Circuits et Systèmes I
Réponse fréquentielle et diagramme de Bode

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

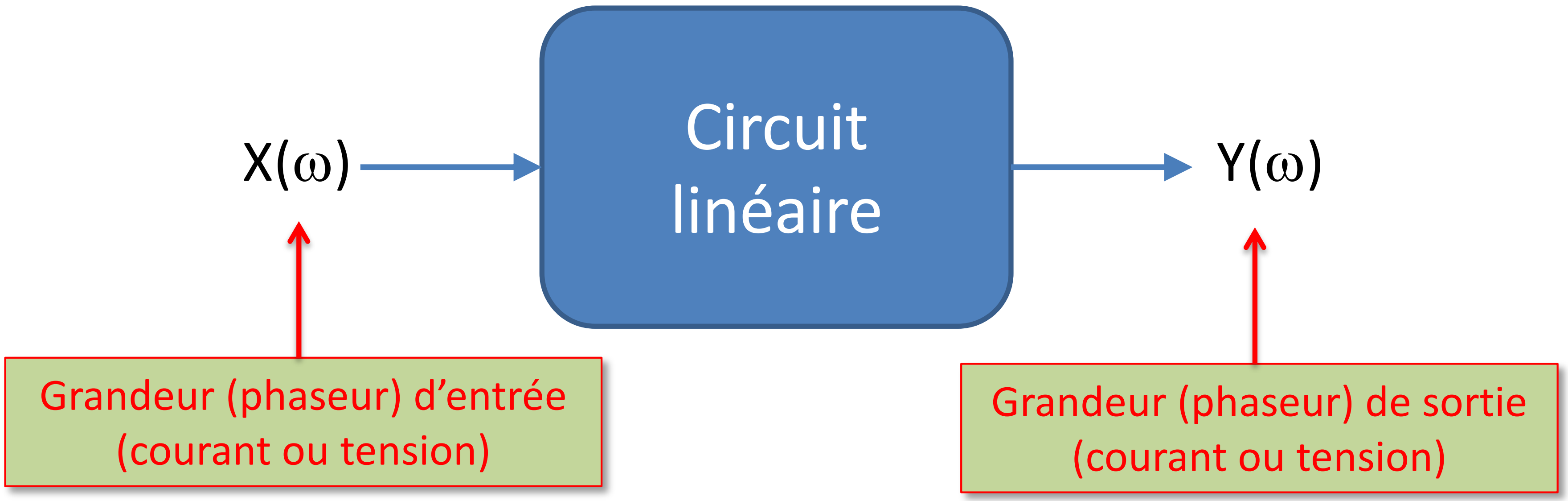
EPFL | emc lab

Introduction

- Nous avons appris à analyser à l'aide de la théorie des phaseurs les circuits alimentés par une source sinusoïdale de fréquence constante.
- La réponse fréquentielle d'un circuit s'obtient en gardant l'amplitude de la source sinusoïdale constante mais qu'on varie sa fréquence.
- La réponse fréquentielle peut être considérée comme la description complète du comportement sinusoïdal d'un circuit en fonction de la fréquence.

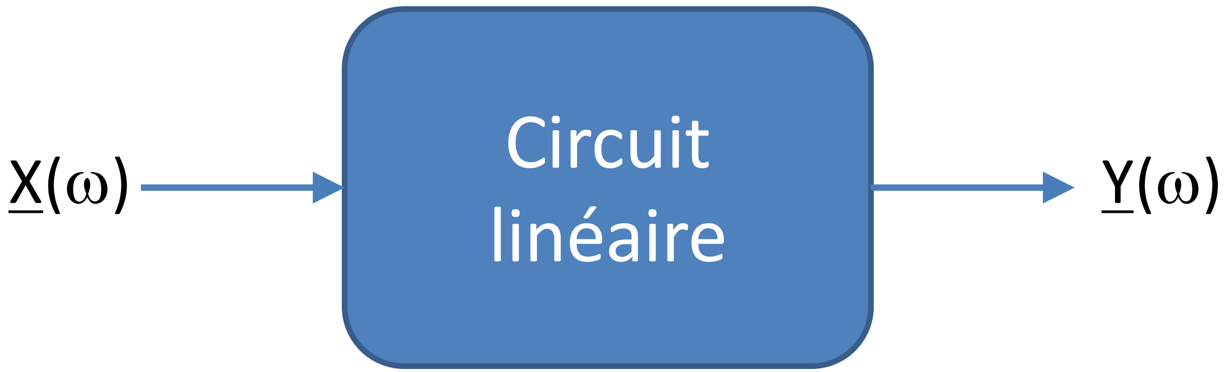
La fonction de transfert

- La réponse fréquentielle d'un circuit est décrite par la fonction de transfert $H(\omega)$
- La représentation de la fonction de transfert en fonction de la fréquence ou ω, lorsque celle-ci varie de 0 à l'infini est la réponse fréquentielle.



La fonction de transfert

- La réponse fréquentielle d'un circuit est décrite par la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$
- La représentation de la fonction de transfert en fonction de la fréquence ou ω, lorsque celle-ci varie de 0 à l'infini est la réponse fréquentielle.



- La fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ est le rapport dépendant de la fréquence entre le phaseur de sortie et le phaseur d'entrée:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)}$$

En supposant que les conditions initiales sont égales à 0.

La fonction de transfert

- Puisque l'entrée et la sortie peuvent être représentées soit par une tension soit par un courant de n'importe quel point appartenant au circuit, il existe quatre fonctions possibles de fonction de transfert

Gain en tension:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$$

Gain en courant:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{I}_{out}(\omega)}{\underline{I}_{in}(\omega)}$$

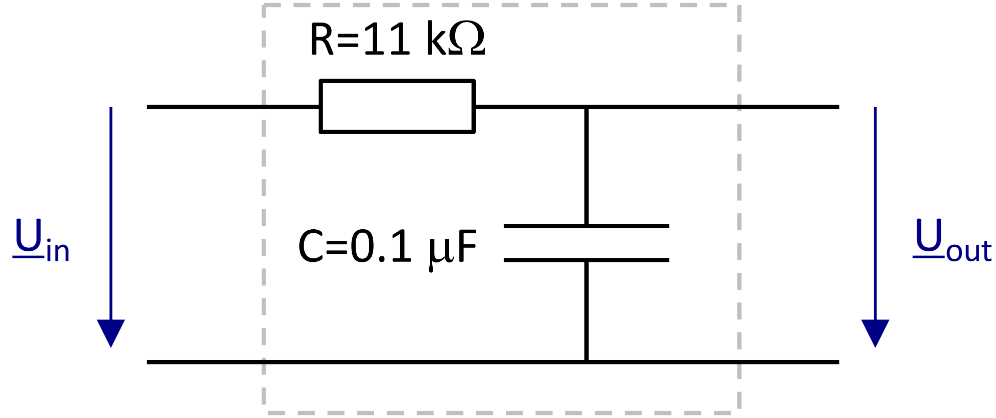
Impédance de transfert:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{I}_{in}(\omega)}$$

Admittance de transfert:

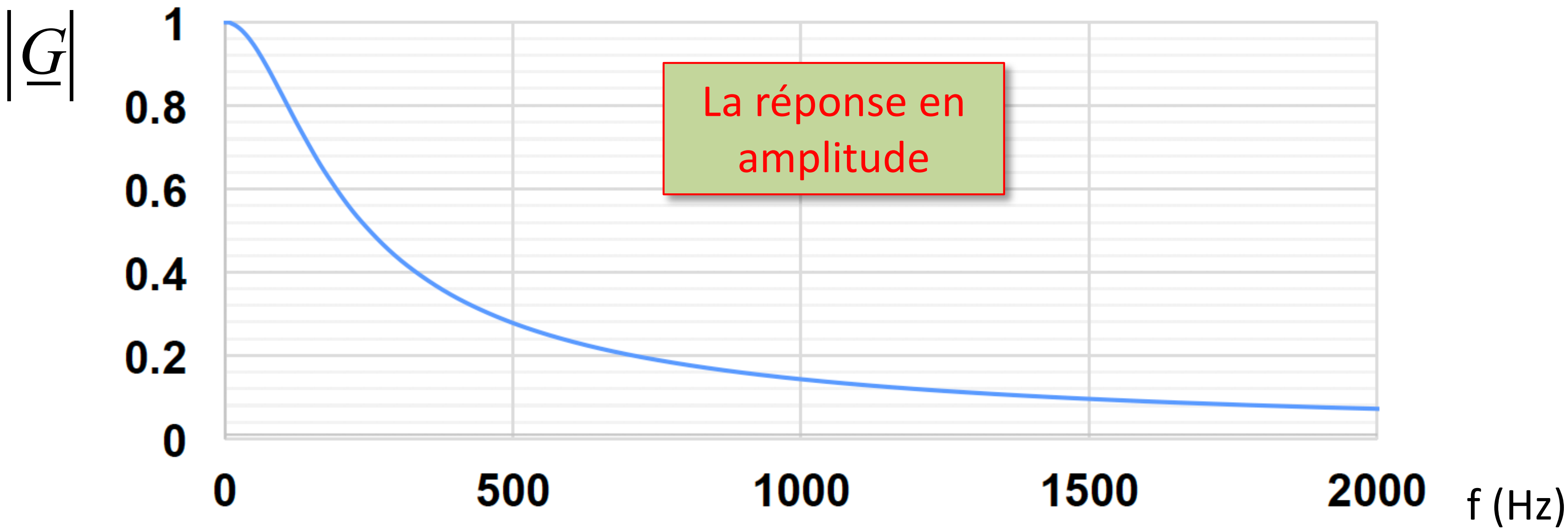
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{I}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$$

Exemple d'un filtre passe-bas

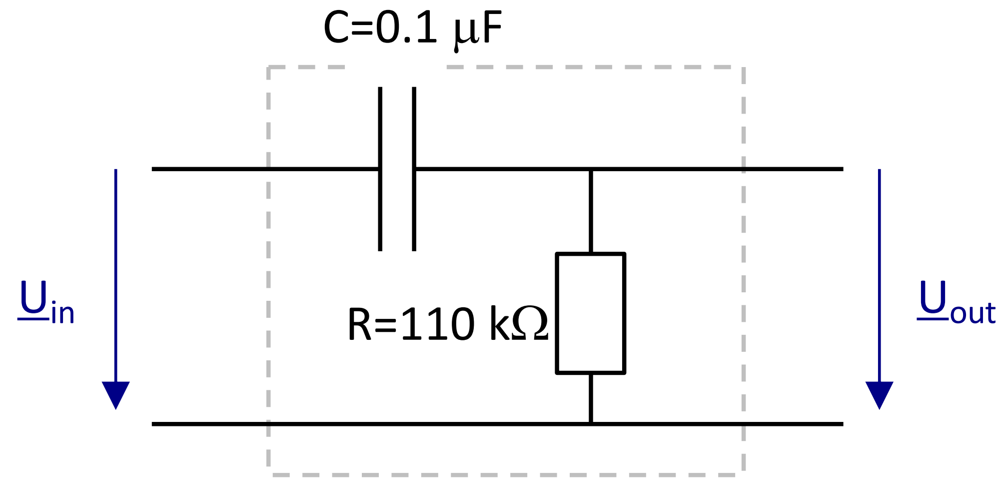


Fonction de transfert (gain en tension):

$$\underline{G} = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{\dfrac{1}{j2\pi fC}}{R + \dfrac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

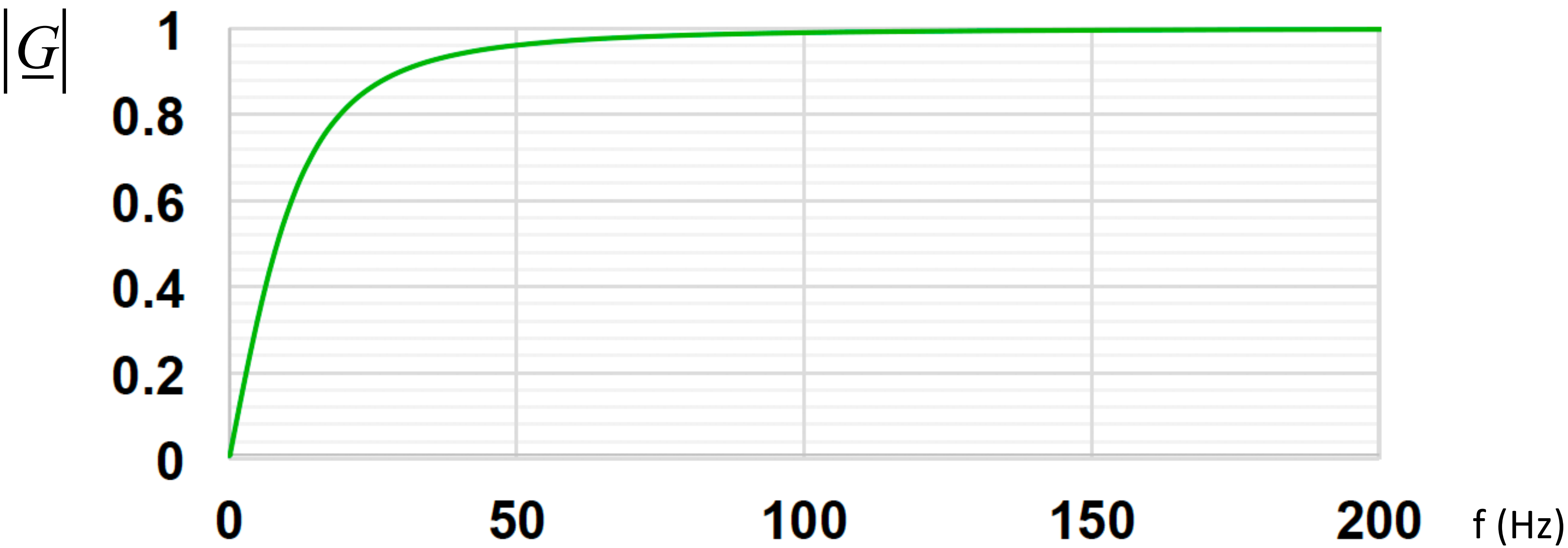


Exemple d'un filtre passe-haut

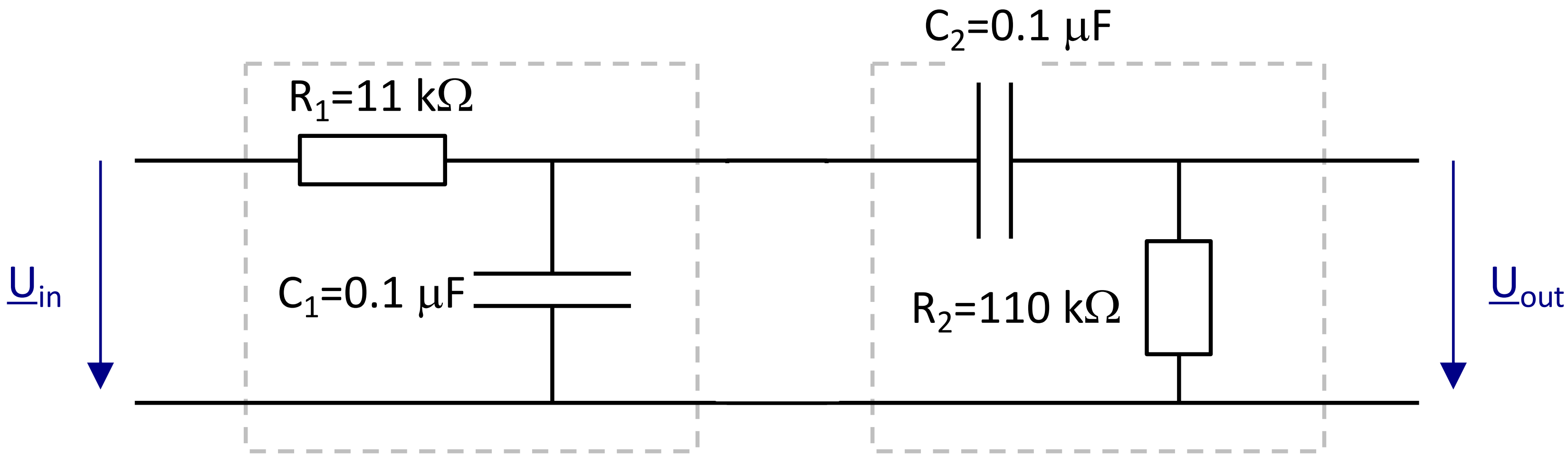


Fonction de transfert (gain en tension):

$$\underline{G} = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j2\pi fC}} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$



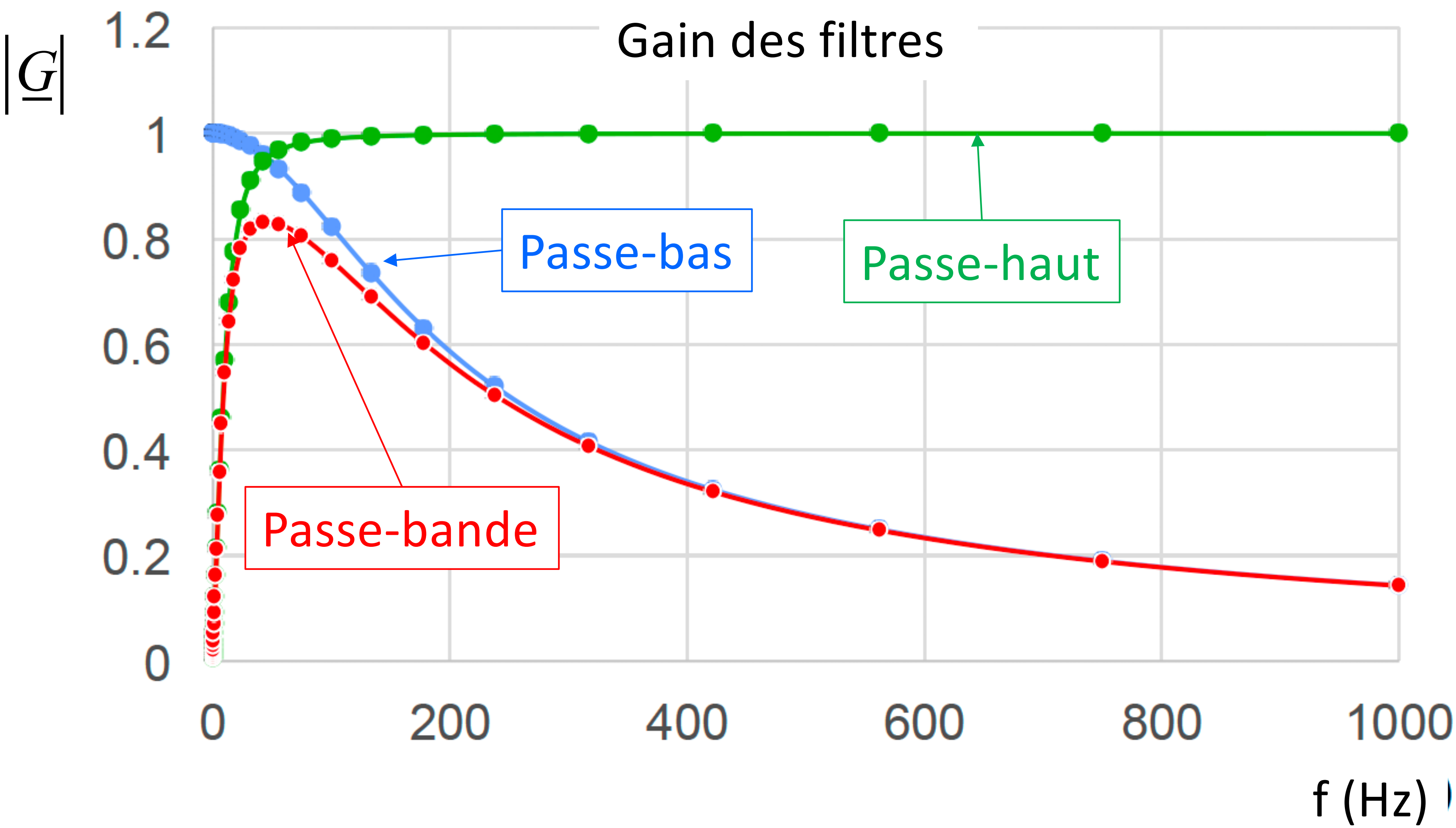
Exemple d'un filtre passe-bande



Fonction de transfert (Gain en tension):

$$\frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{j2\pi f R_2 C_2}{1 + j2\pi f (R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2) + (j2\pi f)^2 R_1 C_1 R_2 C_2}$$

Exemple d'un filtre passe-bande



La fonction de transfert

- La fonction de transfert peut être représentée sous la forme d'une fonction polynômiale:

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{\underline{N}(\omega)}{\underline{D}(\omega)} = K\frac{(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + a_{m-2}(j\omega)^{m-2} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0}{(j\omega)^n + b_{m-1}(j\omega)^{n-1} + b_{n-2}(j\omega)^{n-2} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}$$

- Les polynômes au numérateur au dénominateur peuvent se représenter en fonction des racines de ces deux fonctions:

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\ldots(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\ldots(j\omega - z_n)}$$

où z_1, z_2, …, z_m sont les racines de $\underline{N}(\omega)$ qui sont appelées les zéros de $\underline{H}(\omega)$, et p_1, p_2, …, p_n sont les racines de $\underline{D}(\omega)$ qui sont appelées les pôles de $\underline{H}(\omega)$.

- Les coefficients des deux polynômes (au numérateur et au dénominateur) étant réels, les zéros et les pôles peuvent être réels, éventuellement nuls, ou complexes conjugués deux à deux.

Diagramme de Bode

- Hendrik W. Bode (1905 –1982) a passé la majeure partie de sa carrière aux Laboratoires Bell.

- Il a travaillé sur la théorie du réglage automatique

- Mais aujourd'hui, on se souvient de lui comme l'inventeur des diagrammes de Bode utilisées pour décrire la comportement en fréquence des systèmes linéaires.

Logarithmes et décibels

- Rappel des principales propriétés des logarithmes:

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log y^{x} = x \log y$$

Logarithmes et décibels

- Dans les systèmes de communications, on utilise le décibel pour mesurer le rapport de deux niveaux de puissances (gain de puissance):

$$G_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

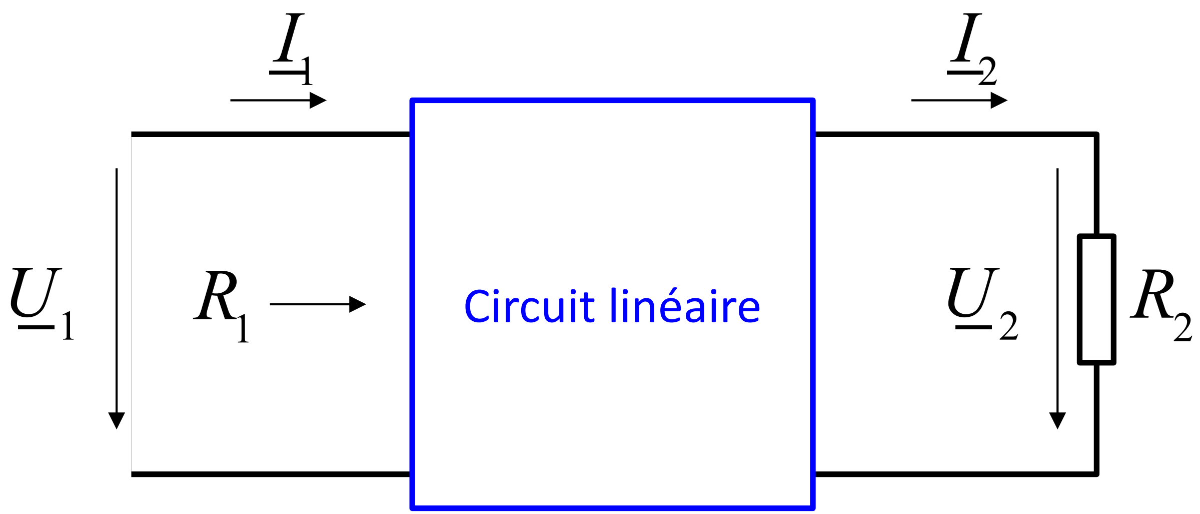
- Lorsque $P_1=P_2$, le gain est de 0 dB.
- Lorsque $P_2=2P_1$, le gain est de 3 dB.
- Lorsque $P_2=0.5P_1$, le gain est de -3 dB.

Une raison importante pour laquelle les logarithmes sont utilisées à grande échelle:

$$\log\frac{1}{A} = -\log A$$

Logarithmes et décibels

- Le gain peut être aussi exprimé en terme de rapport des tensions ou courants. Considérons le circuit suivant:



$$G_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{U_2^{\ 2}/R_2}{U_1^{\ 2}/R_1}$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 + 10\log_{10}\frac{R_1}{R_2} = 20\log_{10}\frac{U_2}{U_1} - 10\log_{10}\frac{R_2}{R_1}$$

Logarithmes et décibels

- Pour le cas où $R_1=R_2$, condition qui est souvent supposée lors de la comparaison des niveaux de tension, le gain devient:

$$G_{dB} = 20\log_{10}\frac{U_2}{U_1}$$

- En utilisant maintenant les relations

$$P_1 = R_1 I_1^{\,2} \qquad P_2 = R_2 I_2^{\,2}$$

- Le gain peut s'exprimer en fonction des courants:

$$G_{dB} = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}$$

Diagramme de Bode

- Les diagrammes de Bode sont des représentations graphiques semi-logarithmiques pour l'amplitude (en décibels) et la phase (en degrés) d'une fonction de transfert en fonction de la fréquence.

- La fonction de transfert peut être décrite comme:

$$\underline{H}(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- Dans un diagramme de Bode (en amplitude).

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega)$$

Décibels

Valeur de H	$H_{dB}(\omega) = 20\log H(\omega)$ dB
0.001	-60
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
$1/\sqrt{2}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
10	20
20	26
100	40
1000	60

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\ldots(1+j\omega/z_m)}{(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\ldots(1+j\omega/p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}\left|K\right| \mp 20\log_{10}\left|j\omega\right|$$

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/z_i\right| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/p_j\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{1k}\omega/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2\right|$$

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{2l}\omega/\omega_l+(j\omega/\omega_l)^2\right|$$

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\ldots(1+j\omega/z_m)}{(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\ldots(1+j\omega/p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = \boxed{20\log_{10}\left|K\right|} \mp 20\log_{10}\left|j\omega\right|$$

Terme constant

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/z_i\right| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/p_j\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{1k}\omega/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2\right|$$

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{2l}\omega/\omega_l+(j\omega/\omega_l)^2\right|$$

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\ldots(1+j\omega/z_m)}{(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\ldots(1+j\omega/p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}\left|K\right| \boxed{\mp 20\log_{10}\left|j\omega\right|}$$

pôle et zéro nuls

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/z_i\right| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/p_j\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{1k}\omega/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2\right|$$

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{2l}\omega/\omega_l+(j\omega/\omega_l)^2\right|$$

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\ldots(1+j\omega/z_m)}{(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\ldots(1+j\omega/p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}\left|K\right| \mp 20\log_{10}\left|j\omega\right|$$

$$+\boxed{\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/z_i\right|} - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}\left|1+j\omega/p_j\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{1k}\omega/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2\right|$$

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}\left|1+j2\varsigma_{2l}\omega/\omega_l+(j\omega/\omega_l)^2\right|$$

zéros réels

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K\frac{(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\ldots(1+j\omega/z_m)}{(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\ldots(1+j\omega/p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}|K| \mp 20\log_{10}|j\omega|$$

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}|1+j\omega/z_i| - \boxed{\sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}|1+j\omega/p_j|}$$

pôles réels

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}|1+j2\varsigma_{1k}\omega/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2|$$

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}|1+j2\varsigma_{2l}\omega/\omega_l+(j\omega/\omega_l)^2|$$

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega / z_1)(1 + j\omega / z_2)\ldots(1 + j\omega / z_m)}{(1 + j\omega / p_1)(1 + j\omega / p_2)\ldots(1 + j\omega / p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}|K| \mp 20\log_{10}|j\omega|$$

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}|1 + j\omega / z_i| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}|1 + j\omega / p_j|$$

$$+\boxed{\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}|1 + j2\varsigma_{1k}\omega / \omega_k + (j\omega / \omega_k)^2|}$$

Paires complexes conjugués de zéros

$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}|1 + j2\varsigma_{2l}\omega / \omega_l + (j\omega / \omega_l)^2|$$

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega / z_1)(1 + j\omega / z_2)\ldots(1 + j\omega / z_m)}{(1 + j\omega / p_1)(1 + j\omega / p_2)\ldots(1 + j\omega / p_n)}$$

- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}|K| \mp 20\log_{10}|j\omega|$$

$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}|1 + j\omega / z_i| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}|1 + j\omega / p_j|$$

$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}|1 + j2\varsigma_{1k}\omega / \omega_k + (j\omega / \omega_k)^2|$$

$$\boxed{-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}|1 + j2\varsigma_{2l}\omega / \omega_l + (j\omega / \omega_l)^2|}$$

Paires complexes conjugués de pôles

Diagramme de Bode

- Considérons une fonction de transfert du type

Dans ce qui suit, nous allons examiner chaque terme séparément

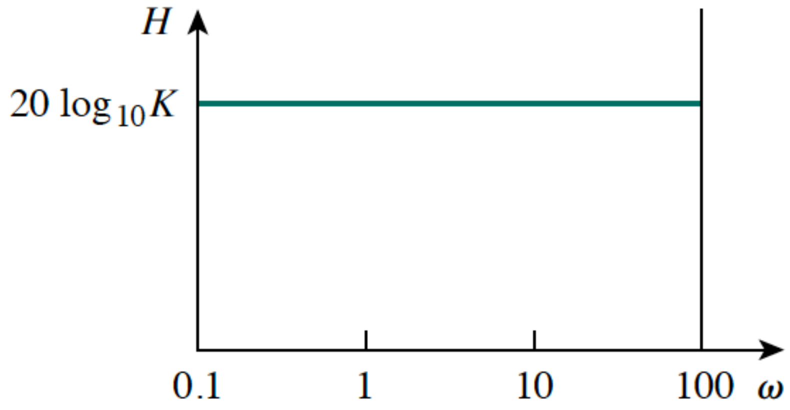
- La réponse en amplitude:

$$H_{dB}(\omega) = 20\log_{10} H(\omega) = 20\log_{10}\left|K\right| \mp 20\log_{10}\left|j\omega\right|$$
$$+\sum_{i=1}^{m_1} 20\log_{10}\left|1 + j\omega / z_i\right| - \sum_{j=1}^{n_1} 20\log_{10}\left|1 + j\omega / p_j\right|$$
$$+\sum_{k=1}^{m_2} 20\log_{10}\left|1 + j2\varsigma_{1k}\omega / \omega_k + (j\omega / \omega_k)^2\right|$$
$$-\sum_{l=1}^{n_2} 20\log_{10}\left|1 + j2\varsigma_{2l}\omega / \omega_l + (j\omega / \omega_l)^2\right|$$

Diagramme de Bode: le terme constant

$$20\log\left|K\right|$$

Phase = 0



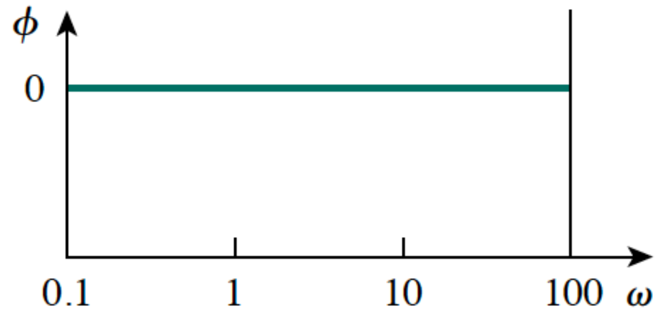
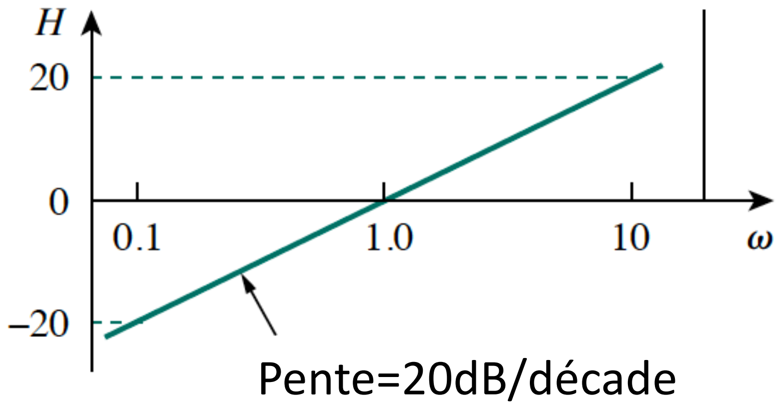


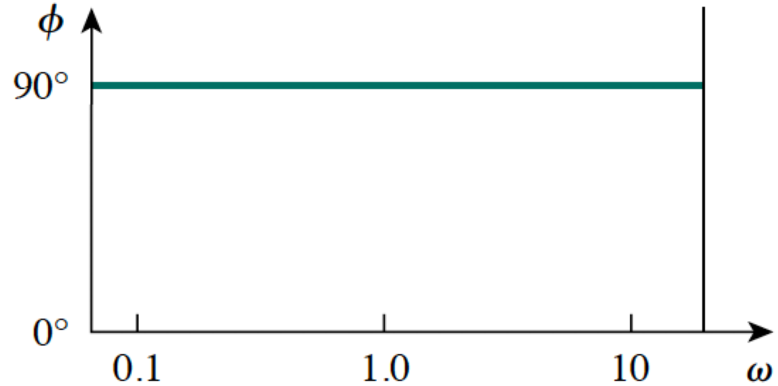
Diagramme d'amplitude

Diagramme de phase

Diagramme de Bode: zéro à l'origine jω

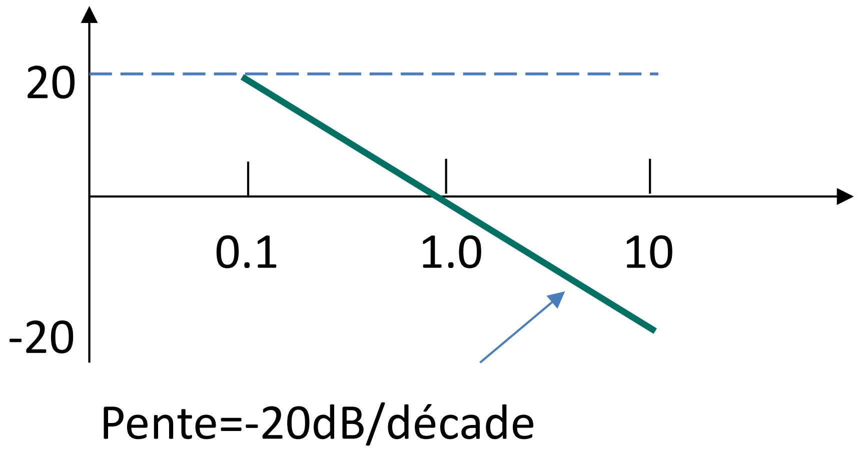


$$20 \log \omega$$

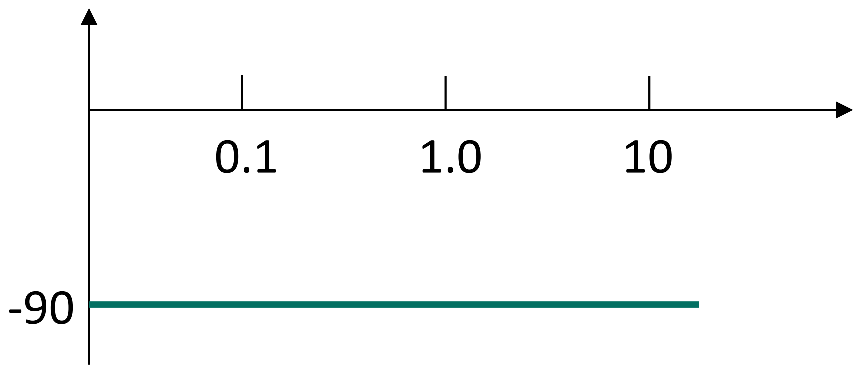


Phase = 90^0

Diagramme de Bode: pôle à l'origine $(j\omega)^{-1}$



$$-20\log_{10}\omega$$



Phase = -90^0

Diagramme de Bode: zéro réel

- L'amplitude

$$H_{dB} = 20\log_{10}\left|1 + j\omega / z_1\right| = \begin{cases} 20\log_{10} 1 = 0 & \text{pour}\, \omega \to 0 \\ 20\log_{10} \omega / z_1 & \text{pour}\, \omega \to \infty \end{cases}$$

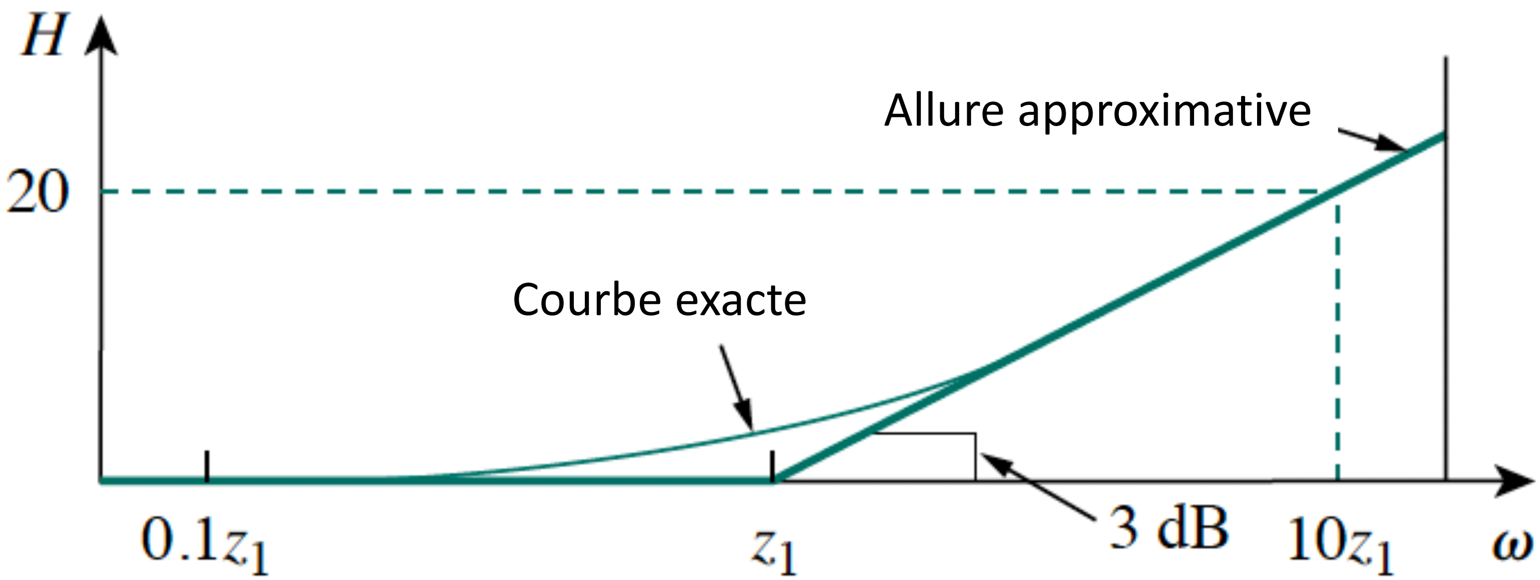


Diagramme de Bode: zéro réel

- Phase:

$$\arg \underline{H}_{dB} = \tan^{-1} \omega / z_1 \quad = \begin{cases} 0^0 & \text{si } \omega = 0 \\ 45^0 & \text{si } \omega = z_1 \\ 90^0 & \text{si } \omega \to \infty \end{cases}$$

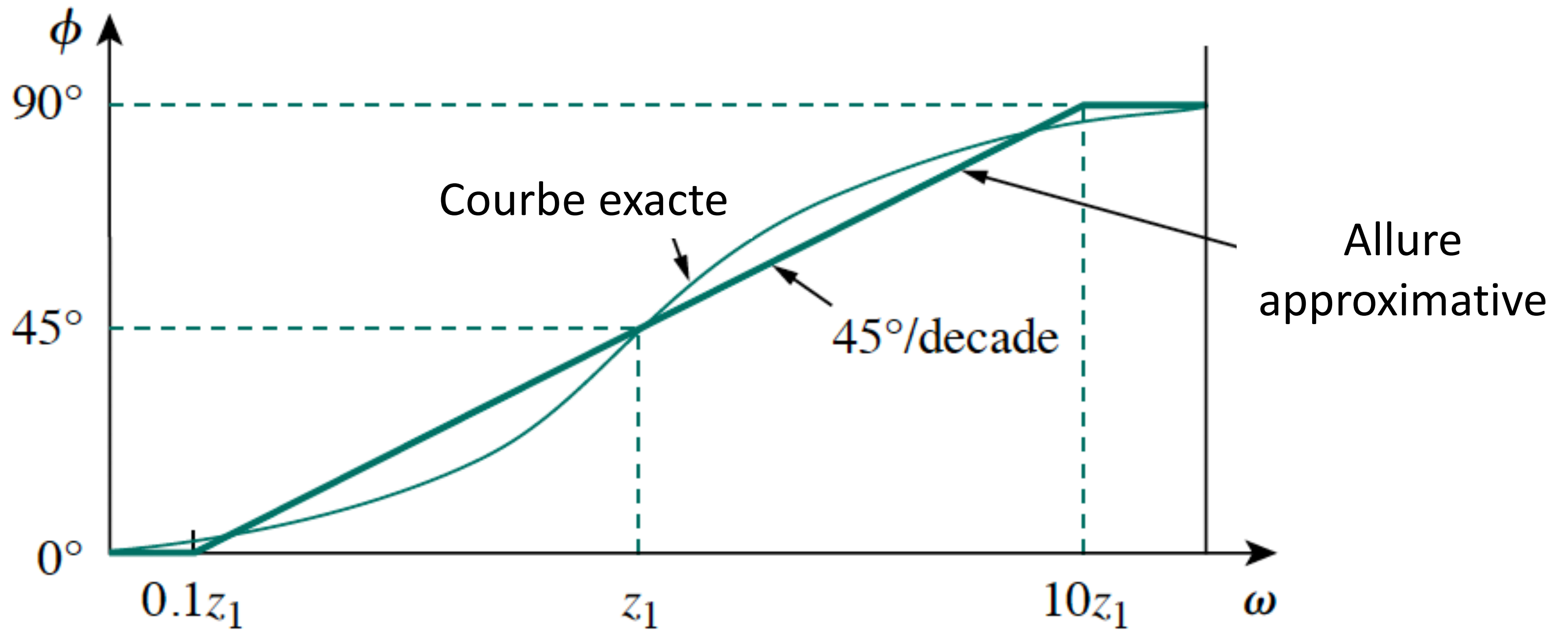


Diagramme de Bode: pôle réel

- L’amplitude

$$H_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/p_1}\right| = \begin{cases} 20\log_{10} 1 = 0 & \text{pour}\,\omega \to 0 \\ -20\log_{10} \omega/p_1 & \text{pour}\,\omega \to \infty \end{cases}$$

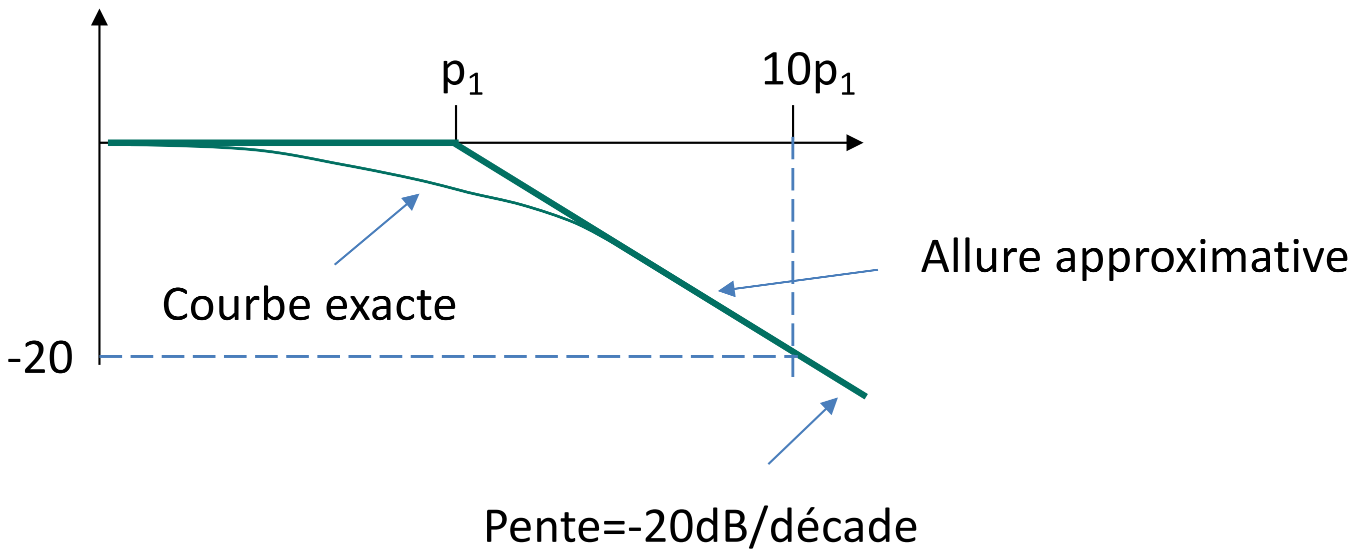


Diagramme de Bode: pôle réel

- Phase:

$$\arg \underline{H}_{dB} = -\tan^{-1} \omega / p_1 \;\; = \begin{cases} 0^0 & \text{si } \omega = 0 \\ -45^0 & \text{si } \omega = z_1 \\ 90^0 & \text{si } \omega \to \infty \end{cases}$$

Diagramme de Bode: pôle quadratiques (complexes conjugés)

- L'amplitude

$$H_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left|1 + j2\varsigma_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2\right|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour}\, \omega \to 0 \\ -40\log_{10}\omega/\omega_n & \text{pour}\, \omega \to \infty \end{cases}$$

- Le diagramme de l'amplitude est représenté à la figure suivante:

Diagramme de Bode:
pôle quadratiques (complexes conjugés)

$$H_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left|1 + j2\varsigma_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2\right|$$

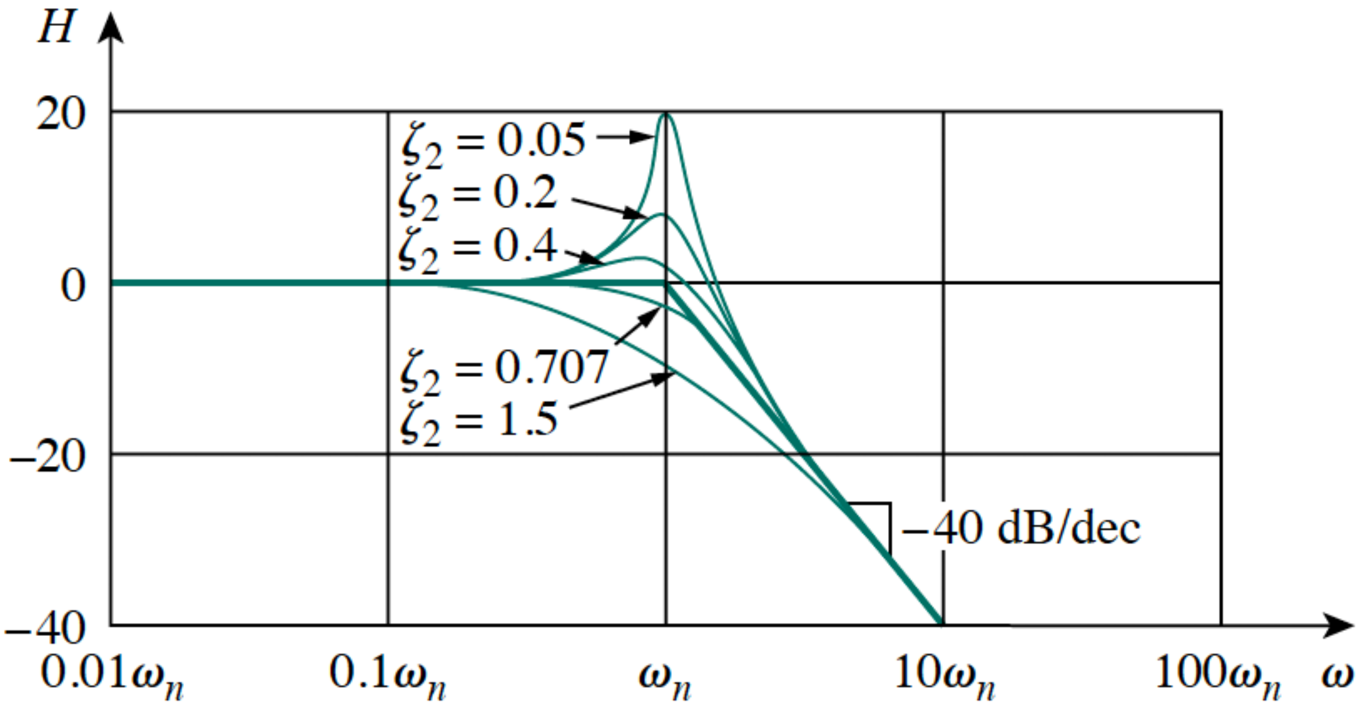


Diagramme de Bode: pôle quadratiques (complexes conjugés)

$$H_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left|1 + j2\varsigma_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2\right|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour}\, \omega \to 0 \\ -40\log_{10}\omega/\omega_n & \text{pour}\, \omega \to \infty \end{cases}$$

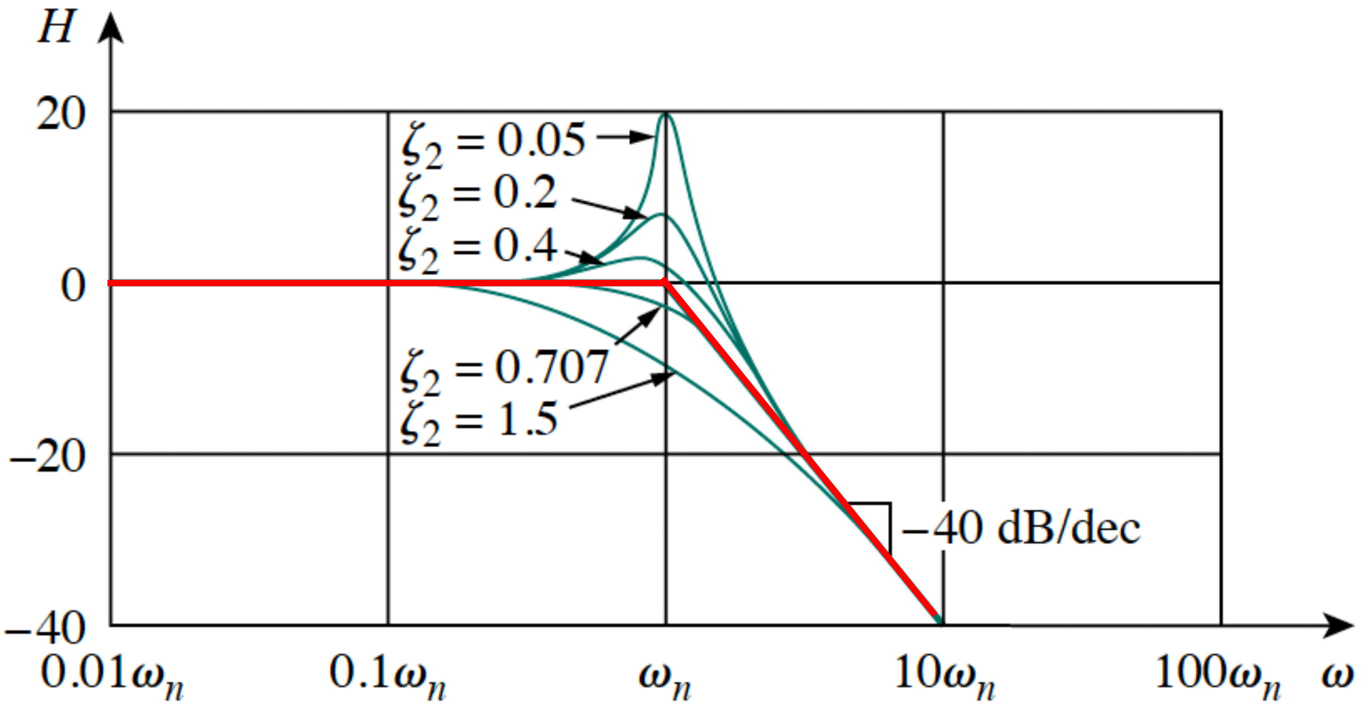


Diagramme de Bode:
pôle quadratiques (complexes conjugés)

- La phase peut être exprimée comme suit:

$$\arg \underline{H}_{dB} = -\tan^{-1} \frac{2\varsigma_2 \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^{\,2}} = \begin{cases} 0^0 & \text{si } \omega = 0 \\ -90^0 & \text{si } \omega = \omega_n \\ -180^0 & \text{si } \omega \to \infty \end{cases}$$

- Le diagramme de phase est représenté à la figure suivante:

Diagramme de Bode:
pôle quadratiques (complexes conjugés)

$$\arg \underline{H}_{dB} = -\tan^{-1} \frac{2\varsigma_2 \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n{}^2}$$

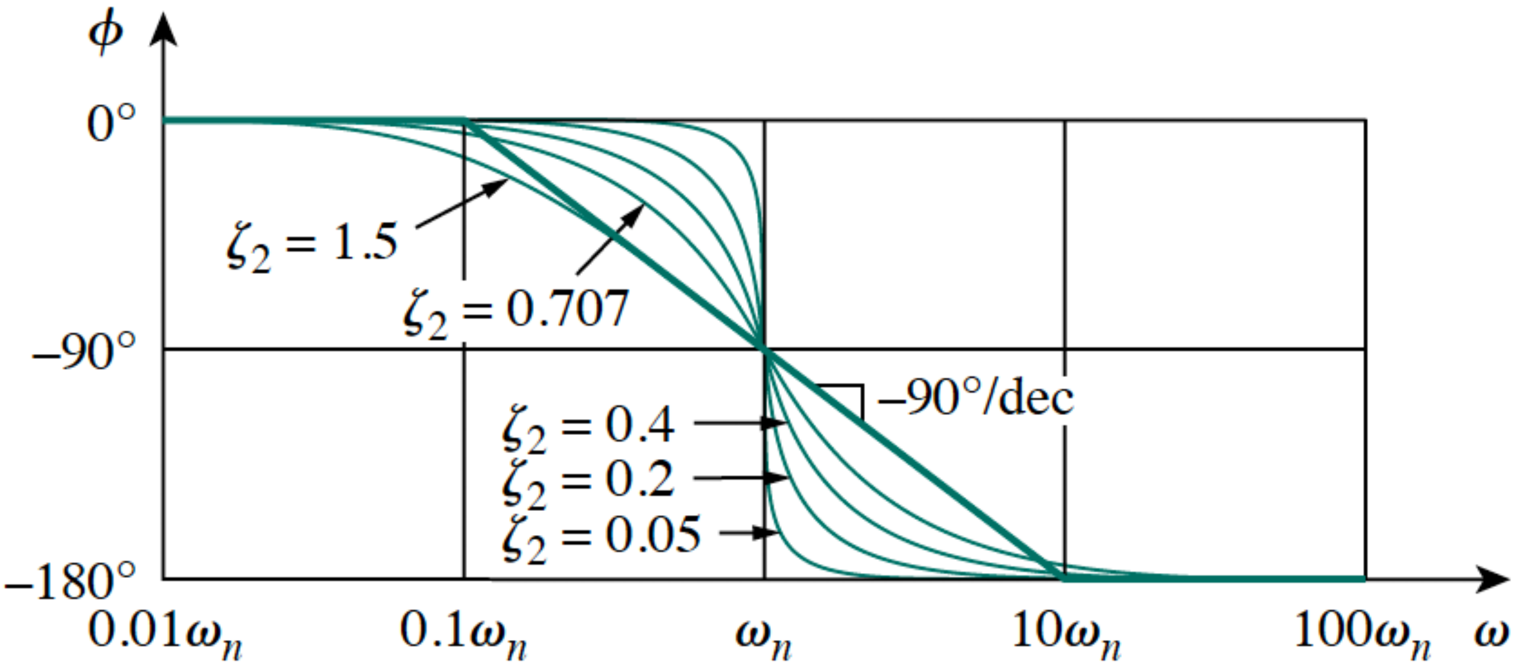


Diagramme de Bode: pôle quadratiques (complexes conjugés)

$$\arg \underline{H}_{dB} = -\tan^{-1}\frac{2\varsigma_2\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n{}^2} = \begin{cases} 0^0 & \text{si } \omega = 0 \\ -90^0 & \text{si } \omega = \omega_n \\ -180^0 & \text{si } \omega \to \infty \end{cases}$$

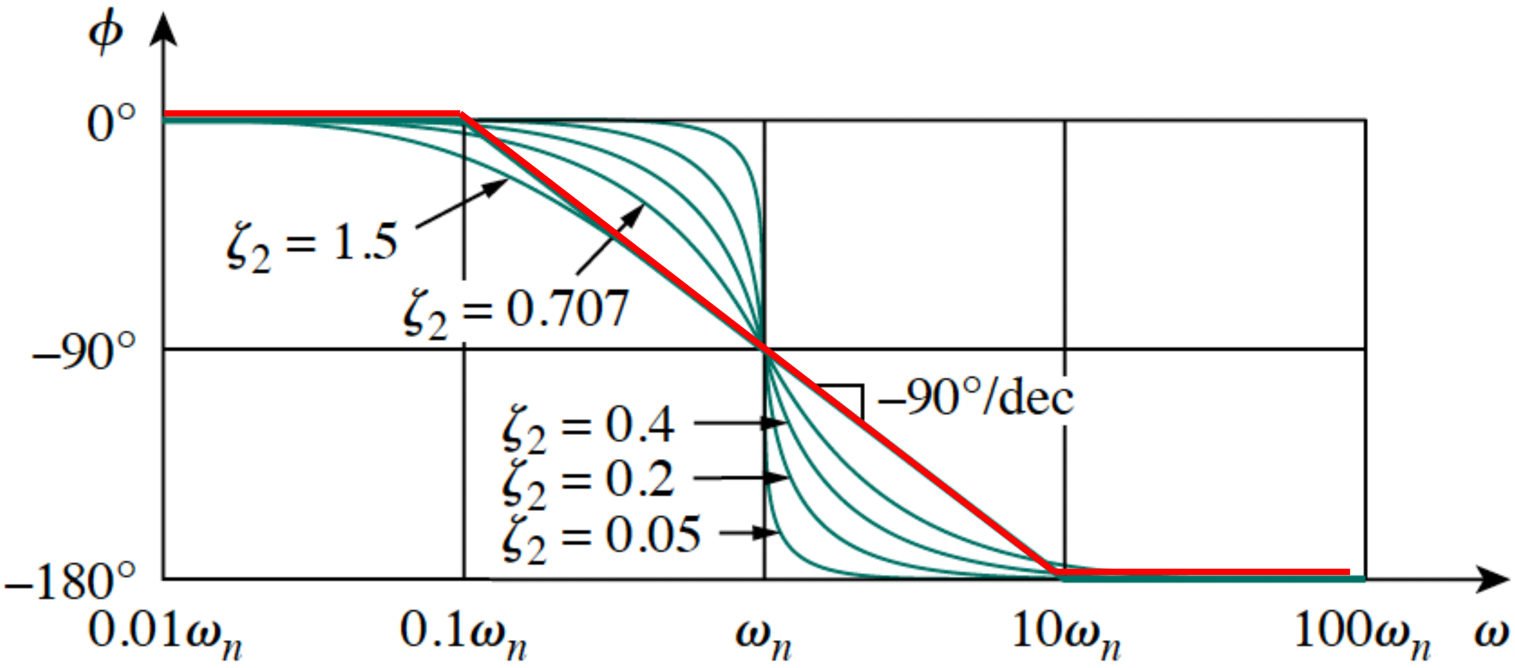


Diagramme de Bode:
Résumé des caractéristiques (1/3)

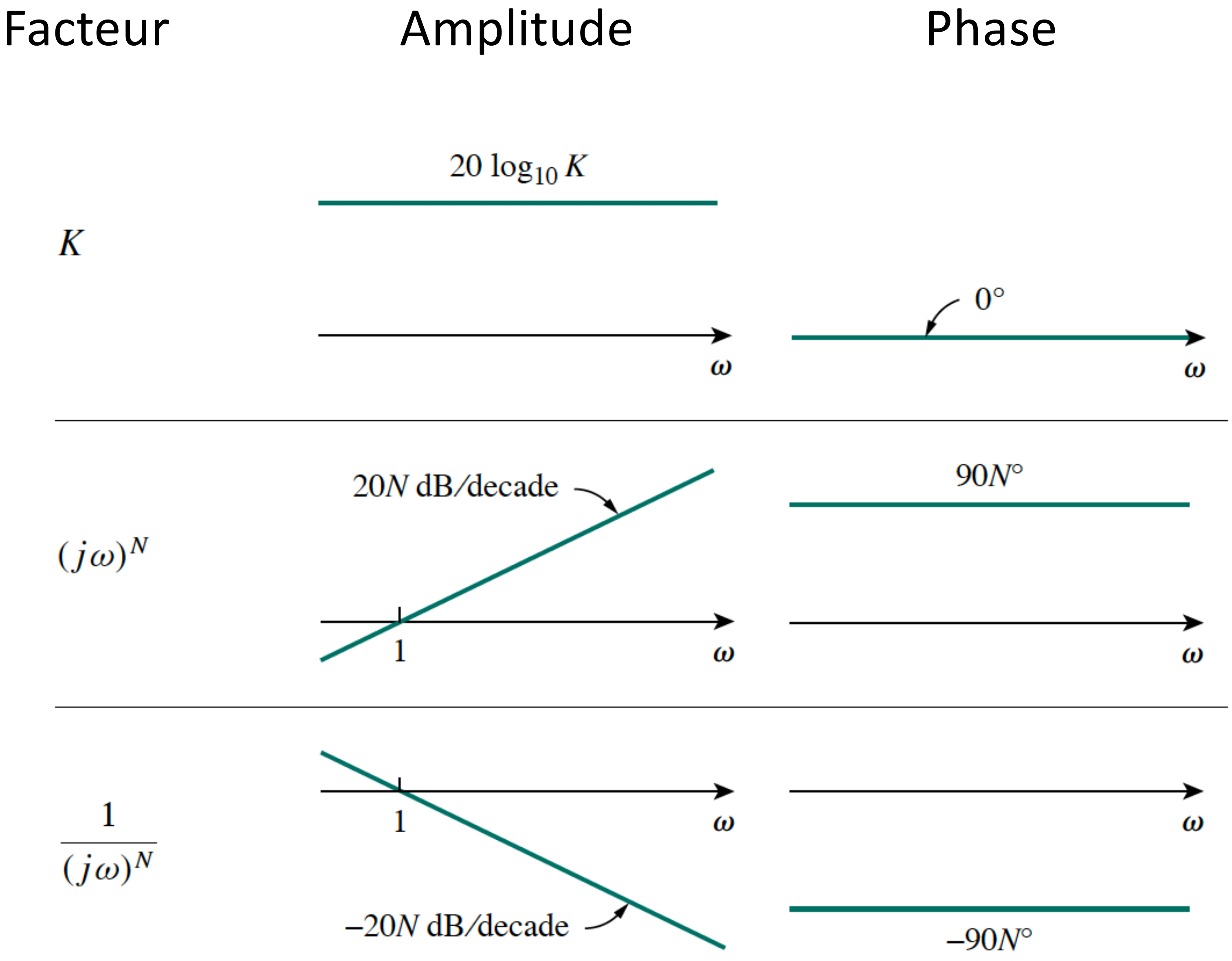
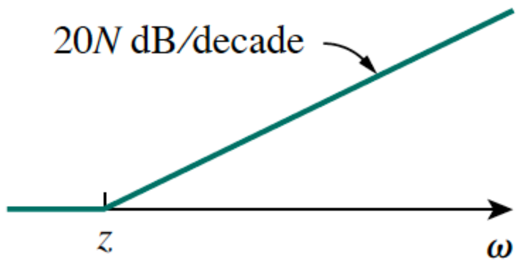
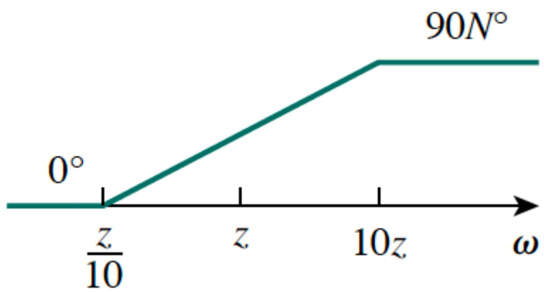


Diagramme de Bode: Résumé des caractéristiques (2/3)

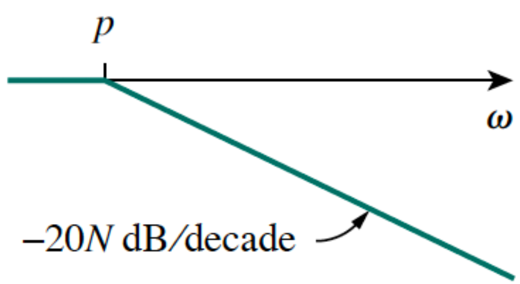
Facteur | Amplitude | Phase

$$\left(1+\frac{j\omega}{z}\right)^N$$





$$\frac{1}{(1+j\omega/p)^N}$$



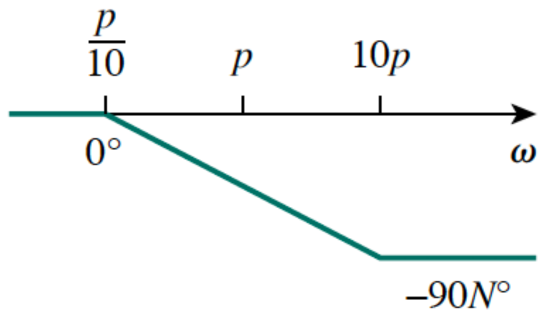
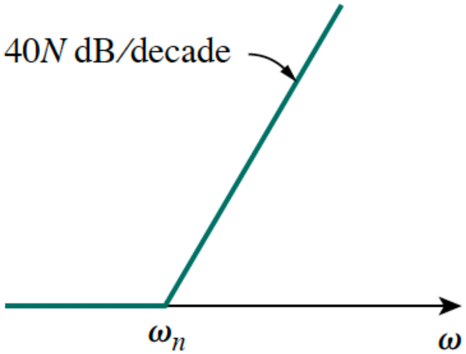
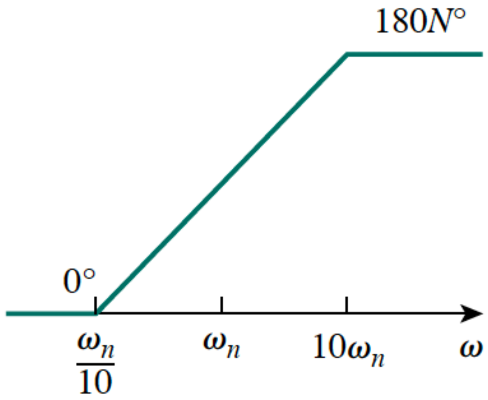
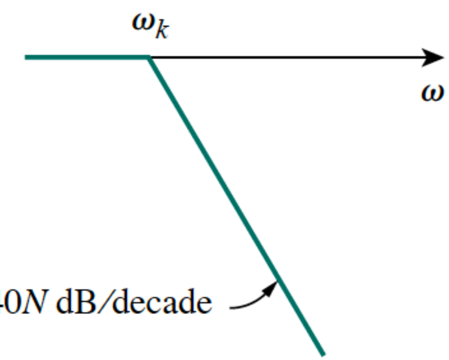
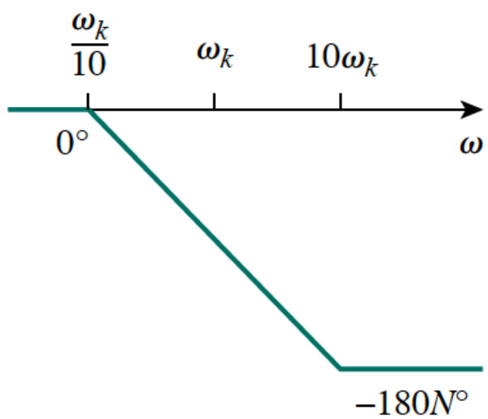
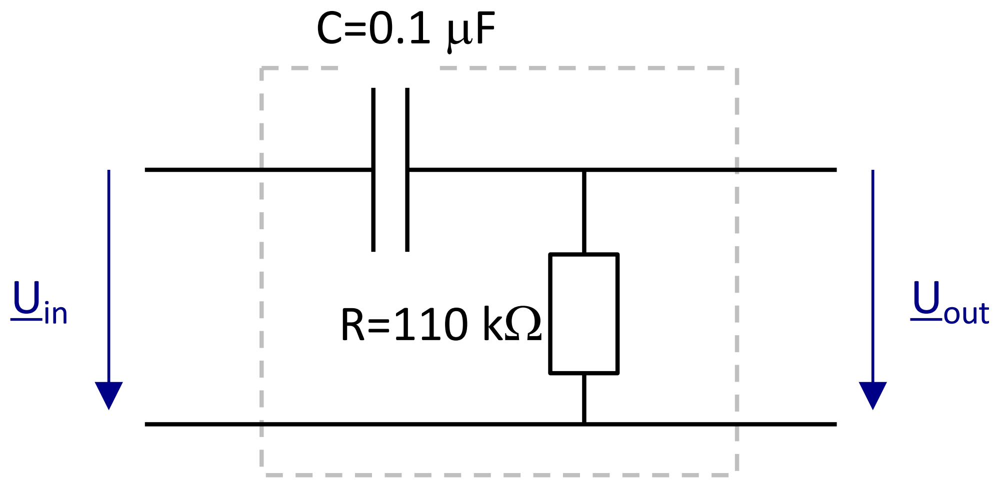


Diagramme de Bode: Résumé des caractéristiques (3/3)

Facteur	Amplitude	Phase
$\left[1+\frac{2j\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$		
$\frac{1}{[1+2j\omega\zeta/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2]^N}$		

Exemple 1

- Construire les diagrammes de Bode pour le filtre passe-haut suivant:



Solution au tableau!

Exemple 2

- Construire les diagrammes de Bode pour la fonction de transfert suivante:

$$H(\omega) = \frac{200\, j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

Solution au tableau!