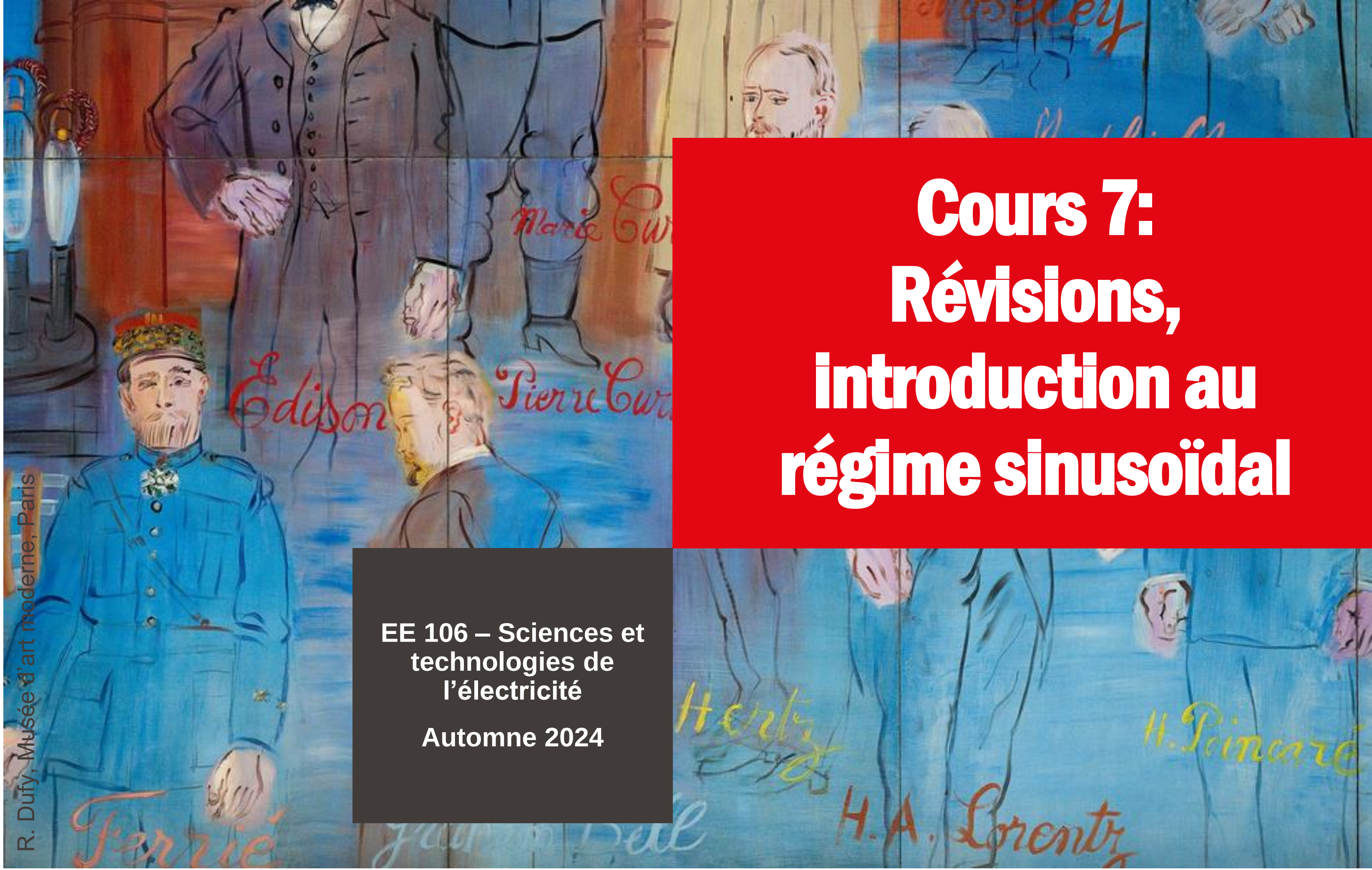
EPFL



R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 7: Révisions, introduction au régime sinusoïdal

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2024

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Rappels

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

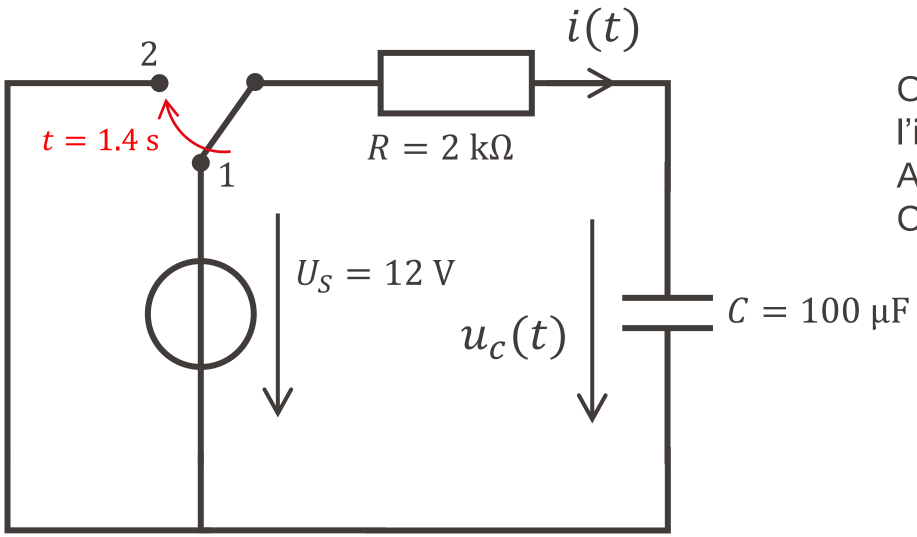
- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

- Rappels -

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Circuit RC – exemple



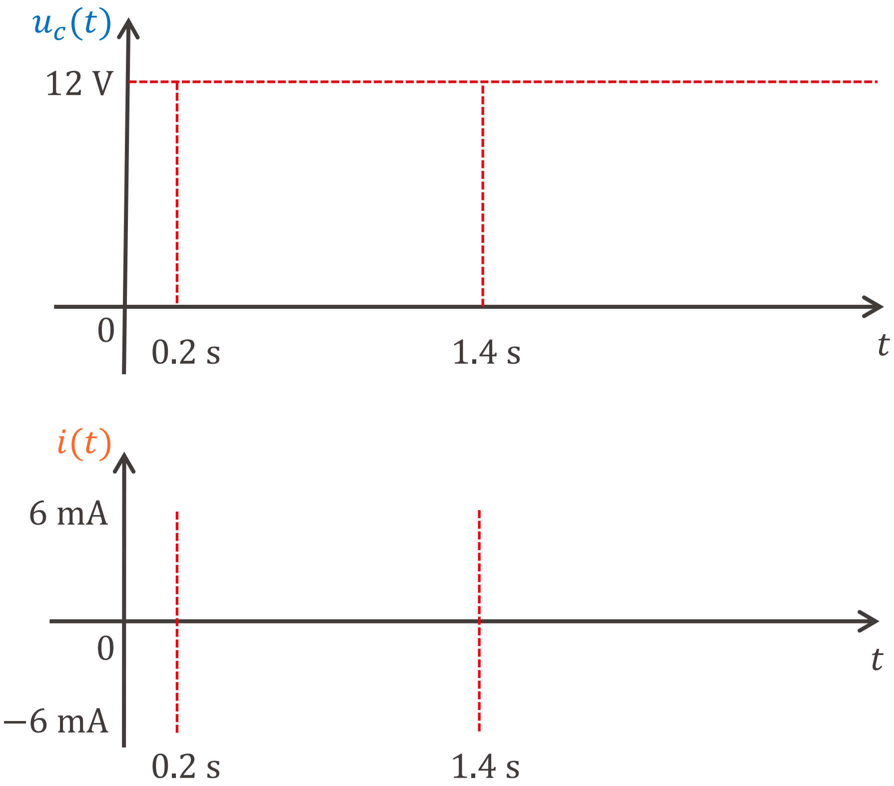
On considère le condensateur initialement déchargé et l'interrupteur est en position 1.
A $t = 1.4\ s$, on bascule l'interrupteur en position 2.
Calculons $u_c(t)$ et $i(t)$

Circuit RC – exemple

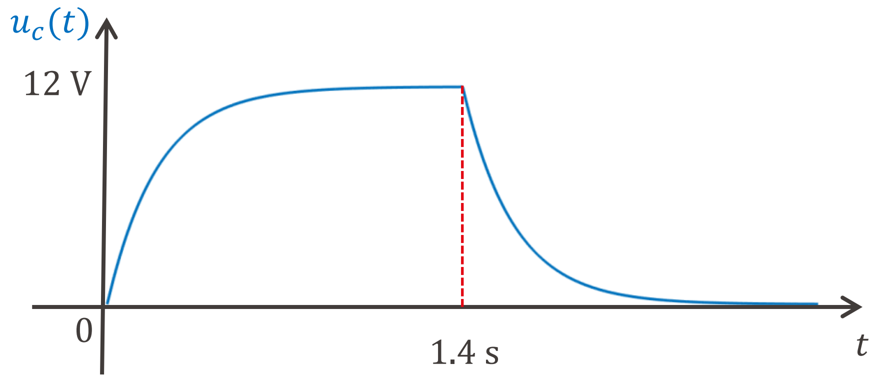
Circuit RC – exemple

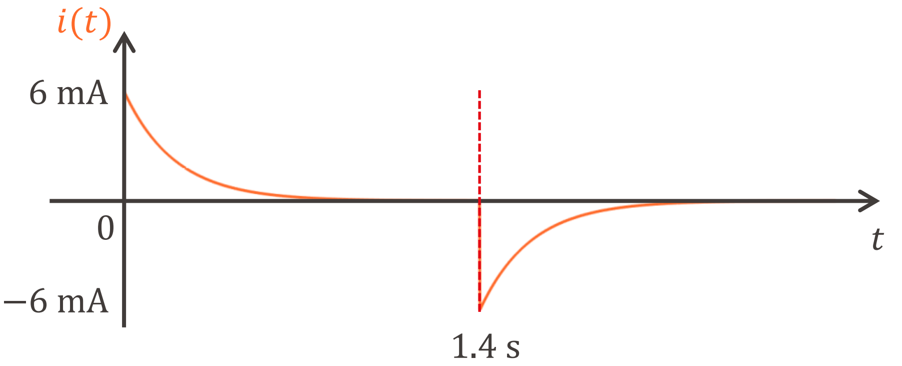
Circuit RC – exemple

Circuit RC – exemple



Circuit RC – exemple





Points clés

- Dans un circuit RC, le condensateur peut se charger ou se décharger avec une constante de temps donnée par:

$$\boxed{\tau = RC}$$

- La solution transitoire d'un circuit RC est de type exponentielle.

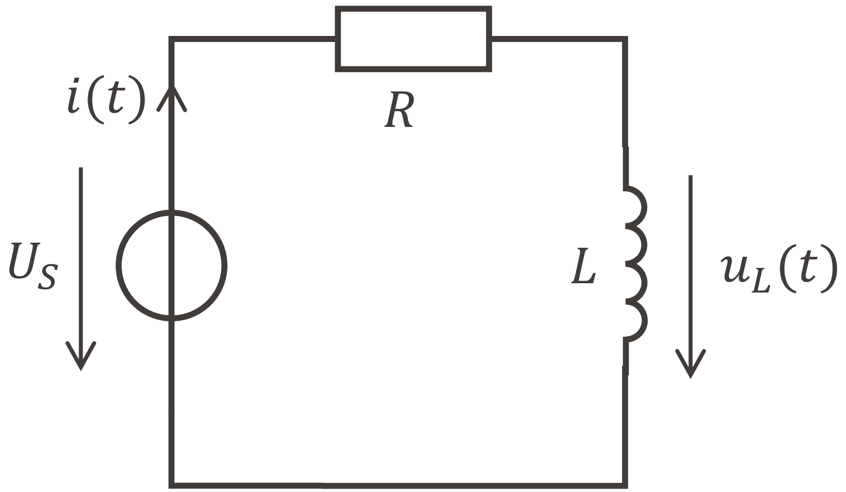
- Une condition initiale est nécessaire pour définir la solution du problème.

- Dans un circuit RC série, le cycle de charge d'un condensateur initialement déchargé est de la forme:

$$\boxed{u_c(t) = U_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Circuit RL

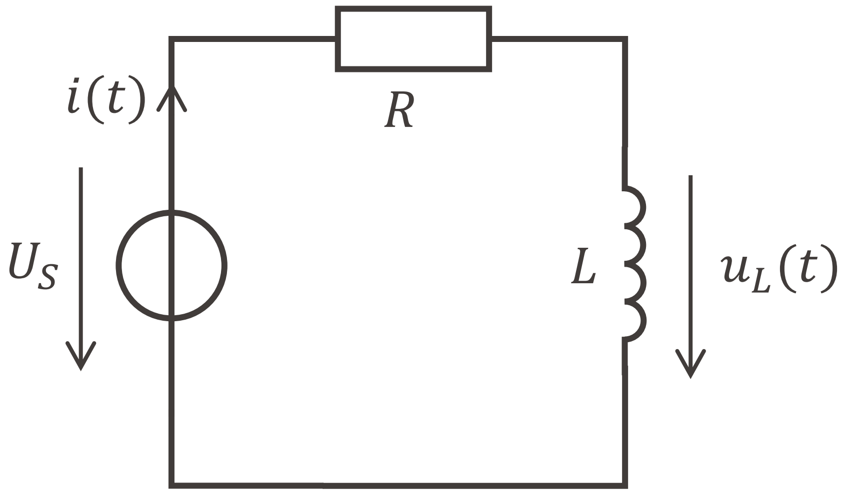
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Circuit RL

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Loi des mailles:

$$U_S = Ri(t) + u_L(t)$$

Relation caractéristique de l'inductance

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$$

Donc on obtient:

$$U_S = L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

Que vaut la constante de temps (en µs)?

C. Lafforgue

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

$R = 9\ \Omega$
$L = 360\ \mu\text{H}$
$U_s = 0.5\ \text{V}$

Rank	Responses
1	

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U_S}$$

C. Lafforgue

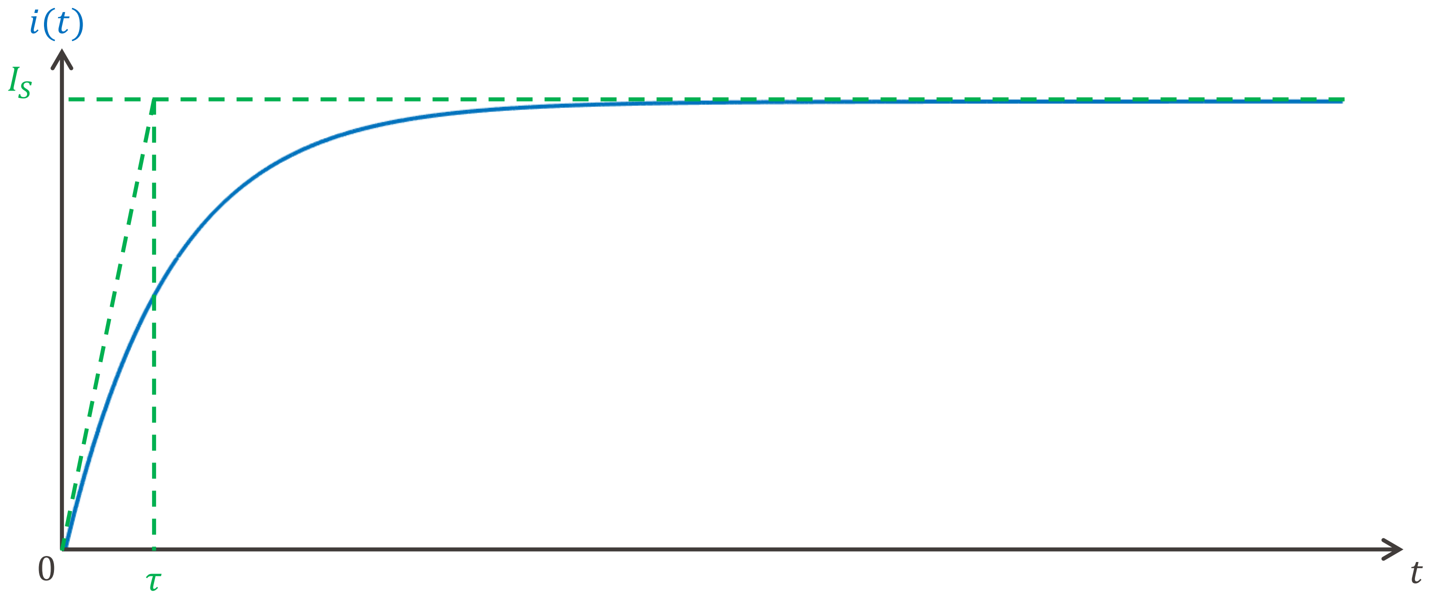
Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S}$$

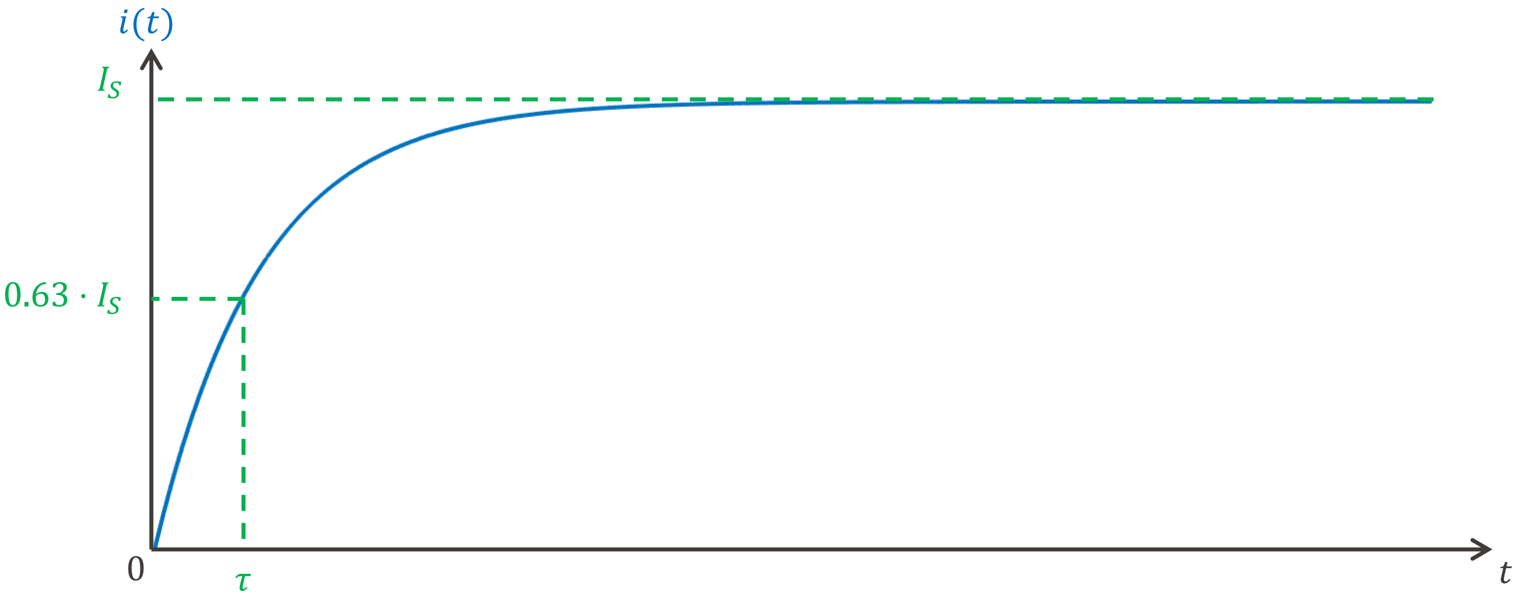
Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



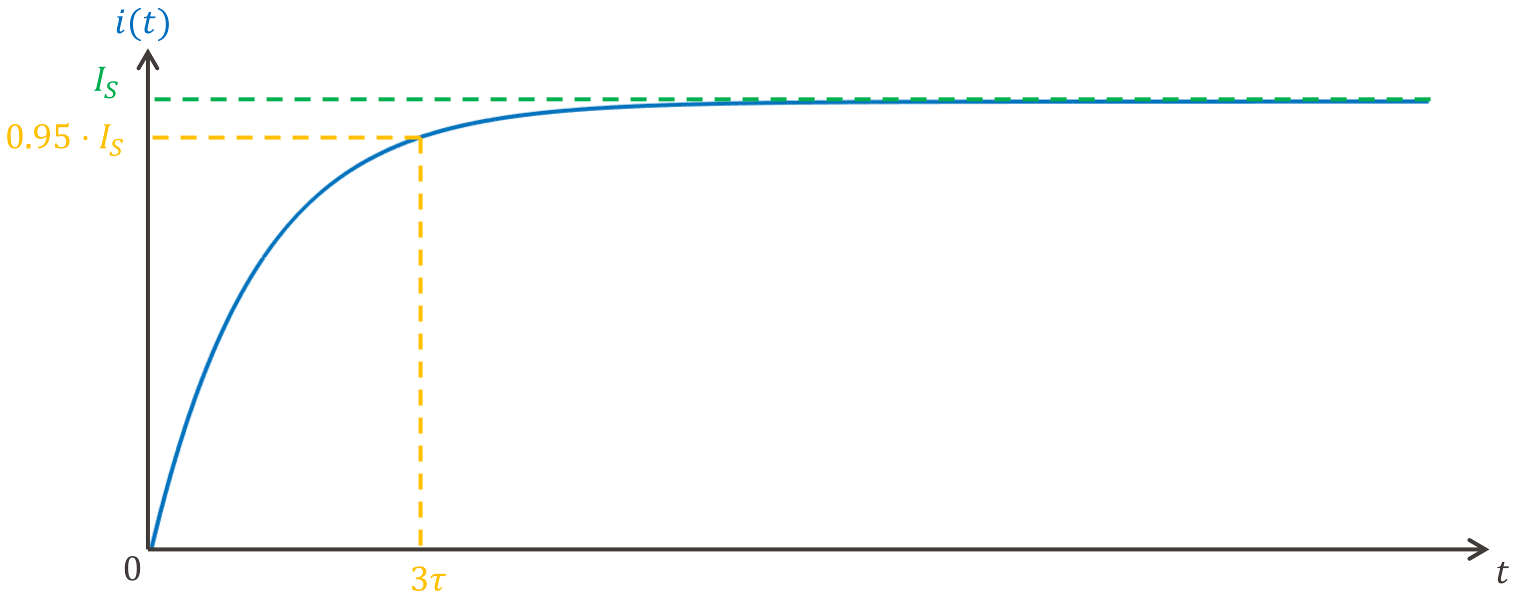
Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



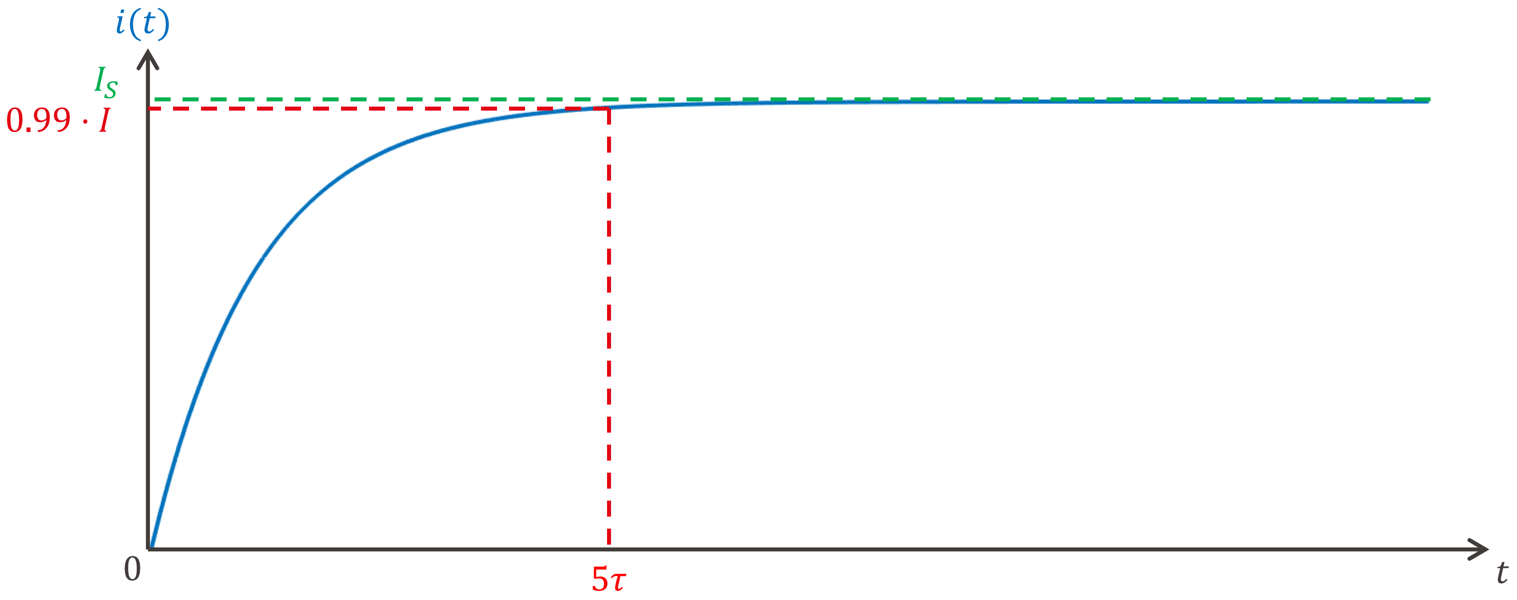
Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Circuit RL

$$\boxed{i(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Points clés

- Dans un circuit RL, les grandeurs électriques de l'inductance évoluent avec une constante de temps donnée par:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

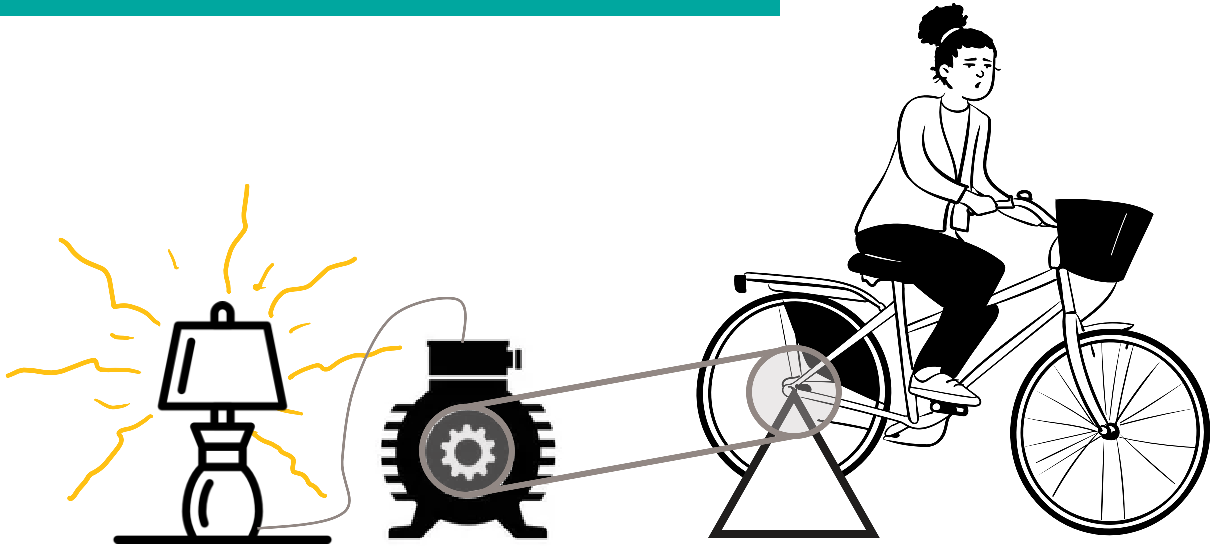
- La solution transitoire d'un circuit RL est de type exponentielle.

- Une condition initiale est nécessaire pour définir la solution du problème.

- Dans un circuit RL série, le régime transitoire du courant est de la forme:

$$\boxed{i_L(t) = I_s\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

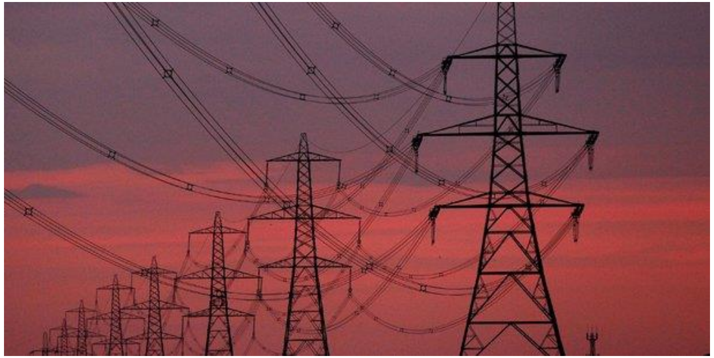
Régime sinusoïdal permanent



Signaux alternatifs

- Ce que nous savons faire pour l'instant:
  - Source constante
  - Régime transitoire d'un condensateur ou d'une inductance
  - Régime stationnaire

- Ce qu'il faut savoir faire aussi:
  - Signaux alternatifs périodiques



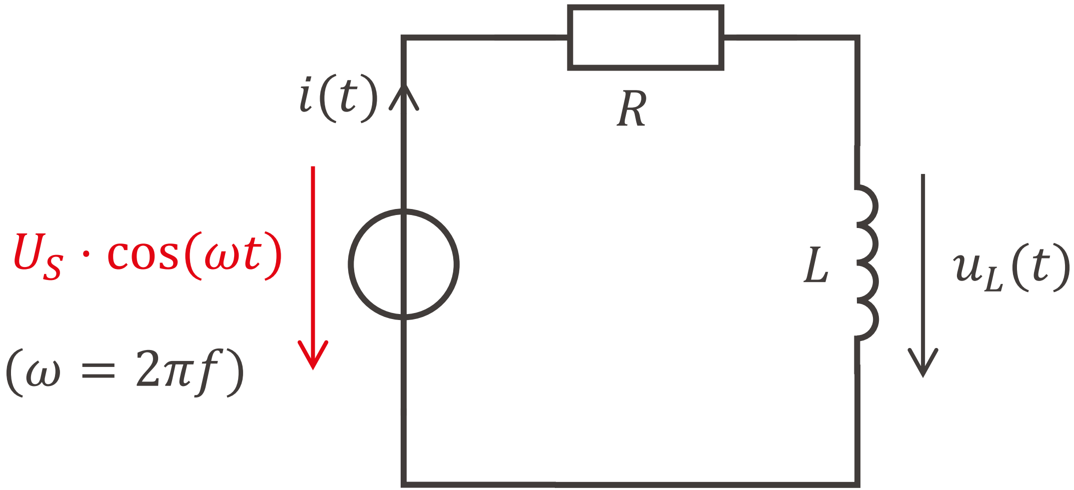
Réseau électrique: 50 Hz

Telecomm: ~ 5 GHz

Son: ~ 1 kHz

Circuit RL

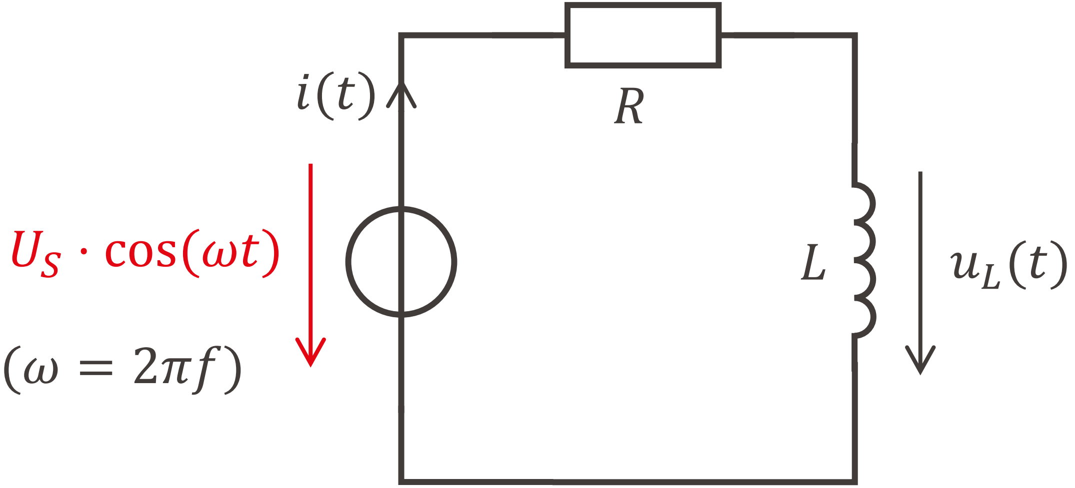
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL

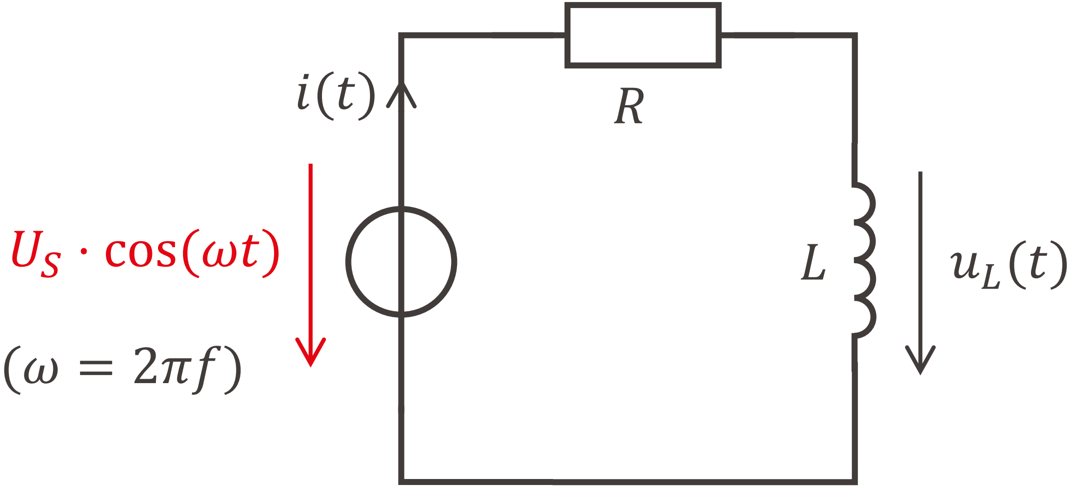
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Solution particulière sous la forme:

$$i_p(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi)$$

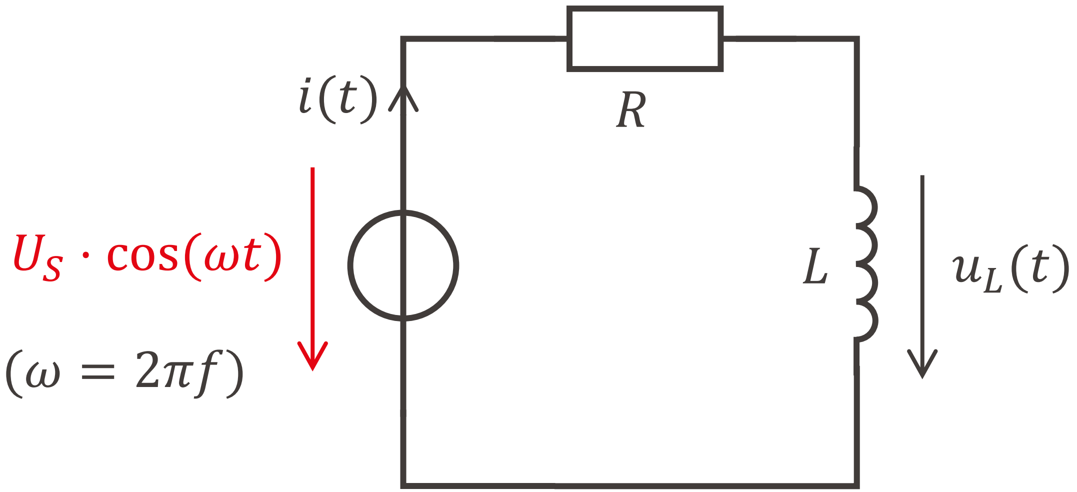
$$I_p = \frac{U_s}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



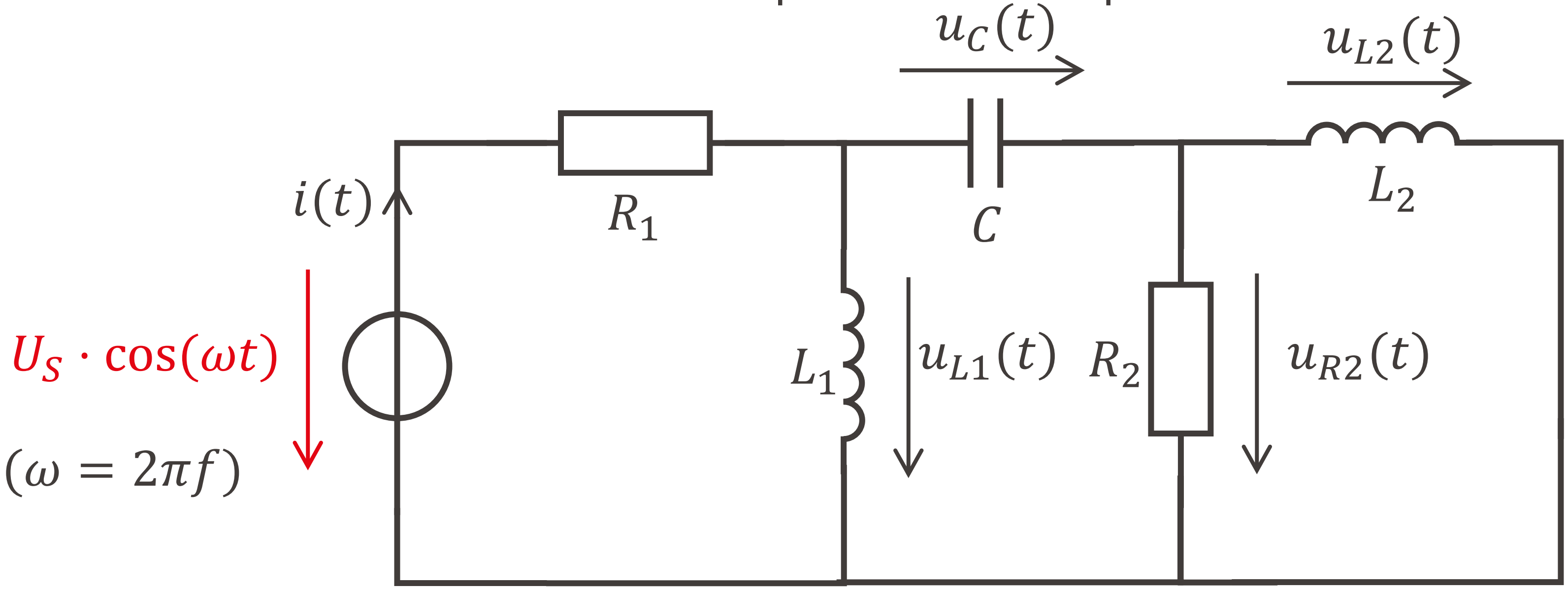
La résolution peut être compliquée.

La solution dépend de la fréquence.

$$\boxed{\frac{di}{dt}(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} U_S \cdot \cos(\omega t)}$$

Circuit RL

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Signaux alternatifs

- Il existe une méthode pour modéliser les circuits en régime sinusoïdal permanent très simplement

- Avant, il faut bien comprendre les signaux sinusoïdaux

Pulsation ($= 2\pi f$)

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Phase

Amplitude (crête)

Signaux alternatifs

- **Définition:** On appelle régime permanent sinusoïdal un régime dans lequel courants et tensions évoluent périodiquement sous forme de signaux sinusoïdaux **une fois le régime transitoire passé.**
  - Par exemple, dans les circuits vus précédemment, le régime transitoire est passé lorsque $t > 5\tau$

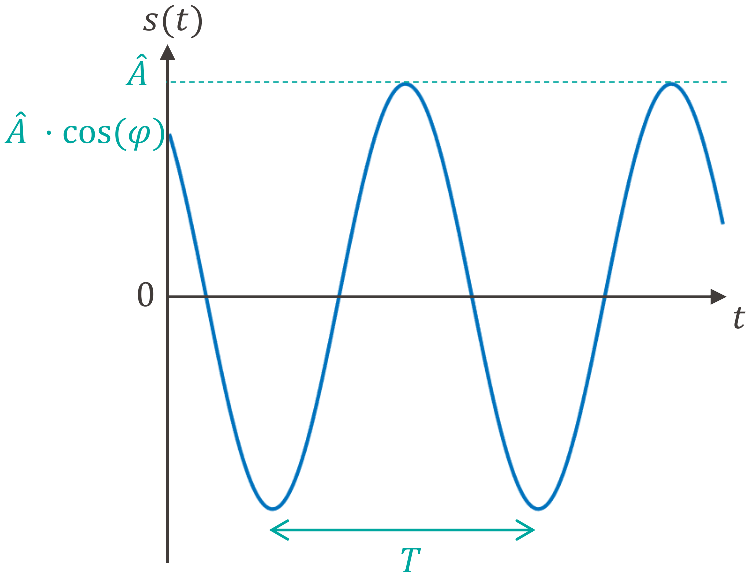
Signaux alternatifs

Pulsation ($= 2\pi f$)

$$s(t) = \hat{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (crête)

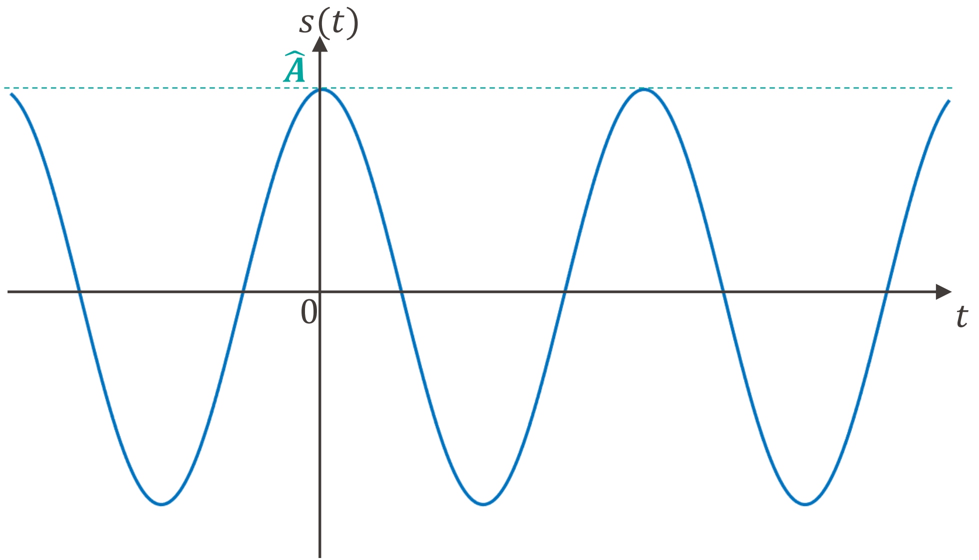
Phase



Signaux alternatifs

C. Lafforgue

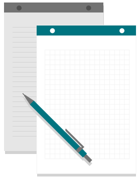
- L’amplitude:
  - Aussi appelée valeur crête
  - Correspond à la valeur maximale du signal



- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt}$$

Signaux alternatifs



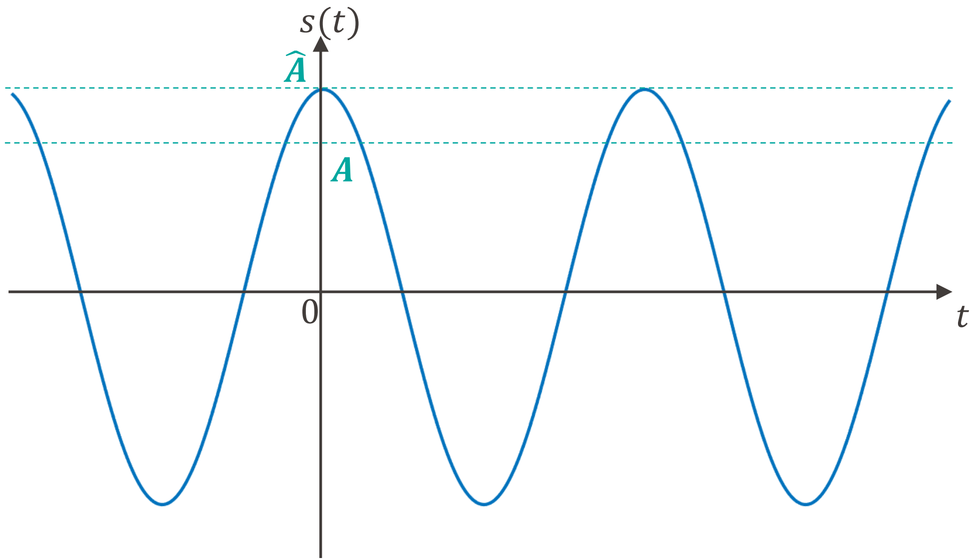
Signaux alternatifs

C. Lafforgue

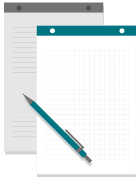
- L'amplitude:
  - Aussi appelée valeur crête
  - Correspond à la valeur maximale du signal

- Autre paramètre lié: la valeur efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$



Signaux alternatifs



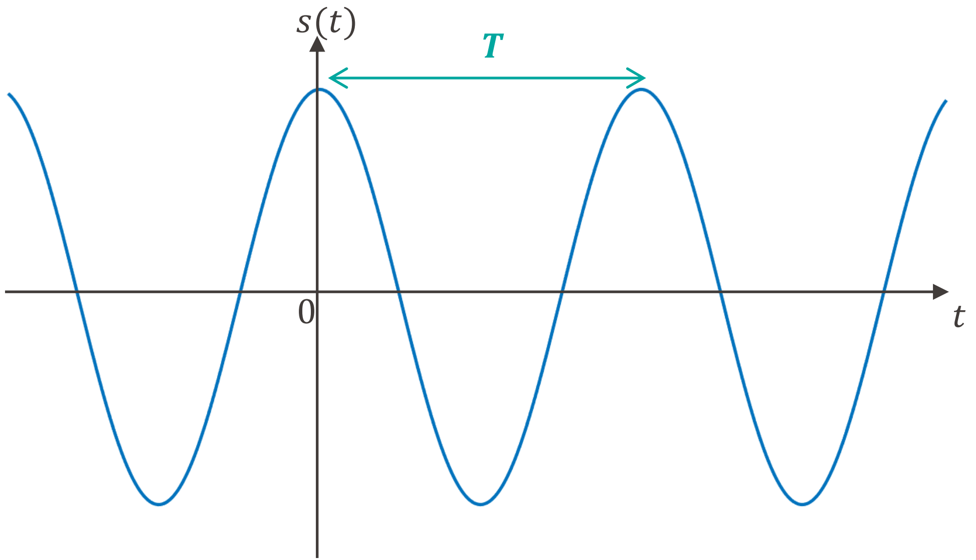
- Pourquoi définit-on la valeur efficace?
  - Exemple: puissance absorbée par une résistance
  - $p(t) = Ri(t)^2$
  - $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$
  - $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$ (puissance moyenne)

Signaux alternatifs

C. Lafforgue

- La pulsation:
  - Liée à la périodicité du signal

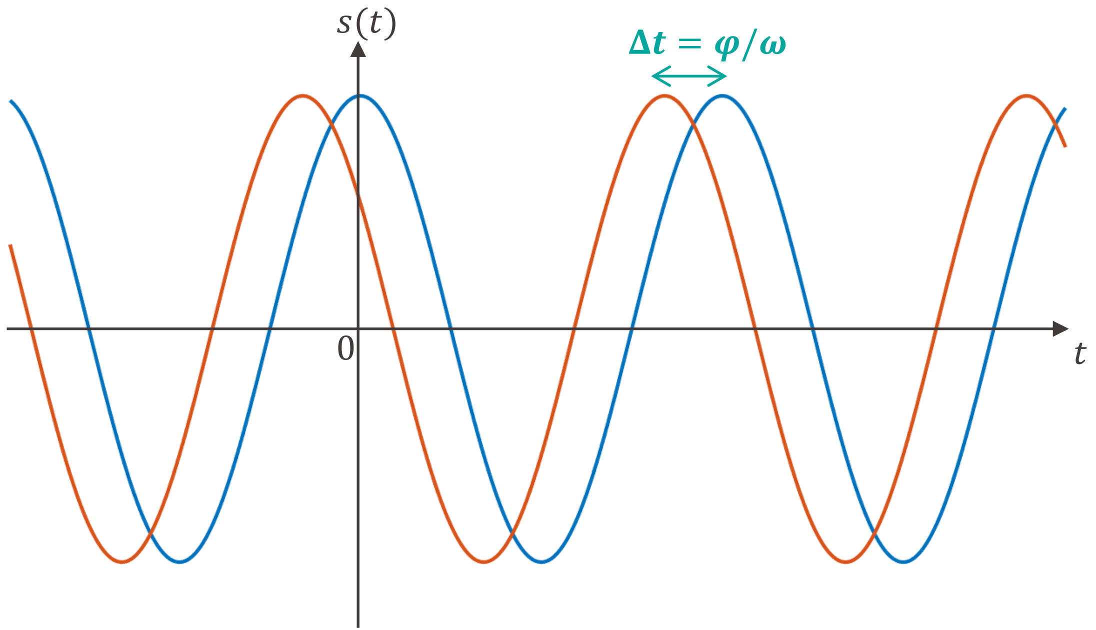
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



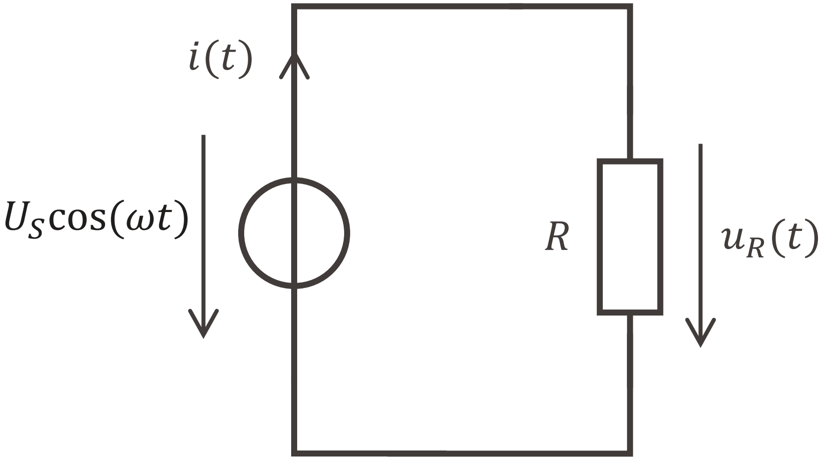
  - T s'exprime en seconde (s)
  - f s'exprime en hertz (Hz)
  - ω s'exprime en radian par seconde (rad/s, ou s^{-1})

Signaux alternatifs

- La phase:
  - Traduit le retard d'un signal
  - φ s'exprime en radian (rad)



Signaux alternatifs – la résistance



Loi des mailles:

$u_r(t) = U_s\cos(\omega t)$

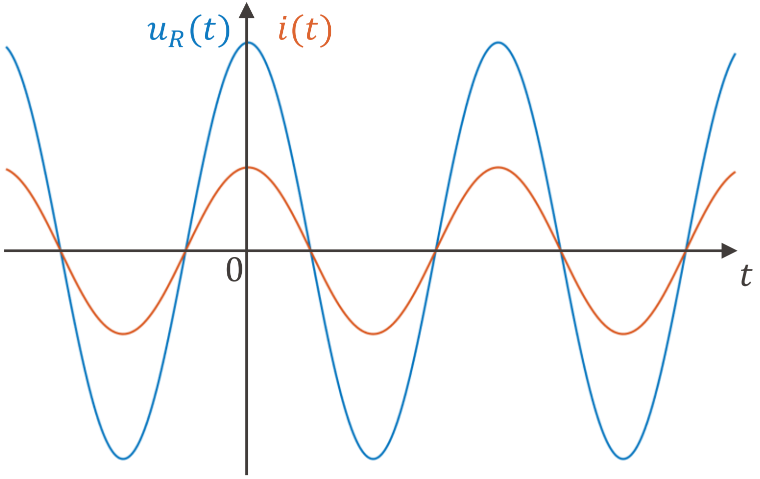
Loi d'Ohm:

$u_R(t) = Ri(t)$

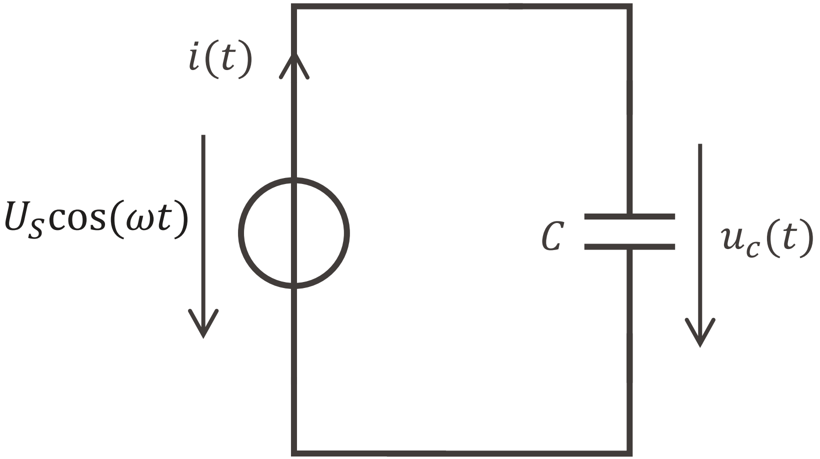
Donc:

$$i(t) = \frac{U_s}{R}\cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$ rad: courant et tension sont **en phase**



Signaux alternatifs – le condensateur



Loi des mailles:

$$u_c(t) = U_s\cos(\omega t)$$

Condensateur:

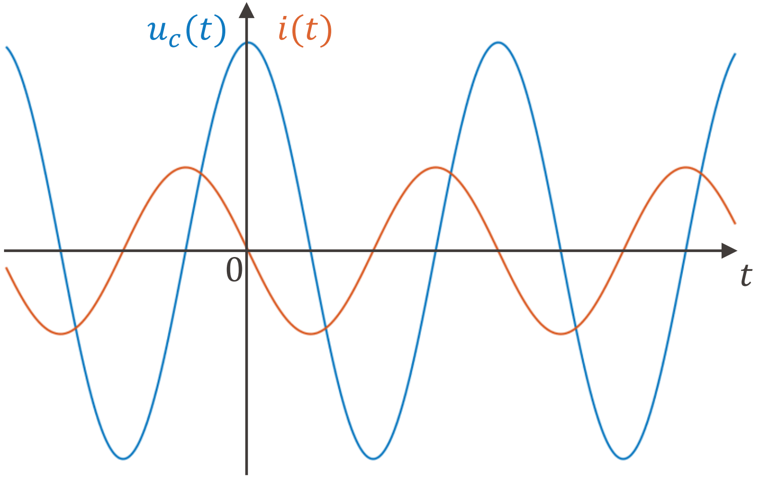
$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

Donc:

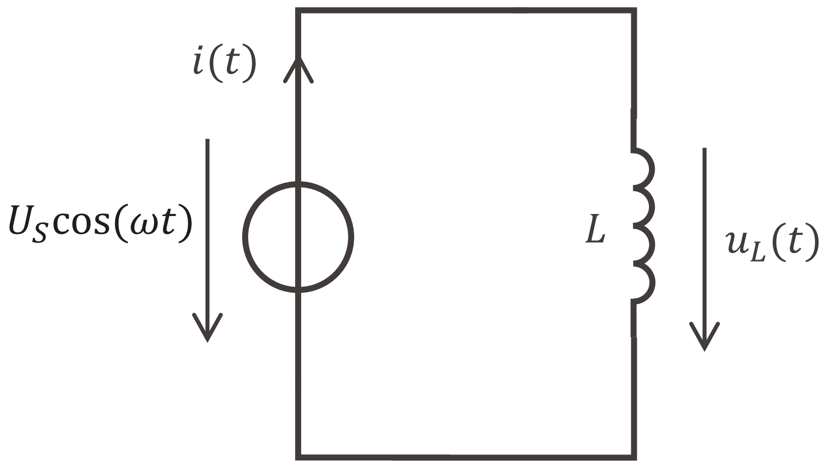
$$i(t) = -C\omega U_s\sin(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega U_s\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **avance de phase** sur la tension



Signaux alternatifs – l'inductance

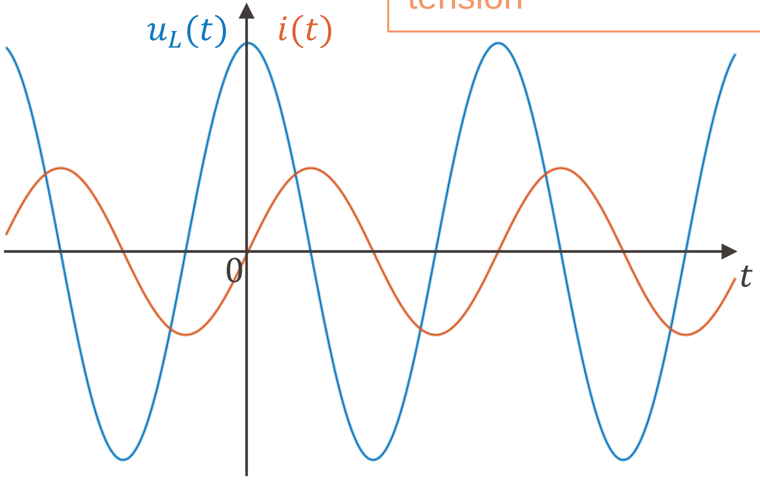


Loi des mailles:
$$u_L(t) = U_s\cos(\omega t)$$

Inductance:
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

Donc:
$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega}\sin(\omega t)$$
$$i(t) = \frac{U_s}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad: le courant est en **retard de phase** sur la tension



Signaux alternatifs

C. Lafforgue

Composant	Loi	$\hat{I}/\hat{U}$	$\varphi_I - \varphi_U$
Résistance  R	$u(t) = Ri(t)$	$\frac{1}{R}$	0
Condensateur  C	$i(t) = C\frac{du}{dt}(t)$	$C\omega$	$\frac{\pi}{2}$
Inductance  L	$u(t) = L\frac{di}{dt}(t)$	$\frac{1}{L\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

Signaux alternatifs

- Que remarque-t-on?
  - L'amplitude de la tension est proportionnelle à l'amplitude du courant
  - Cela rappelle un peu la loi d'Ohm…
  - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes…

Signaux alternatifs

- Que remarque-t-on?
  - L'amplitude de la tension est proportionnelle à l'amplitude du courant
  - Cela rappelle un peu la loi d'Ohm…
  - **Mais les signaux ne sont pas proportionnels car il y a un décalage de phase**

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes…
  - … liées aux **nombres complexes**

Comment vous sentez-vous avec les nombres complexes?

A. Très à-l'aise
B. A peu près à-l'aise
C. Pas à-l'aise

Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- Que pouvons-nous faire?
  - Les fonctions trigonométriques ont d'autres propriétés intéressantes…
  - … liées aux **nombres complexes**

- Nombres complexes:
  - On considère $\underline{x} \in \mathbb{C}$
  - Le cours de maths nous dit que $\underline{x} = \hat{X}(\cos(\theta) + j\sin(\theta)) = \hat{X}e^{j\theta}$
  - Donc $Re[\underline{x}] = \hat{X}\cos(\theta) = Re[\hat{X}e^{j\theta}]$
  - En appliquant à notre cas: $\hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = Re[\hat{A}e^{j(\omega t+\varphi)}]$

Rappels sur les nombres complexes

- Forme algébrique

$$\underline{z} = x + jy$$

- Forme trigonométrique

$$\underline{z} = \rho\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)$$

- Forme exponentielle

$$\underline{z} = \rho e^{j\theta}$$

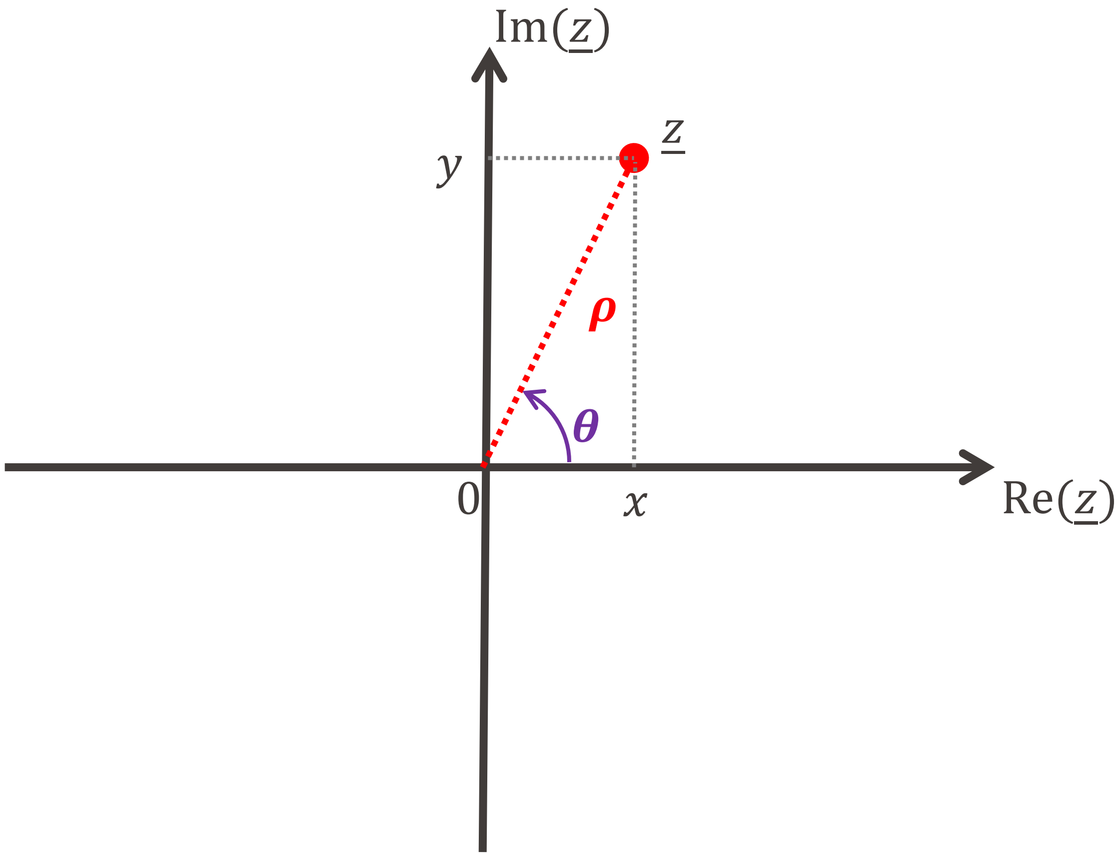
Voire fiche de rappel sur Moodle

- $\mathrm{Re}\left(\underline{z}\right) = x = \rho \cdot \cos(\theta) \quad ; \quad \mathrm{Im}\left(\underline{z}\right) = y = \rho \cdot \sin(\theta)$

  $\left|\underline{z}\right| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \arg\left(\underline{z}\right) = \theta$

- $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Rappels sur les nombres complexes



Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- Exemple:
  - $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi)$
  - On définit une tension complexe assosciée:

$$\underline{u}(t) = \hat{U}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

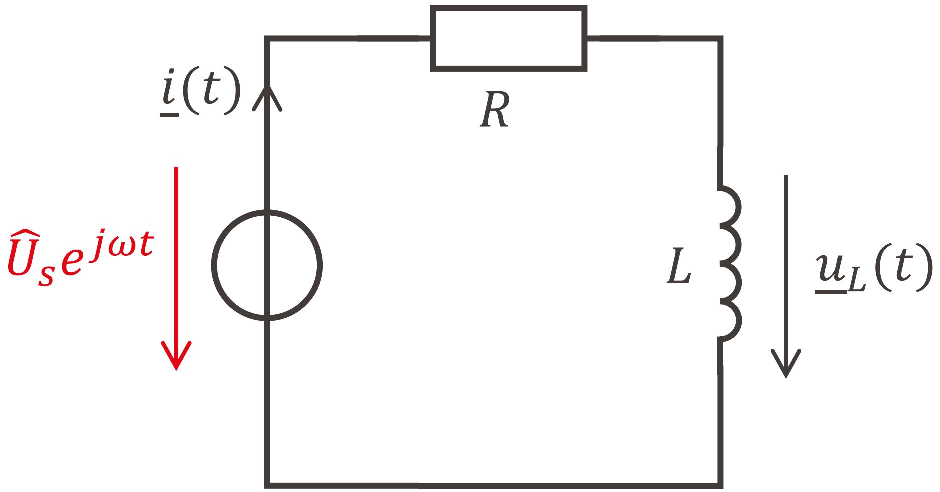
  - On a alors:

$$u(t) = Re\left[\underline{u}(t)\right]$$

  - On peut alors étudier les circuits avec les grandeurs sous forme complexe, et on prend la partie réelle du résultat.

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Quelle est la bonne réponse?

$$x(t) = Xe^{kt}$$

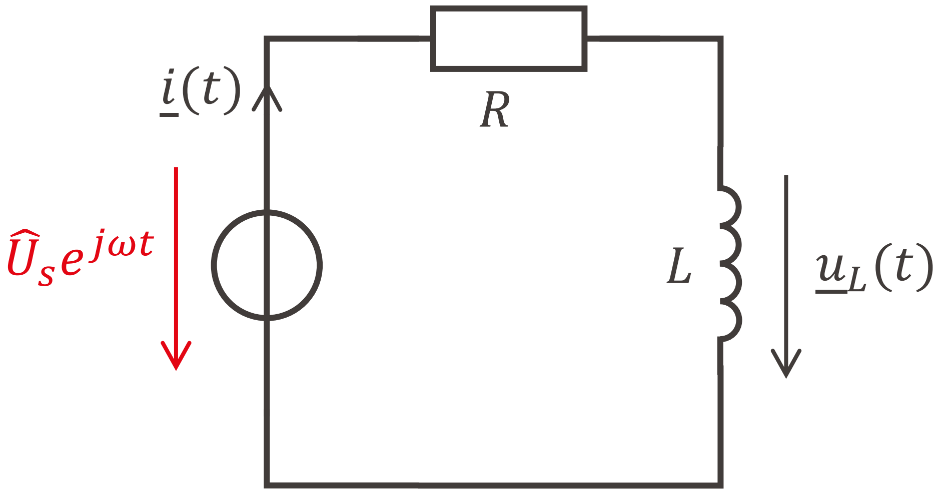
A. $\frac{dx}{dt}(t) = Xe^{kt}$

B. $\frac{dx}{dt}(t) = kXe^{kt}$

C. $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{X}{k}e^{kt}$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:

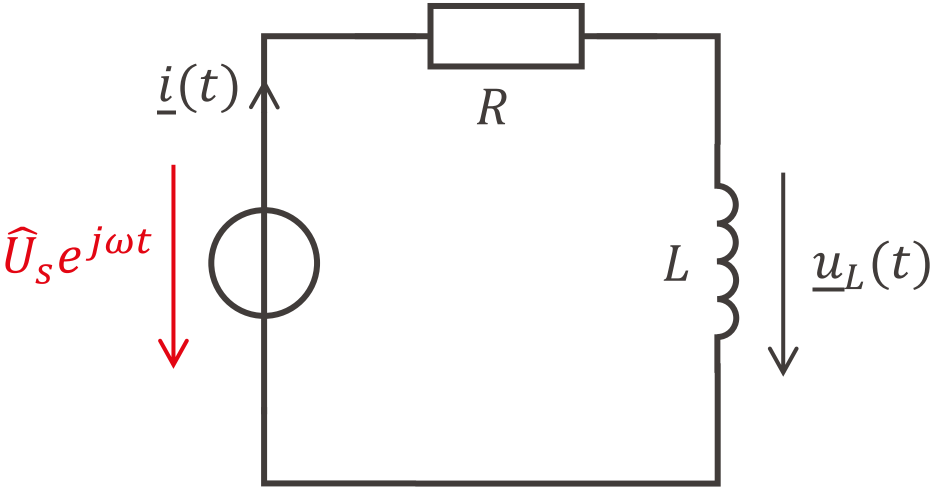


$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

C. Lafforgue

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:

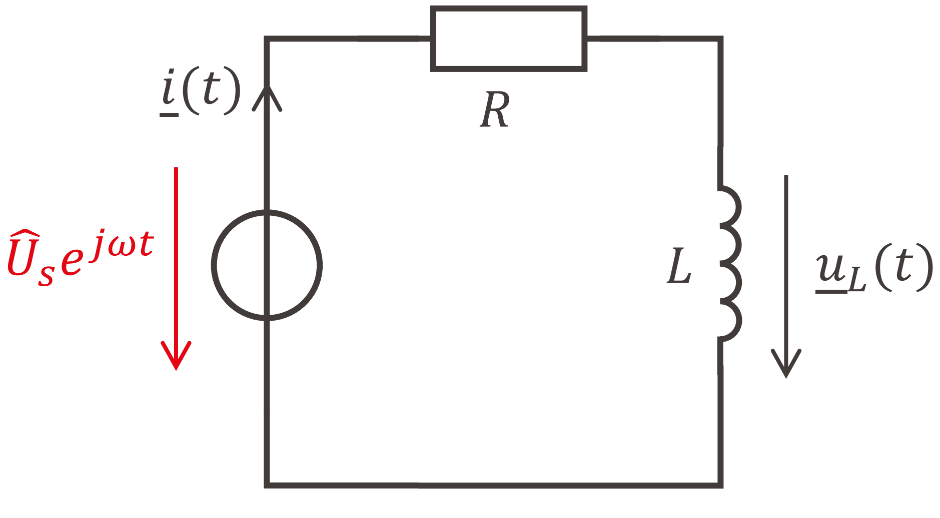


$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Loi de mailles:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + \underline{u}_L(t)$$

Inductance:

$$\underline{u}_L(t) = L\frac{d\underline{i}}{dt}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = L\left(j\omega\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_L(t) = jL\omega\underline{i}(t)$$

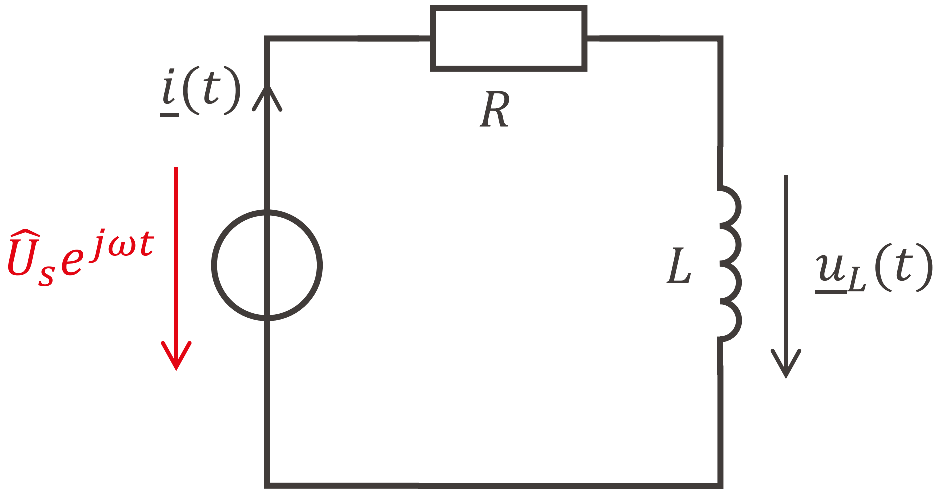
On a alors:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On a alors:

$$\hat{U}_s e^{j\omega t} = R\underline{i}(t) + jL\omega\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s e^{j\omega t} = (R + jL\omega)\underline{i}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

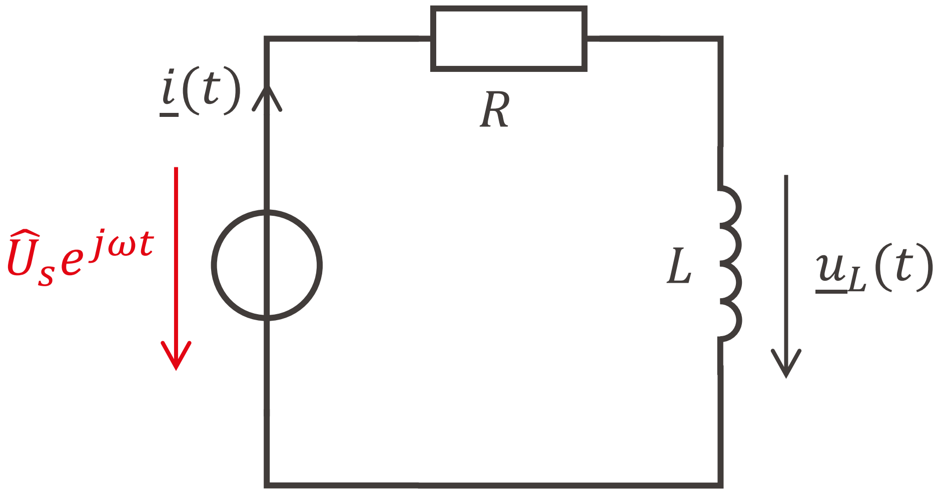
$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{\hat{U}_s e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

Circuit RL – Formalisme complexe

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:



$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \hat{I} e^{j\varphi} = \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}$$

$$\hat{I} = \left| \frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega} \right| = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{U}_s}{R\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

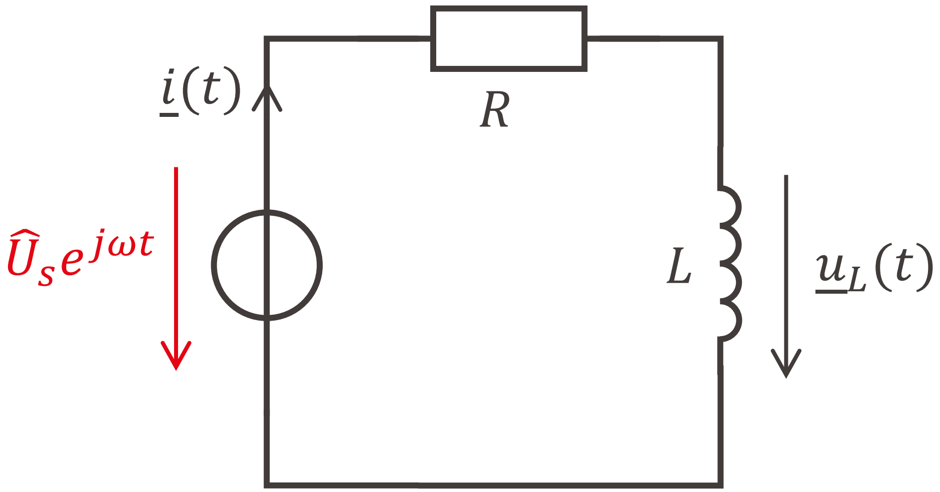
$$\varphi = \arg\left(\frac{\hat{U}_s}{R + jL\omega}\right) = -\arg(R + jL\omega)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

Circuit RL – Formalisme complexe

C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant sous forme complexe:



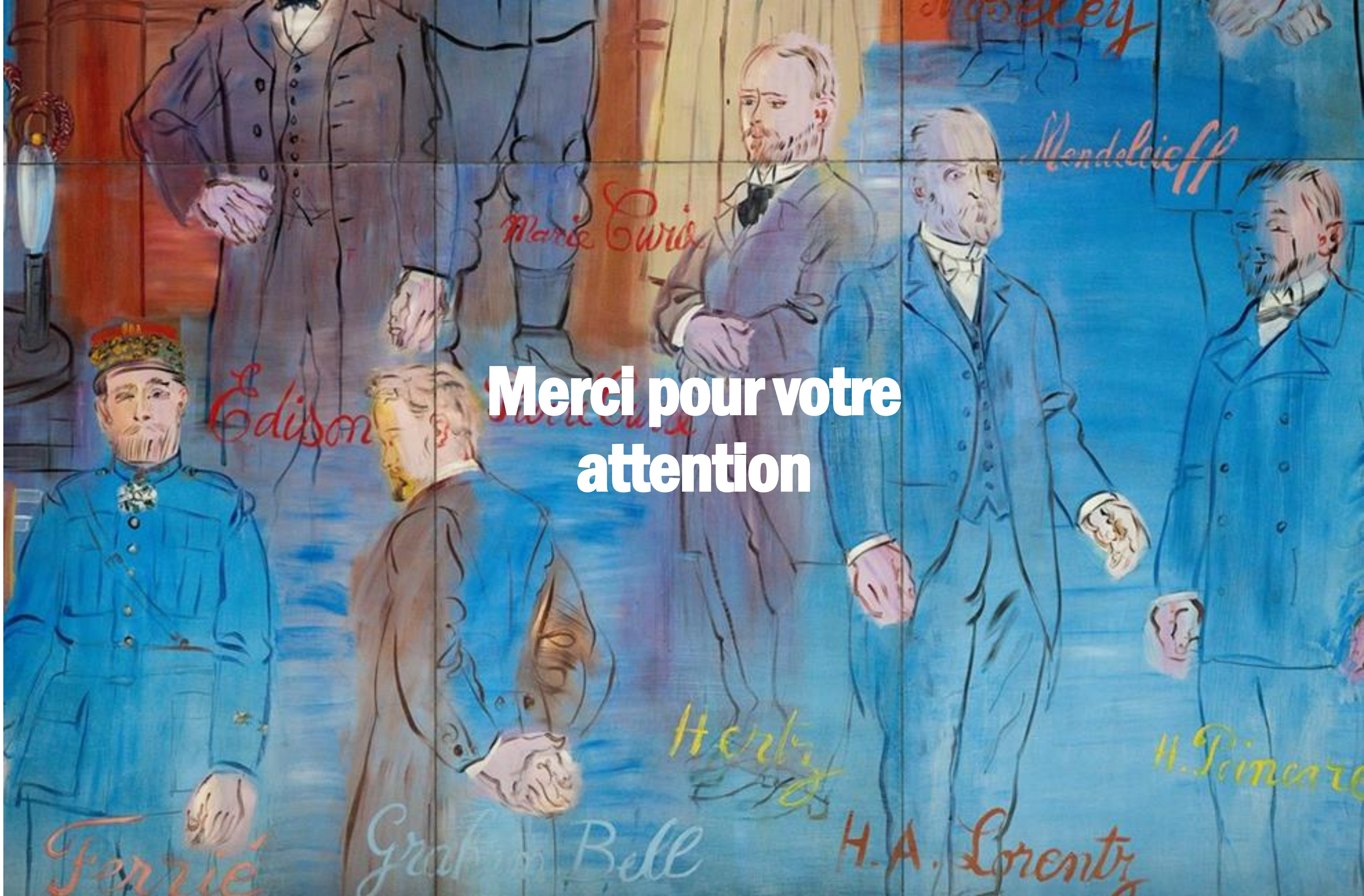
$$\underline{i}(t) = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut trouver la solution sans résoudre d'équation différentielle!

Signaux alternatifs – Formalisme complexe

- On voit qu'en régime permanent sinusoïdal il y a deux grandeurs à déterminer:
  - L'amplitude $\hat{X}$
  - La phase φ

- On définit alors les **phaseurs:**
  - $\underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi}$ (phaseur crête)
  - $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ (phaseur efficace)



Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris