Circuits et Systèmes I
Chapitre 11: Une Introduction à l’Application de la Transformation de Fourier à l’Analyse des Circuits

Farhad Rachidi
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Lausanne, Switzerland

Définition

- Une transformation intégrale de $f(t)$ à partir du domaine temporel vers le domaine fréquentiel.

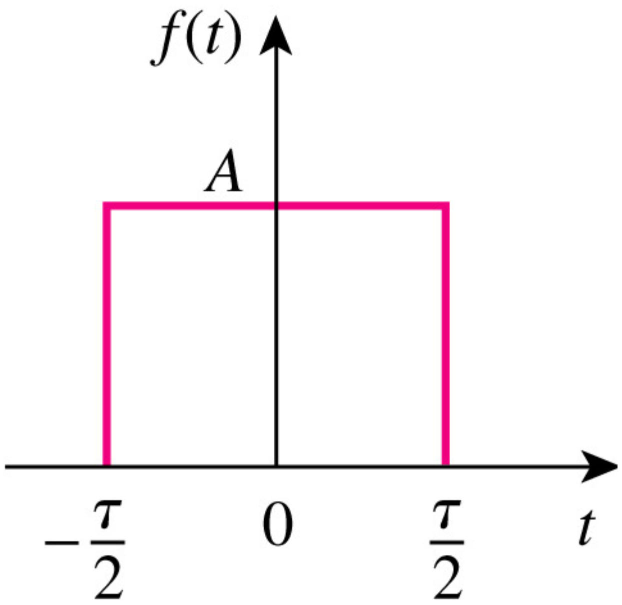
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- $F(\omega)$ est une fonction complexe appelée aussi le spectre. Son module est appelé le spectre d'amplitude, et sa phase le spectre de phase.
- Transformée de Fourier inverse:

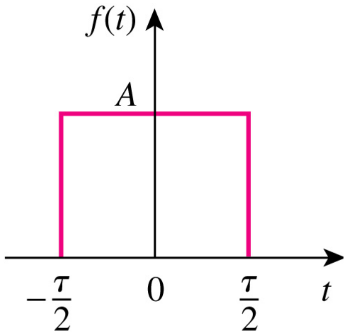
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Exemple 1

- Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire de largeur τ et d'amplitude A



Exemple 1

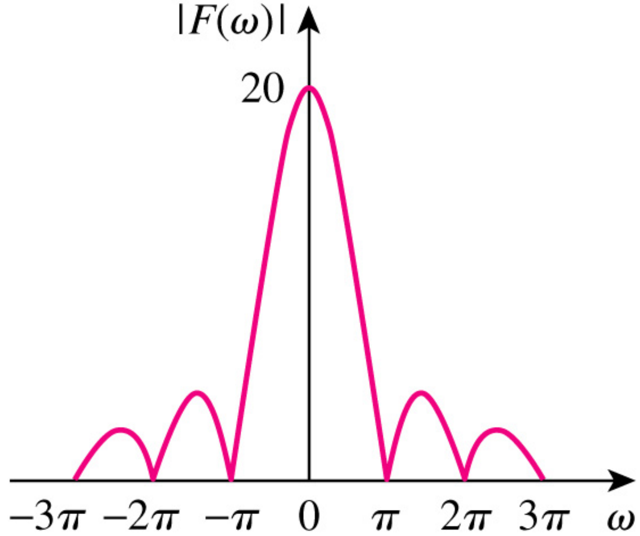


$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{j\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{2A}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j}\right)$$

$$= A\tau \,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega\tau}{2}$$

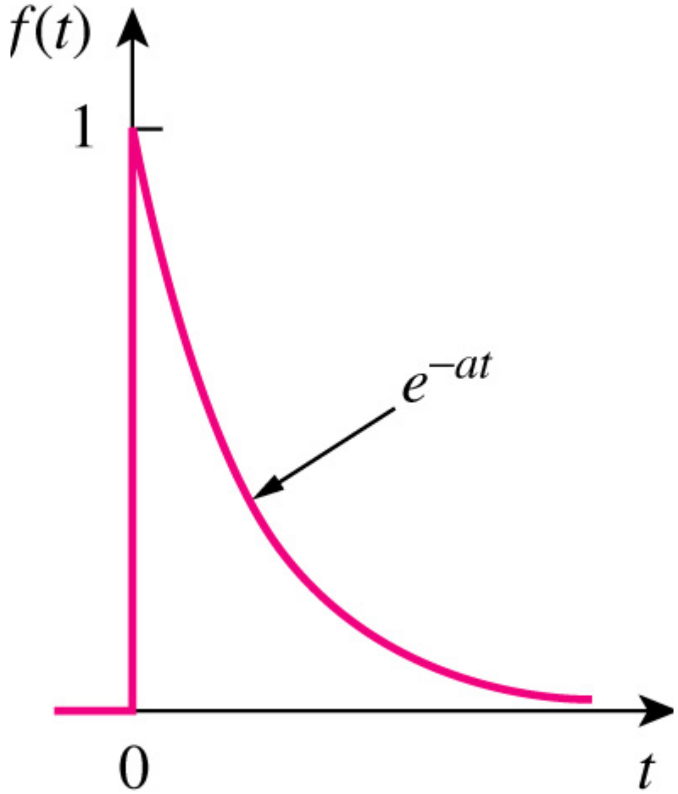


Spectre d'amplitude de l'impulsion rectangulaire

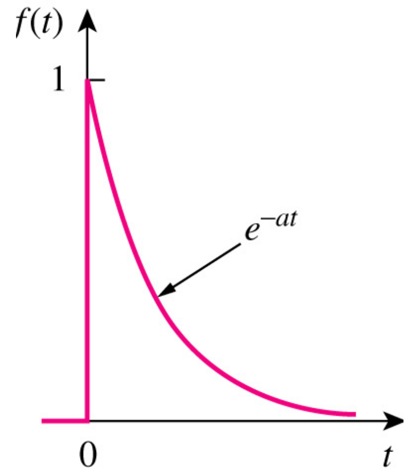
τ=2, A=10

Exemple 2

- Transformée de Fourier d'une fonction exponentielle



Exemple 2



$$f(t)=e^{-at}u(t)=\begin{cases} e^{-at}, & \mathrm{t}>0 \\ 0, & \mathrm{t}<0 \end{cases}$$

Par conséquent:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jat}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{a+j\omega}$$

Propriétés de la transformée de Fourier

- Linéarité:
  - Si $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ sont les transformées de Fourier des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, alors:

$$F\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- Mise à l'échelle du temps
  - Si $F(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$, alors

$$F\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \text{ est une constante}$$

  - $|a| > 1$ correspond à une compression de fréquence ou à une expansion du temps
  - $|a| < 1$ correspond à une expansion de fréquence ou à une compression du temps

Propriétés de la transformée de Fourier

- Décalage dans le temps:
  - Si $F(\omega)$ est lea transformée de Fourier de la fonction $f(t)$, alors

$$F\left[f(t-t_0)\right]=e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

- Déplacement en fréquence (modulation d'amplitude):

$$F\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]=F(\omega-\omega_0)$$

Propriétés de la transformée de Fourier

- Différentiation par rapport au temps:
  - Si $F(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$, alors

$$F\left[\frac{df}{dt}\right] = j\omega F(s)$$

- Intégration par rapport au temps:

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\boxed{F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}$$

La composante continue

Propriétés de la transformée de Fourier

- Produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{or } y(t) = x(t) * h(t)$$

- Transformée de Fourier

$$Y(\omega) = F\left[h(t) * x(t)\right] = H(\omega)X(\omega)$$

Propriétés de la transformée de Fourier

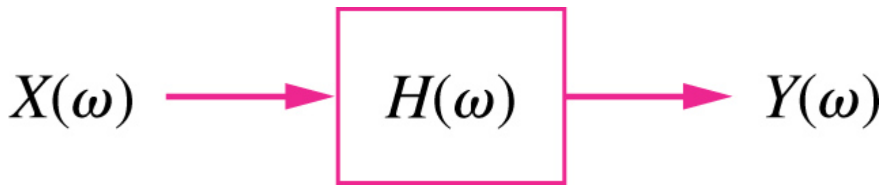
- Paires de transformées de Fourier

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(t+\tau) - u(t-\tau)$	$2\frac{\sin\omega\tau}{\omega}$
$\lvert t \rvert$	$\frac{-2}{\omega^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{at}u(-t)$	$\frac{}{a - j\omega}$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

Application aux circuits

- La transformée de Fourier généralise l'application de la technique de phaseurs à des fonctions non-sinusoïdales



$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

- En transformant les fonctions dans le domaine fréquentiel, nous pouvons utiliser les techniques habituelles pour solutionner les circuits.
- Enfin, nous prenons la transformée inverse de Fourier pour obtenir la réponse dans le domaine temporel.

Application aux circuits

- Fonction de transfert:

$$X(\omega) = 1 \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow H(\omega)$$

$$\uparrow$$

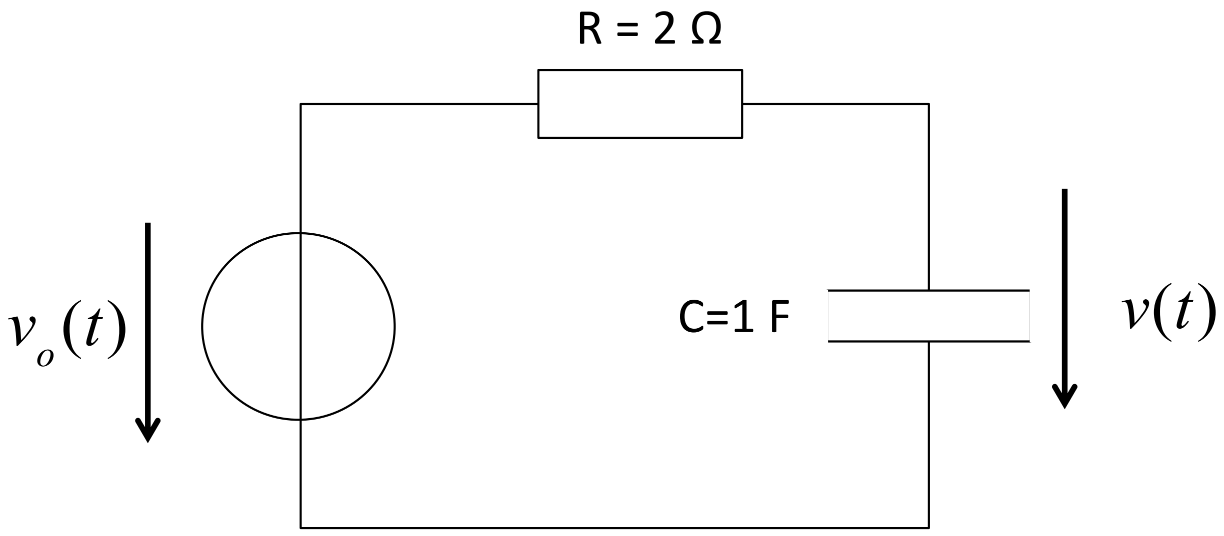
$$\boxed{\delta(t)}$$

- La fonction de transfert est l transformée de Fourier de la réponse à l'impulsion $\delta(t)$

Application aux circuits: Exemple

- Trouver la tension $v(t)$ dans le circuit ci-dessous pour

$$v_o(t) = 2\exp(-3t)\varepsilon(t)$$



avec $V(0)=0$

Application aux circuits: Exemple

- Transformée de Fourier de la tension de source:

$$v_o(t) = 2\exp(-3t)\varepsilon(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{V_o}(\omega) = \frac{2}{3 + j\omega}$$

- Fonction de transfert du circuit:

$$H(\omega) = \frac{\mathrm{V}(\omega)}{\mathrm{V}_o(\omega)} = \frac{1}{1 + j2\omega}$$

- D'où

$$\mathrm{V}(\omega) = \frac{1}{(3 + j\omega)(0.5 + j\omega)}$$

- Solution dans le domaine temporel:

$$v_0(t) = 0.4(e^{-0.5t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

Fourier vs Laplace

- La transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace.

- La transformée de Laplace est applicable à un plus large éventail de fonctions que la transformée de Fourier.

- La transformée de Laplace est aussi mieux adaptée pour l'analyse des régimes transitoires avec conditions initiales, tandis que la transformée de Fourier ne peut pas en tenir compte.

- La transformée de Fourier permet de mieux comprendre les caractéristiques de fréquence des signaux.