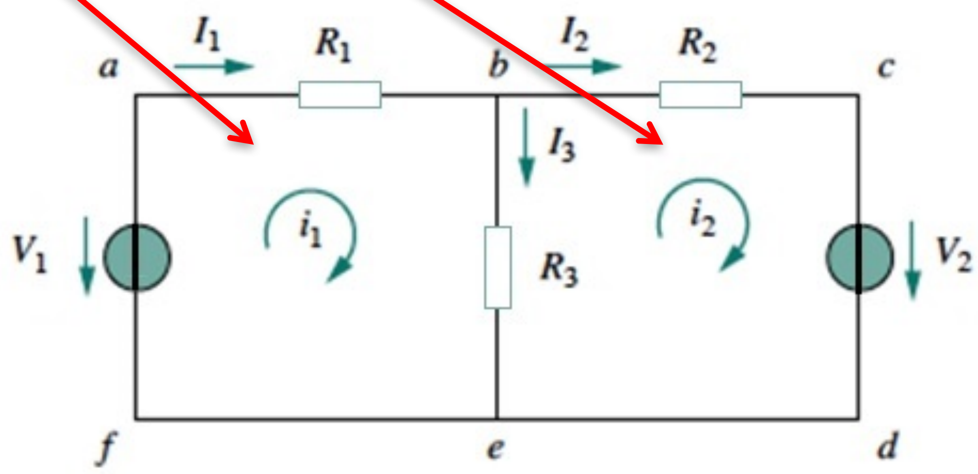


Attention: ceci n'est pas une boucle!

Mais c'est bien une maille!

Définition d'une boucle

i_1 et i_2 sont les courants de boucle (maille)

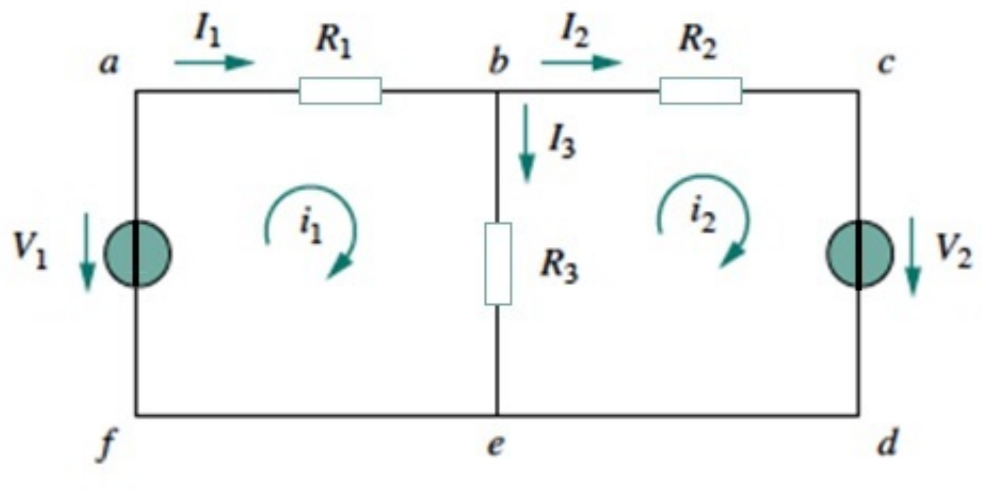


Analyse de mailles: Étapes pour déterminer les courants de mailles

1. Identifier les courants des mailles i_1, i_2, …i_n pour les n boucles du circuit.
2. Appliquer la loi de Kirchoff (tensions) à chacune des n boucles. Utiliser la loi d'Ohm pour exprimer les tensions en termes de courants de maille.
3. Résoudre les n équations résultantes pour obtenir les courants des mailles.

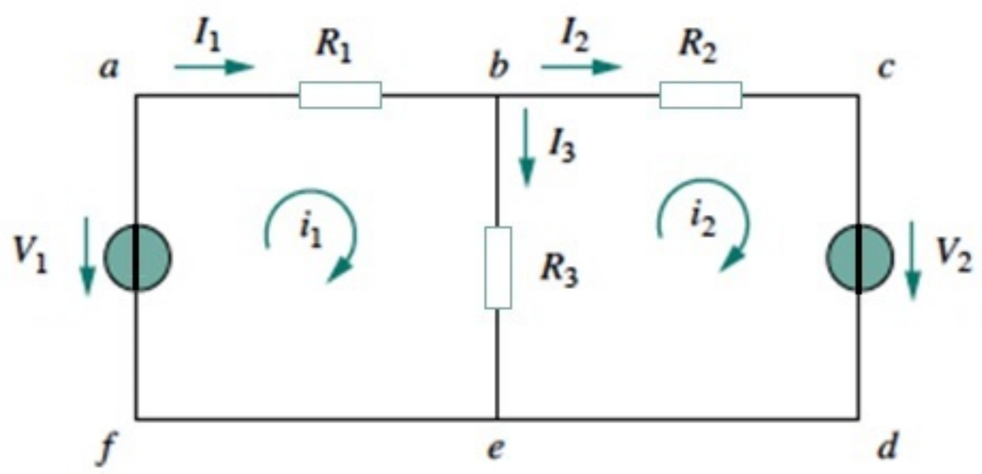
Analyse de mailles: Exemple d'Application

Étape 1: identification des courants de maille



Analyse de mailles: Exemple d'Application

Étape 2: Application de la loi de Kirchhoff (tensions)



Maille 1: $-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0$ ou: $(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1$

Maille 2: $R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$ ou: $-R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -V_2$

Analyse de mailles: Exemple d'Application

Étape 3: Résolution des équations

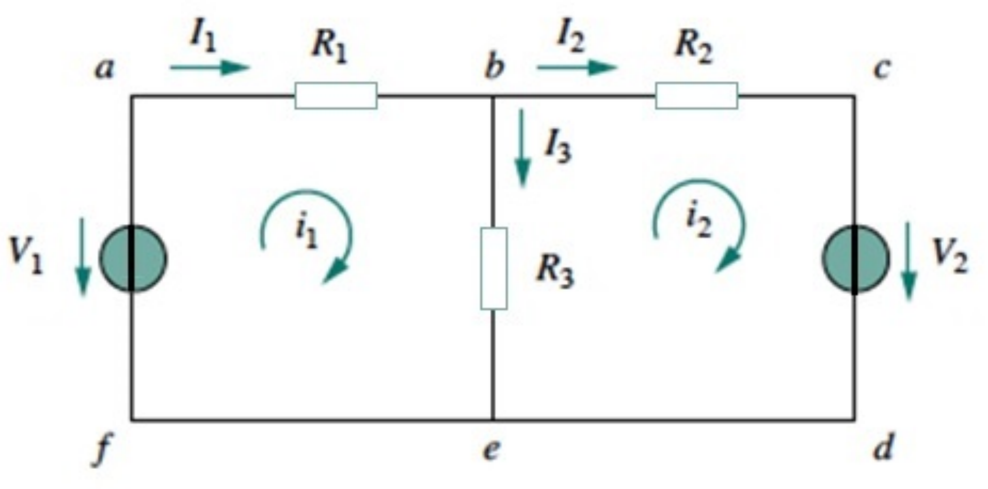
Les équations écrites sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Qui peut être résolue en utilisant les méthodes classiques.

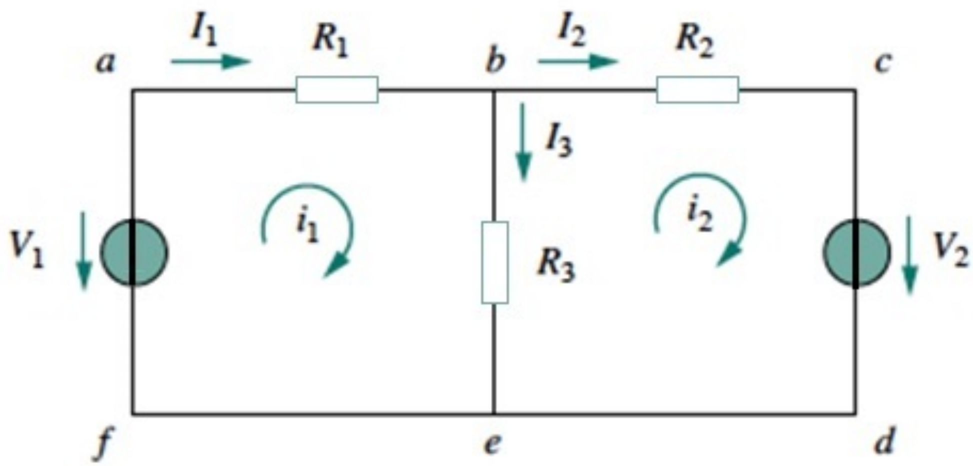
Les courants de branches sont, en général, différents des courants de mailles.

Analyse de mailles: Exemple d'Application



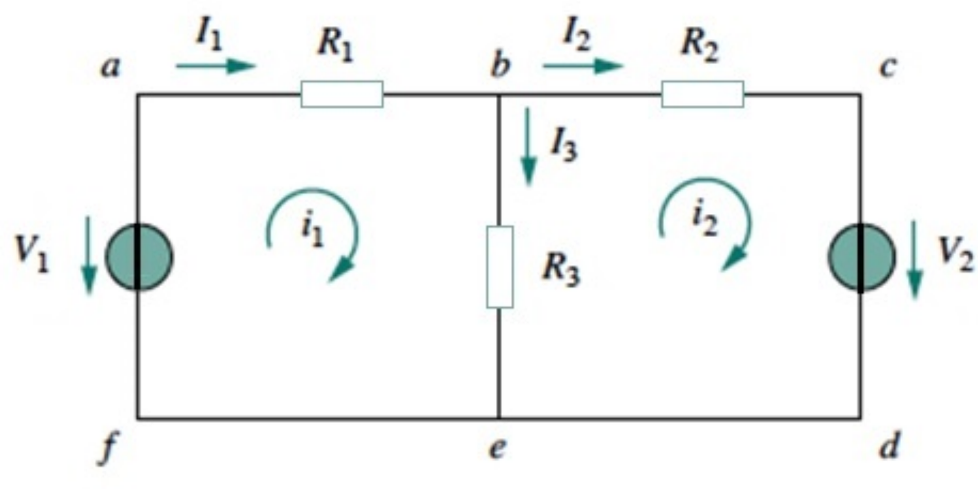
$$I_1 = i_1 \qquad I_2 = i_2 \qquad I_3 = i_1 - i_2$$

Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

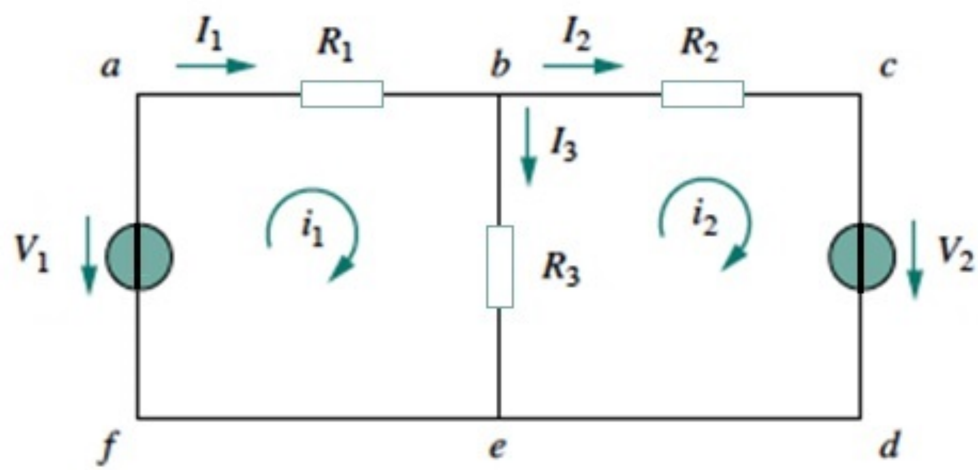
Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Somme des résistances appartenant à la maille 1

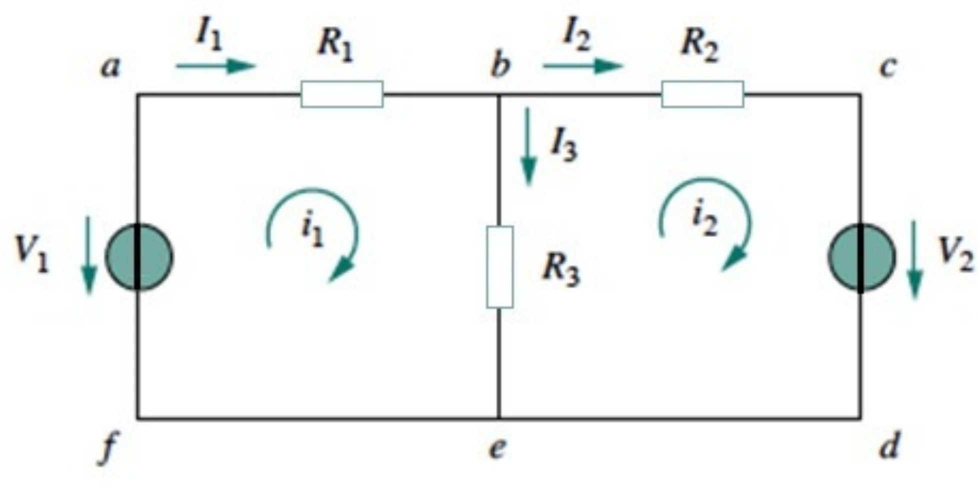
Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Somme des résistances appartenant à la maille 2

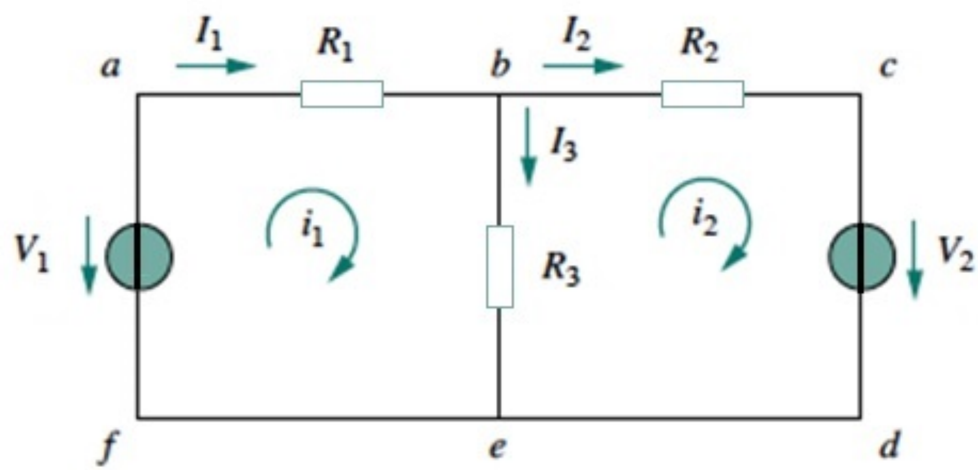
Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Somme avec signe négatif des résistances communes aux mailles 1 et 2

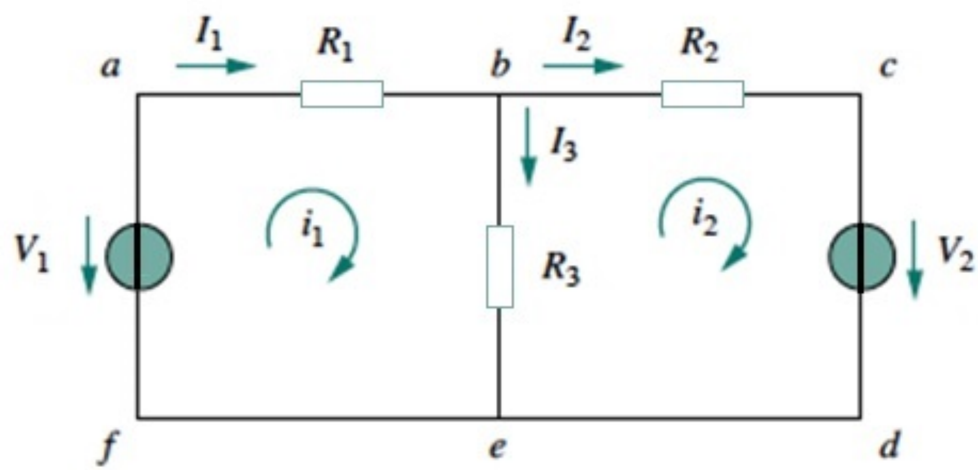
Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Somme des sources indépendantes de tension de la maille 1

Analyse de mailles par inspection du circuit



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Somme des sources indépendantes de tension de la maille 2

Analyse des mailles par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N mailles avec sources indépendantes de tension, les équations pour les courants de mailles peuvent être écrites en termes de résistances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{N1} & R_{N2} & \ldots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

avec:

R_{kk}: somme des résistances appartenant à la maille k.

Analyse des mailles par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N mailles avec sources indépendantes de tension, les équations pour les courants de mailles peuvent être écrites en termes de résistances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

avec:

$R_{kj}= R_{jk}$: somme avec signe négatif des résistances communes aux mailles k et j (avec k≠j)

Analyse des mailles par inspection du circuit: Cas général

- En général, pour un circuit à N mailles avec sources indépendantes de tension, les équations pour les courants de mailles peuvent être écrites en termes de résistances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

avec:

i_k: courant inconnu de la maille k

Analyse des mailles par inspection du circuit: Cas général

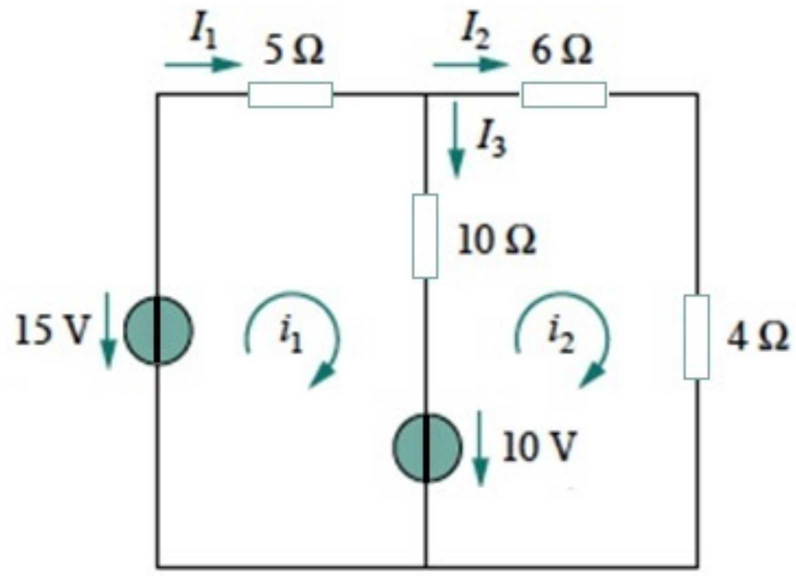
- En général, pour un circuit à N mailles avec sources indépendantes de tension, les équations pour les courants de mailles peuvent être écrites en termes de résistances, comme suit:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

avec:

v_k: somme de toutes les sources indépendantes de tension de la maille k

Analyse de mailles: Exemple numérique



Solution au tableau!