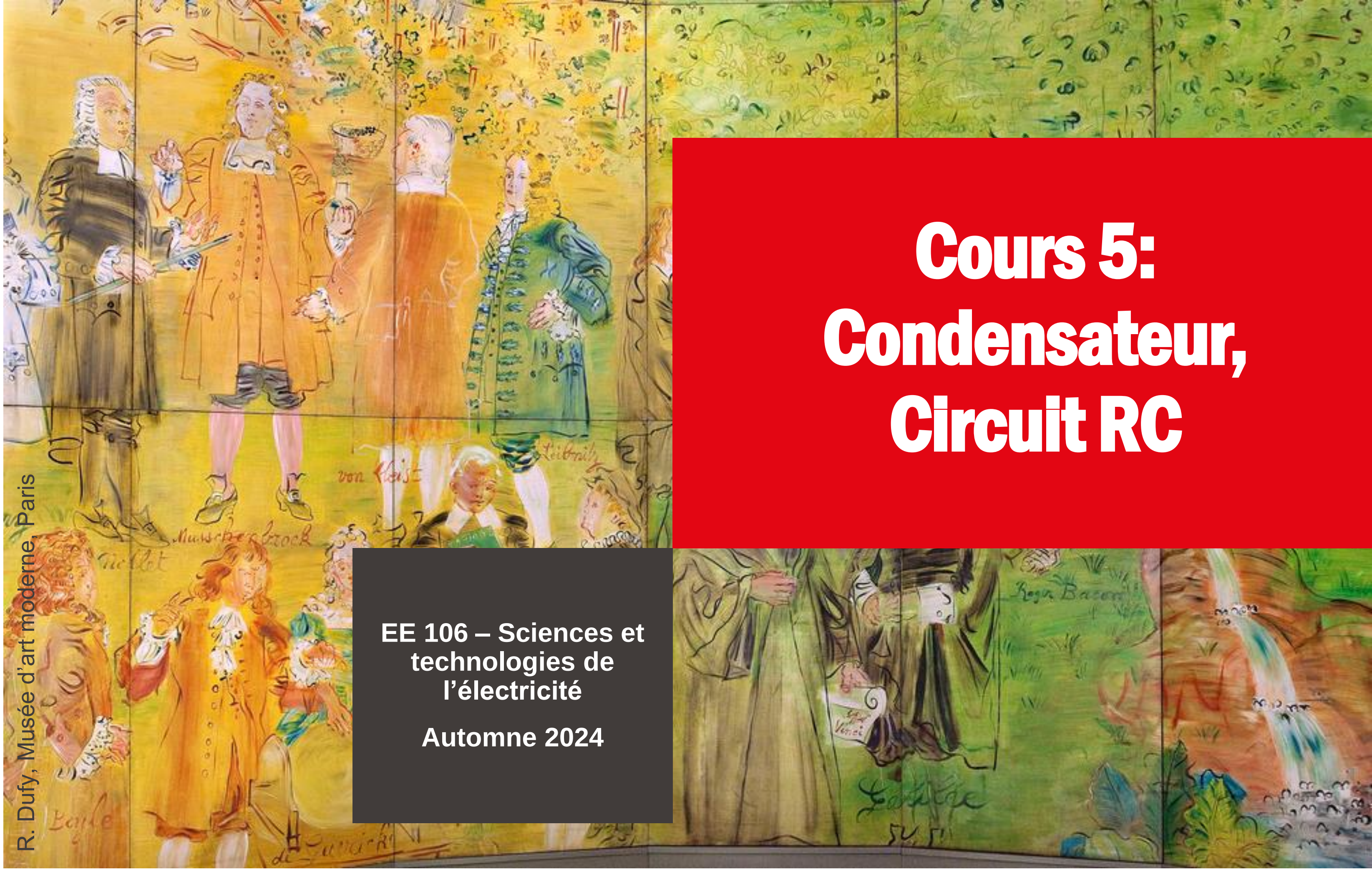
EPFL



R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 5: Condensateur, Circuit RC

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

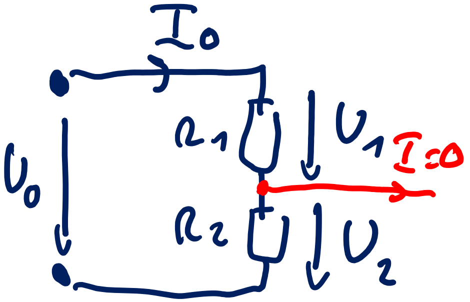
Automne 2024

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

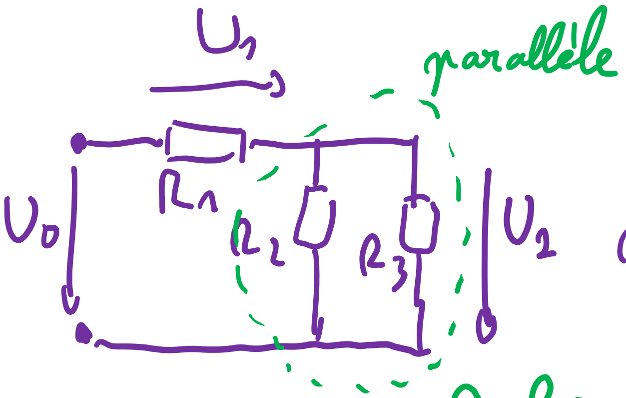
Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Rappels

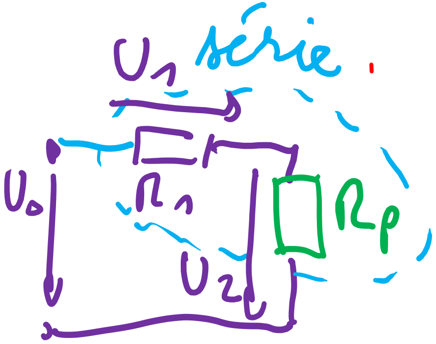
- Rappels – Diviseur de tension



$$\begin{cases} U_0 = (R_1+R_2)\,I_0 \\ U_1 = R_1\,I_0 \\ U_2 = R_2\,I_0 \end{cases} \iff \begin{cases} I_0 = \dfrac{U_0}{R_1+R_2} \\ \boxed{U_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\,U_0} \\ \boxed{U_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}\,U_0} \end{cases}$$



$\iff$

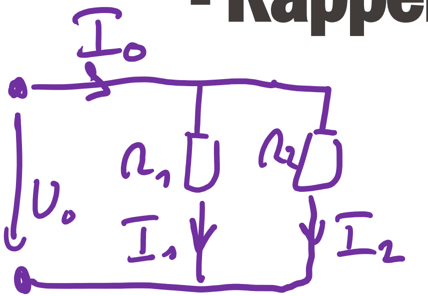


$$R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_p}\,U_0$$

$$U_2 = \frac{R_p}{R_1+R_p}\,U_0$$

- Rappels – Diviseur de courant

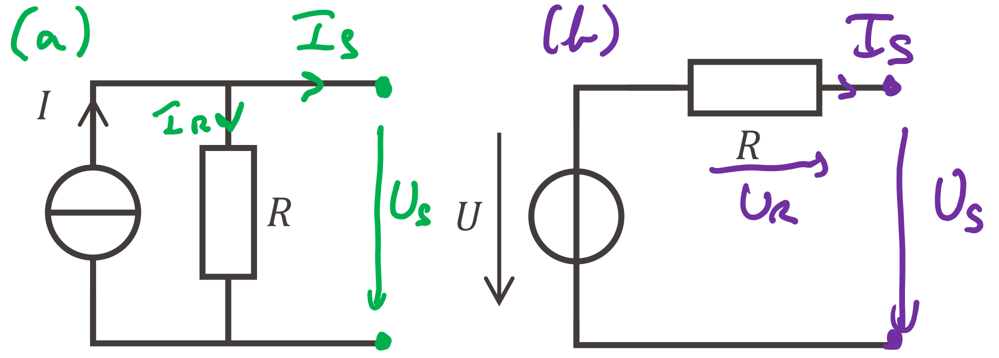


$$\ldots = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

$$\begin{cases} I_0 = I_1 + I_2 \\ U_0 = R_1 I_1 \\ U_0 = R_2 I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_0 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_0 \\ I_1 = \frac{U_0}{R_1} \\ I_2 = \frac{U_0}{R_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} I_0 \\ I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} I_0 \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} I_0 \end{cases}$$

- Rappels - Que doit valoir U pour que les deux circuits soient équivalents?



A. $U = -\frac{I}{R}$

B. $U = \frac{I}{R}$

C. $U = -RI$

D. $\boxed{U = RI}$ ✓

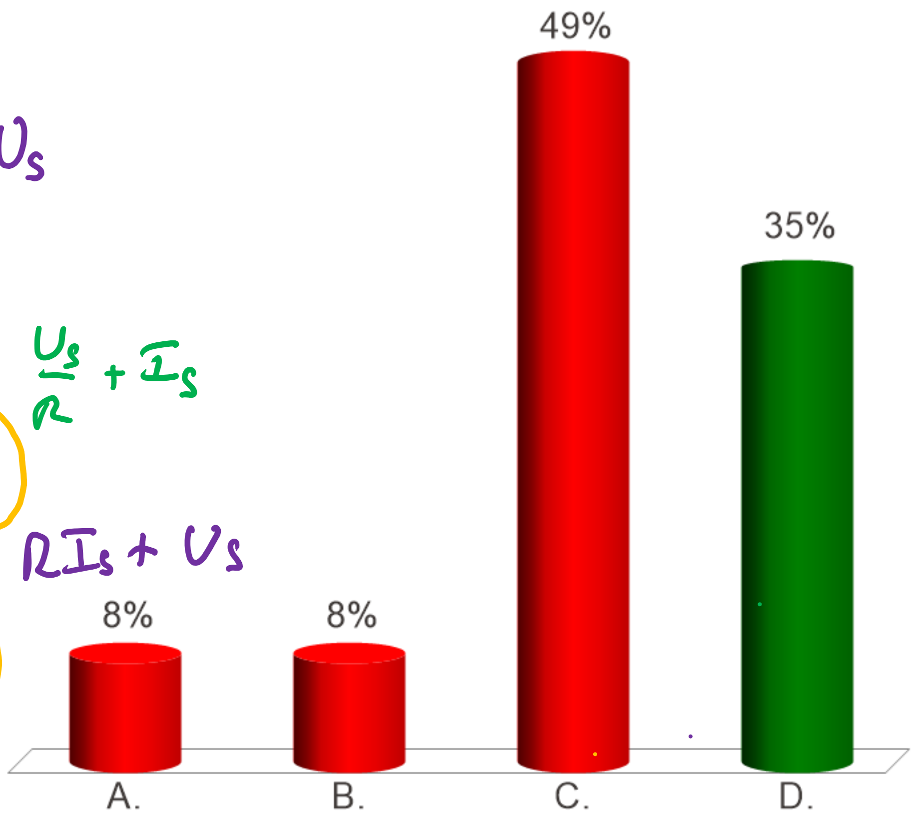
(a) $I = I_R + I_s = \frac{U_s}{R} + I_s$

$I_s = I - \frac{U_s}{R}$

(b) $U = U_R + U_s = R I_s + U_s$

$I_s = \frac{U}{R} - \frac{U_s}{R}$

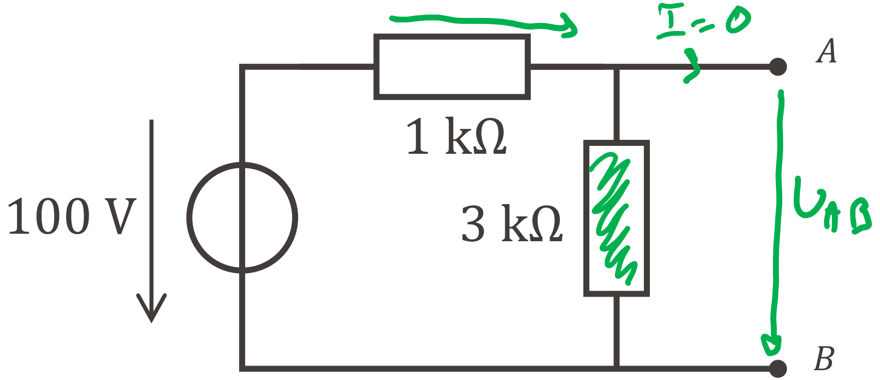
$\frac{U}{R} = I$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

EPFL

- Rappels – Que vaut la tension équivalente de Thévenin entre A et B?



A. 100 V

B. 300 V

C. 75 V

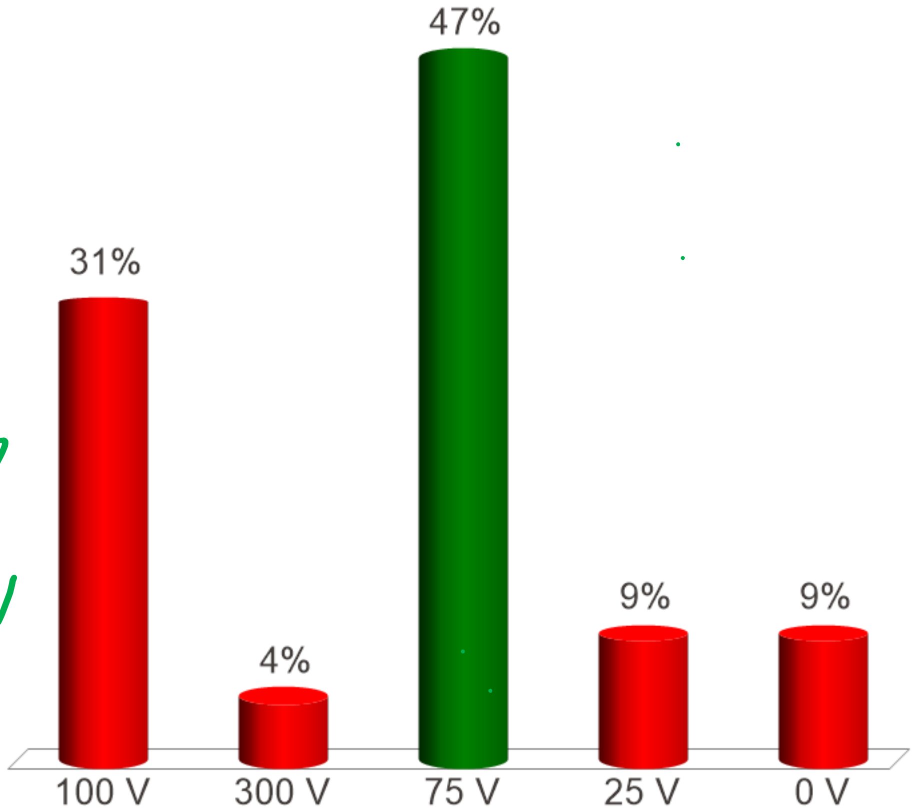
D. 25 V

E. 0 V

div. de tension:

$$U_{AB} = \frac{3000}{3000 + 1000} \times 100V$$

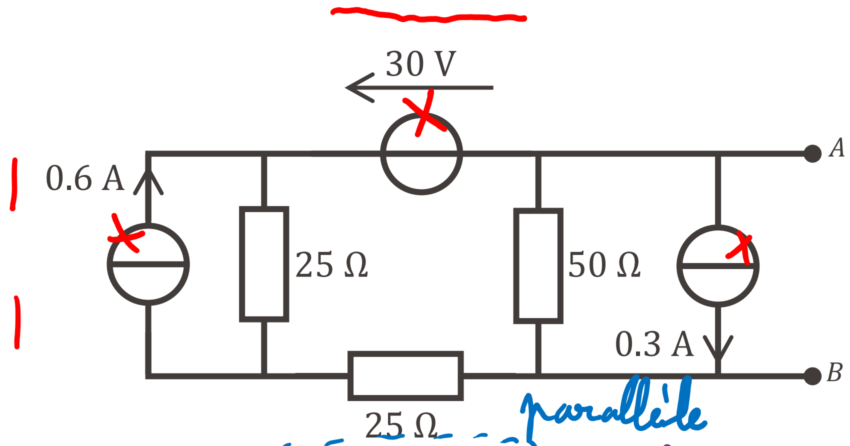
$$U_{AB} = \frac{3}{4} \times 100 = 75V$$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

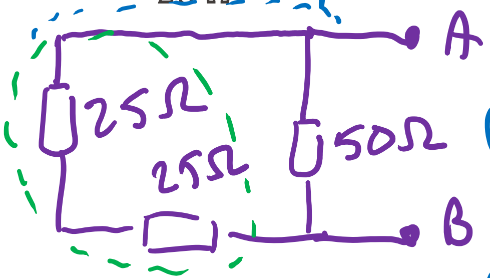
C. Lafforgue

- Rappels – Que vaut la resistance équivalente de Norton vue des bornes A et B?



série

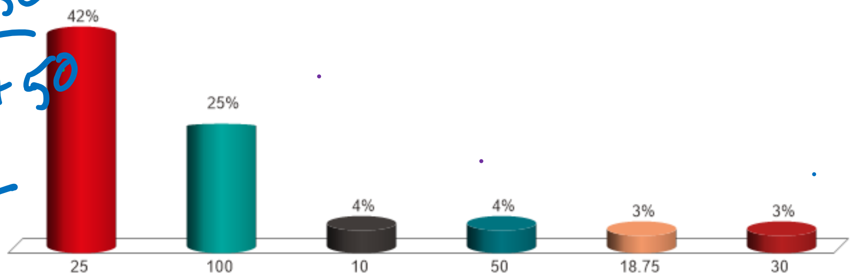
$R_s = 50\Omega$



$R_{eq} = \frac{50\times 50}{50+50}$

$R_{eq} = \frac{50}{2}\,\Omega$

Rank	Responses
1	25 Ω
2	100
3	10
4	50
5	18,75
6	30



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Objectifs

- Décrire le comportement d’un condensateur plan
- Déterminer la relation courant-tension d’un condensateur
- Etudier un circuit en régime transitoire

Les condensateurs

Le condensateur

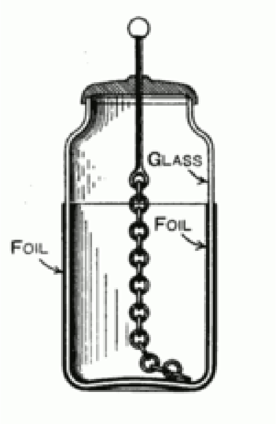
C. Lafforgue

Symbole	Signification	Grandeur	Unité
	Condensateur	C (capacité)	farad (F)

- Le condensateur est un composant de base utilisé pour:
  - Le stockage d'énergie
  - Le filtrage de signaux parasites
  - La protection de systèmes électriques sensibles
  - …
- C'est un dipôle passif

Le condensateur

- 1745: Ewald Georg von Kleist invente la **bouteille de Leyde,** ancêtre du condensateur
- Deux conducteurs sont séparés par une paroi de verre (isolant)
- La bouteille de Leyde est utilisée pour faire des décharges électriques après lui avoir appliqué une tension électrique

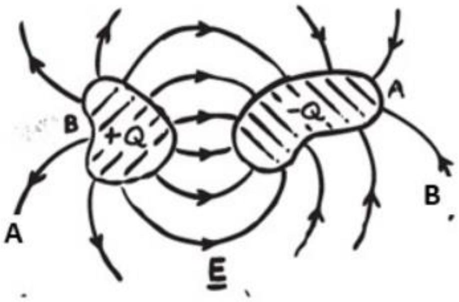


Ewald Georg von Kleist
1700-1748
Physicien allemand

Le condensateur généralisé

- On considère deux surfaces conductrices
  - De forme quelconque
  - Isolées l'une de l'autre, fixes dans l'espace

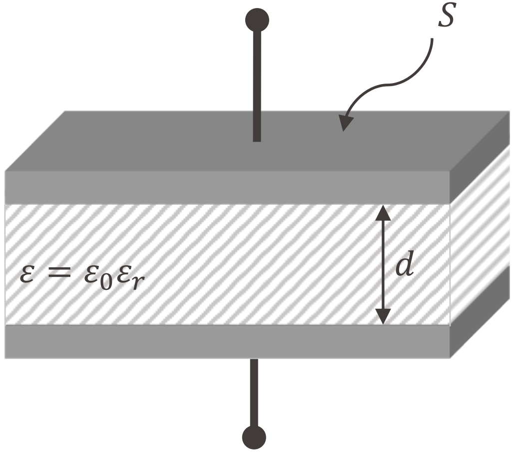
- Les deux surfaces sont chargées, chacune avec une charge opposée
  - Une surface a une charge $+Q$, l'autre a une charge $-Q$
  - La séparation de charge a lieu lorsqu'une source de tension est connectée au condensateur



Le condensateur plan

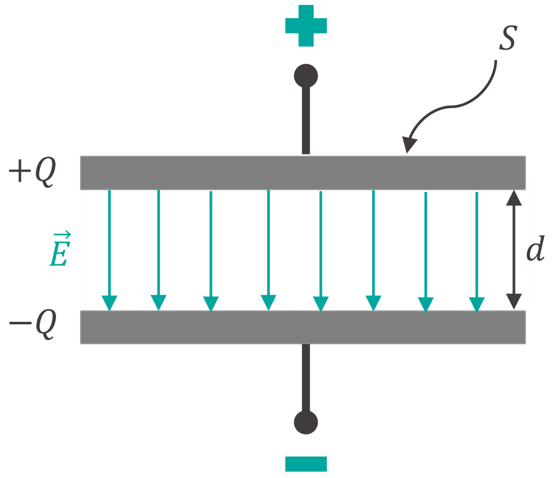
- Lorsque les deux surfaces chargées sont des plaques parallèles, on parle de **condensateur plan**

- Le condensateur est caractérisé par:
  - Une surface S
  - Une séparation d
  - Une permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

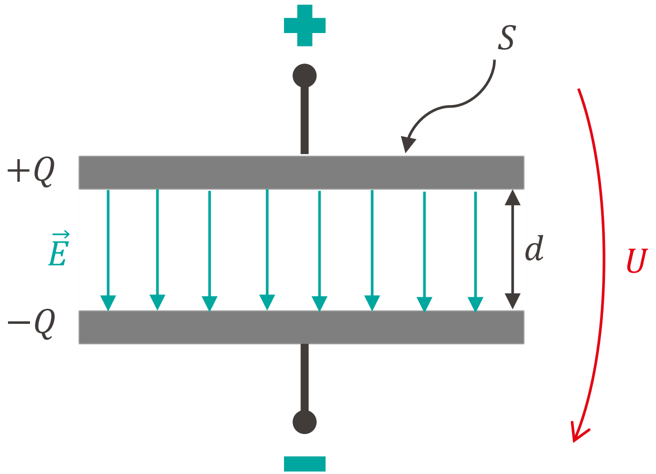


Le condensateur plan idéal

- On considère les plaques du condensateur « infiniment » grandes (les côtés des plaques sont très grands comparés à d)
  - Les effets de bords peuvent être négligés
  - Le champ électrique entre les plaques est homogène



Le condensateur plan idéal



- $\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$
- On peut aussi montrer que:

$$\|\vec{E}\| = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

- On en déduit:

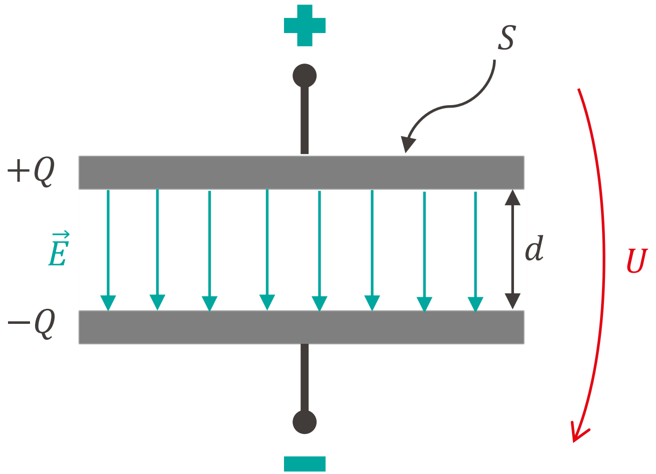
$$Q = \frac{\varepsilon S}{d} U$$

- On définit ainsi **la capacité** du condensateur plan:

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= CU \\ C &= \frac{\varepsilon S}{d} \end{aligned}}$$

Unité: farad (F)

Le condensateur plan idéal



Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

Calculer la capacité du condensateur

Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

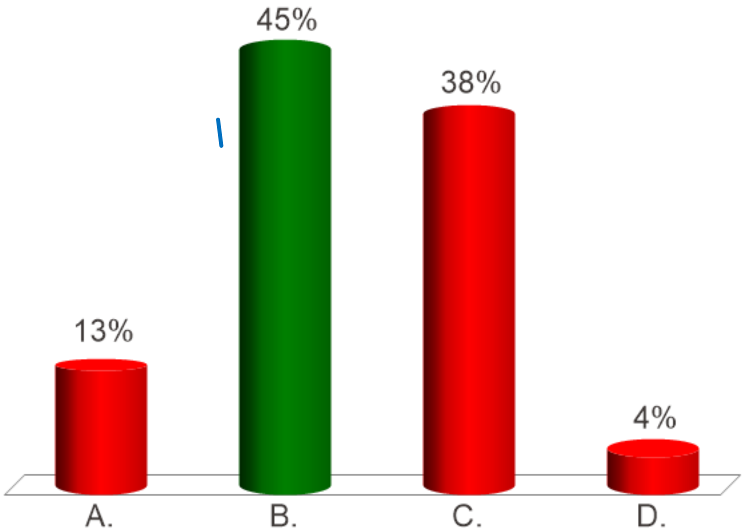
- $d = 1\ \mathrm{mm}$ $= 1 \cdot 10^{-3}\ m$
- $S = 1.13\ \mathrm{cm}^2$ $= 1{,}13 \cdot 10^{-4}\ m^2$
- $\varepsilon = \varepsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ (air entre les plaques)

A. $C = 10\ \mathrm{nF}$

B. $C = 1\ \mathrm{pF}$ $= 1 \cdot 10^{-12}\ F$

C. $C = 10\ \mathrm{pF}$

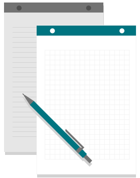
D. $C = 0.1\ \mathrm{nF}$

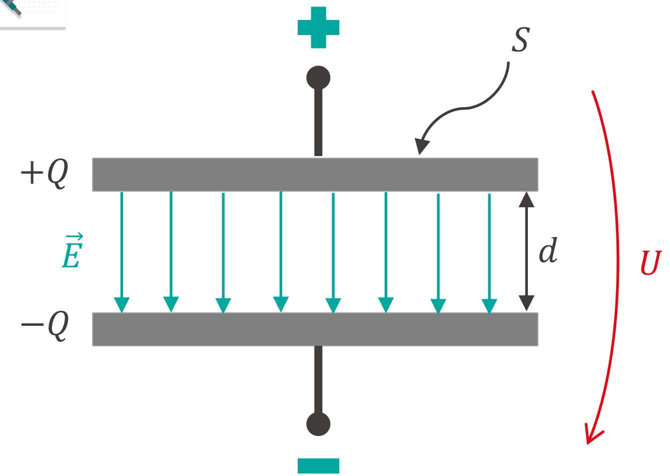


Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

Le condensateur plan idéal





Ordre de grandeur de la capacité?

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$C \sim \begin{cases} pF \\ nF \\ \mu F \\ mF \end{cases}$$

C. Lafforgue

Energie accumulée dans un condensateur

- Lorsqu'il est connecté à une source de tension, le condensateur accumule des charges ⇒ il accumule de l'énergie électrostatique
  - Une fois chargé, la charge est fixe: $Q = \text{cste}$.
  - $i(t) = \frac{dq}{dt}$ donc dans un condensateur chargé, le courant est nul

Un condensateur chargé est équivalent à un circuit ouvert

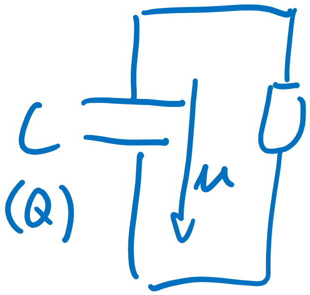
Autrement dit, en régime statique, un condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

En régime statique:

Energie accumulée dans un condensateur

- Un condensateur chargé peut écouler ses charges en le branchant à un autre dipôle passif, par exemple une résistance
  - Le condensateur libère de l'énergie stockée en se déchargeant

  - L'énergie emmagasinée est égale au travail fourni pour se charger



$$dq = C\,du \Rightarrow du = \frac{1}{C}\,dq$$

$$dW = dq \cdot u$$

Q

$$W_{tot} = \int_0^Q u \cdot dq$$

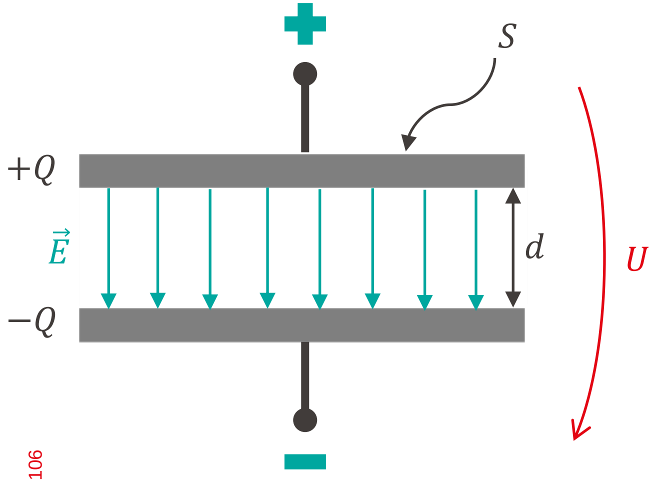
$$W_{tot} = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq$$

$$W_{tot} = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}q^2\right]_0^Q$$

$$W_{tot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

Energie accumulée dans un condensateur

- Un condensateur chargé peut écouler ses charges en le branchant à un autre dipôle passif, par exemple une résistance
  - Le condensateur libère de l'énergie stockée en se déchargeant
  - L'énergie emmagasinée est égale au travail fourni pour se charger



$$W_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\boxed{W_c = \frac{1}{2} C U^2}$$

Points clés

- Un condensateur est un dipôle qui accumule de l'énergie électrostatique en condensant des charges proportionnellement à la tension:

$$\boxed{Q = CU}$$

- Le condensateur est caractérisé par sa **capacité**:

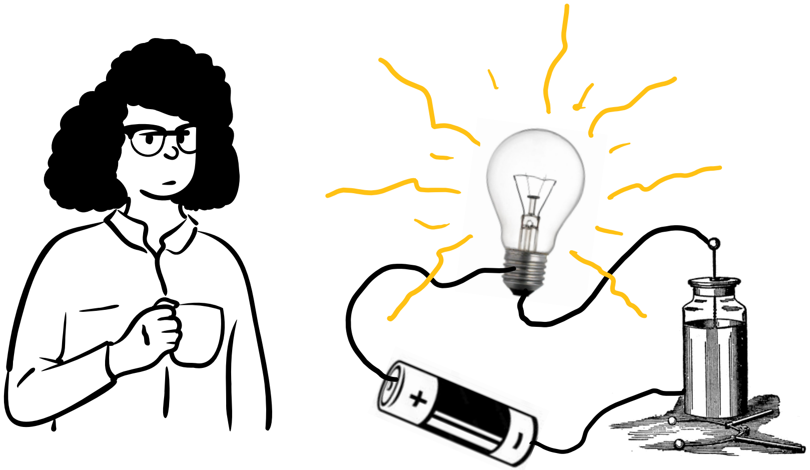
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

- L'énergie accumulée pour une tension U est:

$$\boxed{W_c = \frac{1}{2} C U^2}$$

- En régime statique, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

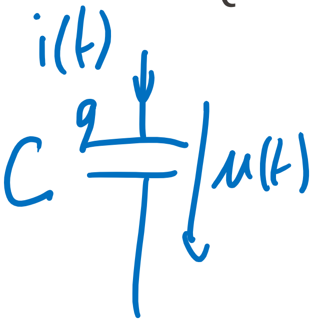
Comportement dynamique



Courant traversant un condensateur

- On a vu qu’en régime continu $I = 0$ et que le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert

- Que se passe-t-il **pendant** la charge du condensateur?



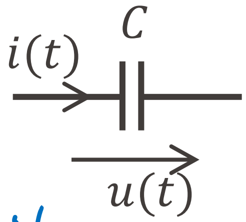
$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{dq}{dt} \\ q = C\,u(t) \end{cases} \Rightarrow i(t) = C\,\frac{du}{dt}(t)$$

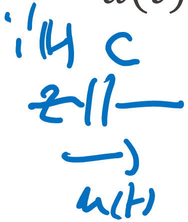
Courant traversant un condensateur

- On a vu qu'en régime continu $I = 0$ et que le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert

- Que se passe-t-il **pendant** la charge du condensateur?

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt}(t)}$$





$i'(t) = -C\dfrac{du}{dt}$

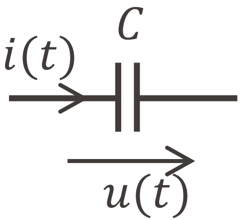
- Un courant transitoire peut exister!

C. Lafforgue

Courant traversant un condensateur

- Que se passe-t-il **pendant** la charge du condensateur?

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt}(t)}$$



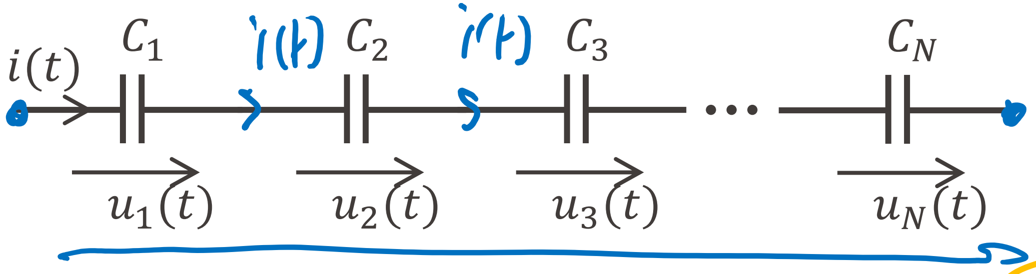
- **Remarque:** le courant ne peut pas être infini, donc **la tension aux bornes du condensateur est continue.**

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} \neq +\infty$$

Agencement de condensateurs

$$i(t) = C_{eq}\frac{du}{dt} \iff \frac{du}{dt} = \frac{1}{C_{eq}}\, i(t)$$

Condensateurs en série



$u(t)$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{du_n(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_n \frac{du_n}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{du_n}{dt} = \frac{1}{C_n}\, i(t)$$

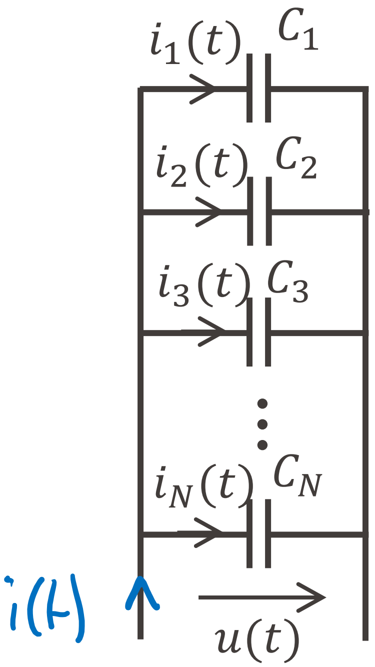
$$\frac{du}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}\, i(t)$$

$$\frac{du}{dt} = i(t) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} = \frac{1}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n}$$

Agencement de condensateurs

Condensateurs en parallèle



$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C_n} i_n(t)$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t)$$

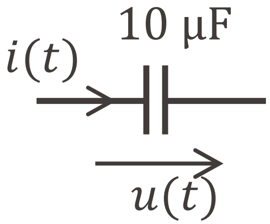
$$\Rightarrow \quad i(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \frac{du}{dt}$$

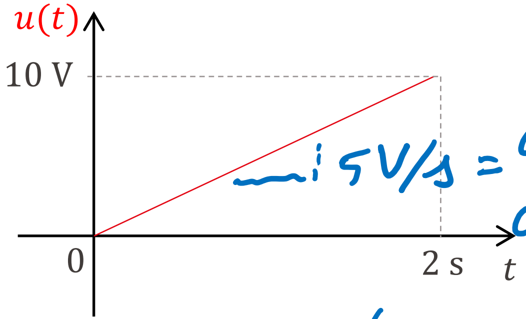
$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{du}{dt} \cdot \sum_{n=1}^{N} C_n = C_{eq} \frac{du}{dt}$$

$$C_{eq} = \sum_{n=1}^{N} C_n$$

Que vaut le courant i pour le profil de tension donné?

$$i = C\frac{du}{dt}$$

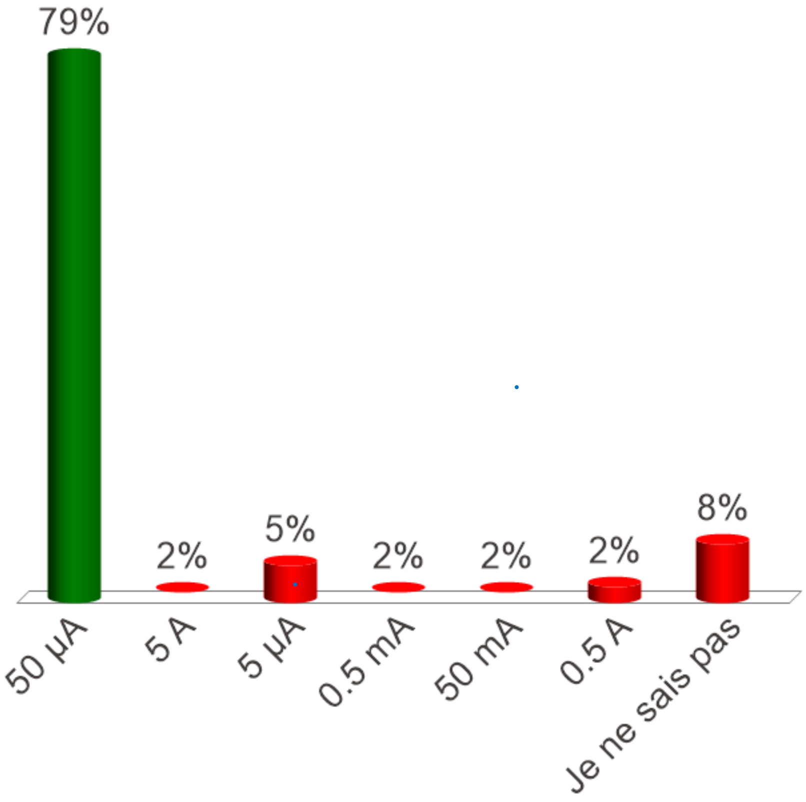




$i \quad 5\,V/s = \frac{du}{dt}$

$C = 10 \cdot 10^{-6}\ F$

A. 50 µA
B. 5 A
C. 5 µA
D. 0.5 mA
E. 50 mA
F. 0.5 A
G. Je ne sais pas



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

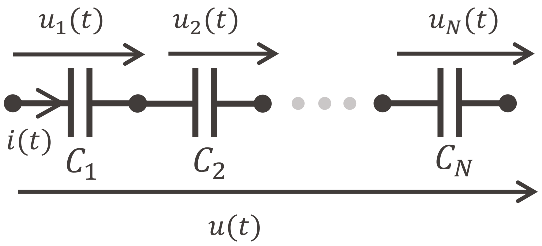
C. Lafforgue

Points clés

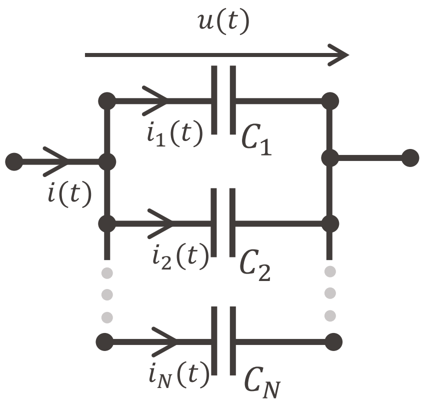
- Les circuits avec condensateurs ont un comportement dynamique (dépend du temps)

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt}}$$

- Des condensateurs en parallèle s'ajoutent
  - Des résistances en parallèle ont une capacité équivalente plus grande
- Pour des condensateurs en série, les inverses des capacités s'ajoutent
  - Des condensateurs en série ont une capacité équivalente plus petite



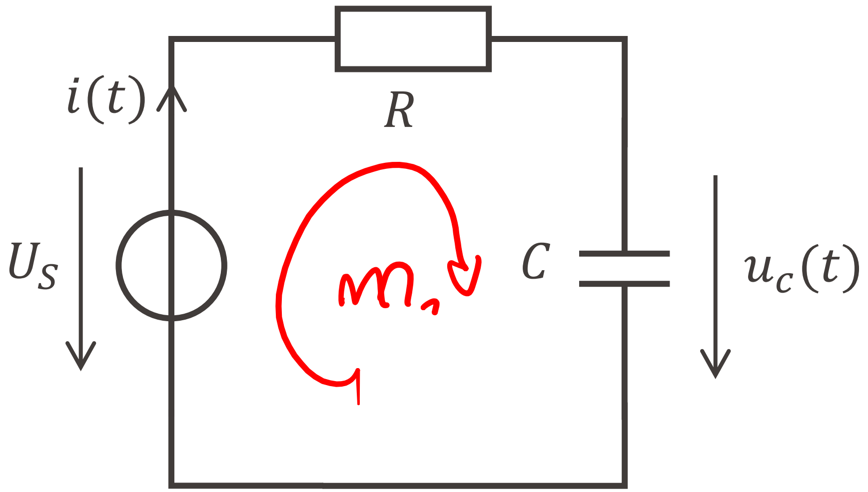
$$\boxed{\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}}$$



$$\boxed{C_{\mathrm{eq}} = \sum_{k=1}^{N} C_k}$$

Circuit RC

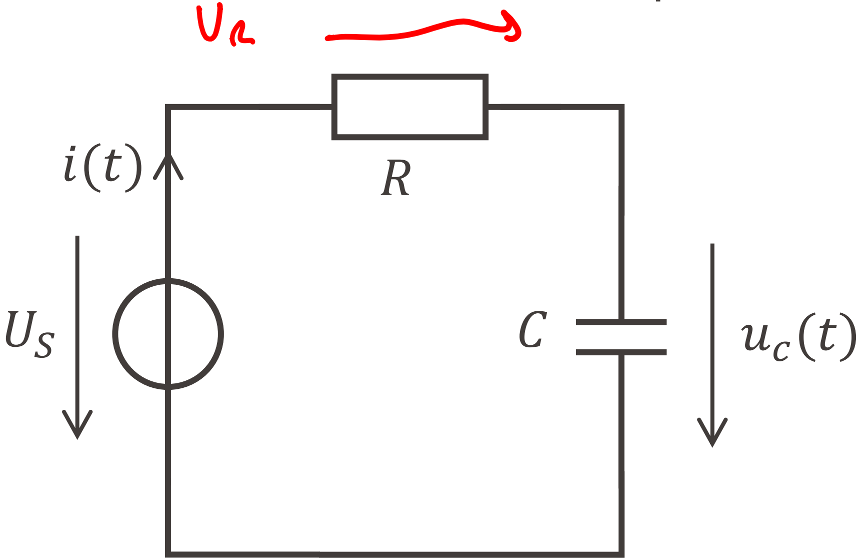
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



C. Lafforgue

Circuit RC

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Loi des mailles:

$$U_S = Ri(t) + u_c(t)$$

Relation caractéristique du condensateur::

$$i(t) = \frac{Cdu}{dt}(t)$$

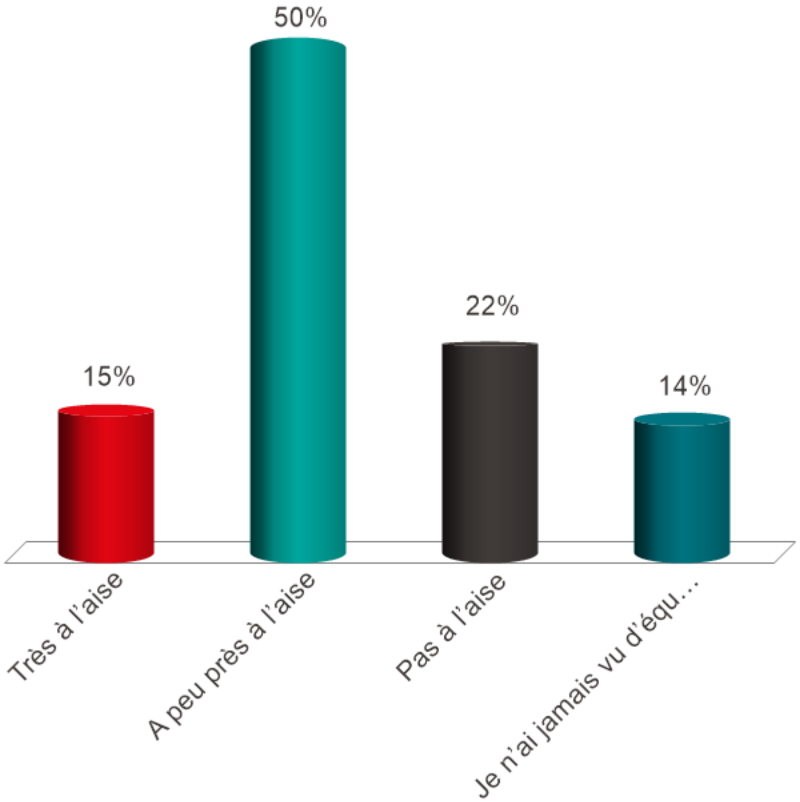
Donc on obtient:

$$U_S = RC\frac{du_c}{dt} + u_c(t)$$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}U_S}$$

Comment vous sentez-vous avec les équations différentielles?

A. Très à l’aise
B. A peu près à l’aise
C. Pas à l’aise
D. Je n’ai jamais vu d’équations différentielles



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

C. Lafforgue

- Définition de la fonction exponentielle: solution de l'équation différentielle

$$\frac{dg}{dz}(z) = g(z)$$

- La fonction exponentielle s'écrit $g(z) = e^z$
- Propriété:
  - Si $h(z) = e^{kz}$ alors $\frac{dh}{dz}(z) = ke^{kz} = k \cdot h(z)$

$$\begin{cases} \frac{dh}{dz} = k \cdot h(z) \\ h(z) = e^{kz} \end{cases}$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

- On souhaite déterminer une fonction $x(t)$ régie par une équation différentielle linéaire d'ordre 1:

$$\frac{[x]}{[\tau]}$$

$$\frac{[x]}{[t]} \qquad \frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0 \qquad \frac{[x]}{[t]}$$

- Ici, τ est une constante de temps (nécessaire pour que l'équation soit physiquement correcte)
- X_0 est une constante, correspondant à la source dans notre cas

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dh}{dz}(z) = k \cdot h(z)$$

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0 \iff \frac{dx_h}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

- Les solutions d'une telle équation sont des fonctions exponentielles:

$$x_h(t) = Ke^{-t/\tau}$$

$$\frac{dx_h}{dt} = K \times \frac{d}{dt}\left(e^{-t/\tau}\right) = -\frac{K}{\tau}e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

C. Lafforgue

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 1. On résout l'équation homogène:

$$\frac{dx_h}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

C. Lafforgue

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 2. On cherche une solution particulière. L'équation accepte une solution sous la forme d'une constante ($\frac{dx_p}{dt} = 0$):

$$x_p = X_0$$

$$0 + \frac{1}{\tau} \times X_0 = \frac{1}{\tau} X_0$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- 3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière:

$$\boxed{x(t) = Ke^{-t/\tau} + X_0}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K}{\tau}e^{-t/\tau} + 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \cancel{-\frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}} + \cancel{\frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}} + \frac{X_0}{\tau}$$

$$= \frac{X_0}{\tau}$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

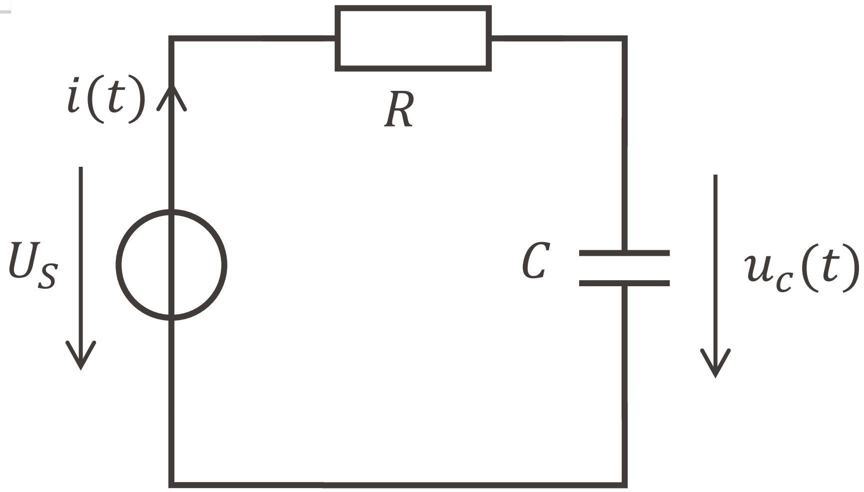
- 3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière:

$$\boxed{x(t) = Ke^{-t/\tau} + X_0}$$

- On obtient une famille de solutions. Le comportement total est déterminé par **la condition initiale**.

Circuit RC – charge du condensateur

- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Condition initiale:
$u_c(0) = 0$ V

$$\boxed{\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}U_S}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

$x = u_c$

$\tau = RC$

$X_0 = U_S$

$u_c(0) = U_S(1 - e^0)$
$= 0$ V

$$\boxed{u_c(t) = \underbrace{U_S}_{x_p(t)}\underbrace{(1 - e^{-t/\tau})}_{x_h}}$$

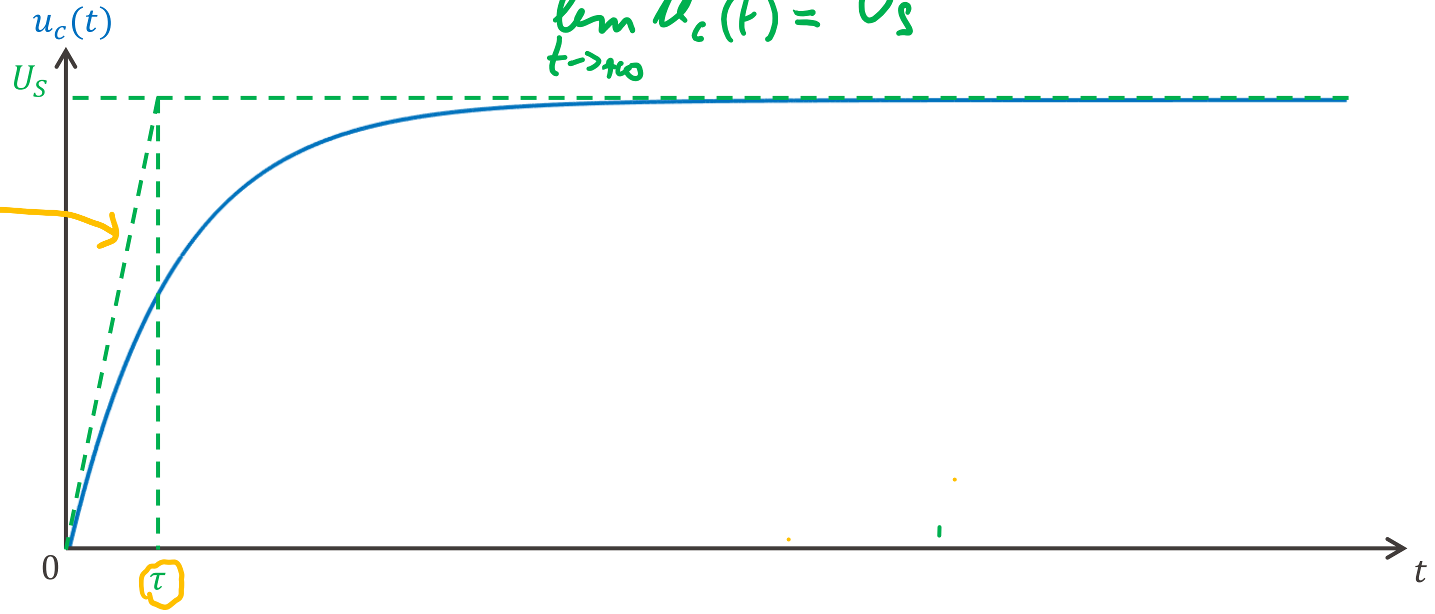
Circuit RC – charge du condensateur

$$\boxed{u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = \frac{U_s}{\tau} e^0 = \frac{U_s}{\tau}$$

$$\lim_{t \to +\infty} u_c(t) = U_s$$

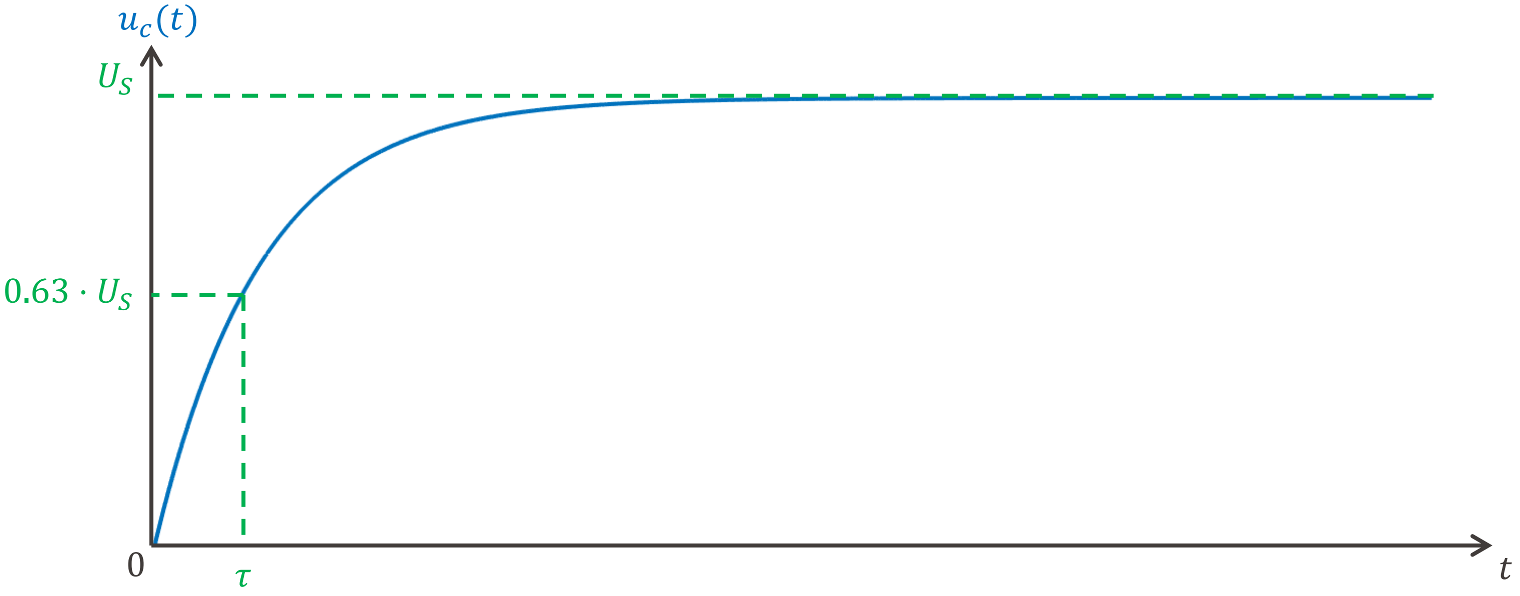
$$y(t) = \frac{U_s}{\tau} t$$



Circuit RC – charge du condensateur

C. Lafforgue

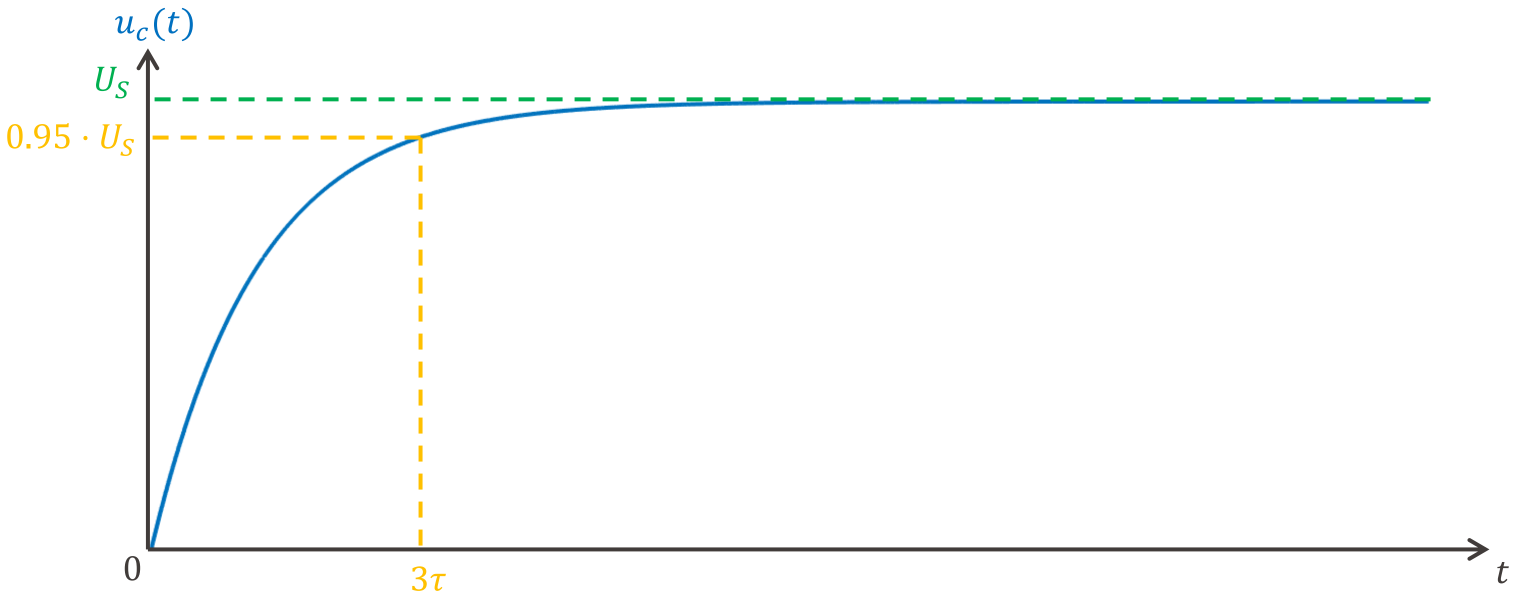
$$\boxed{u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Circuit RC – charge du condensateur

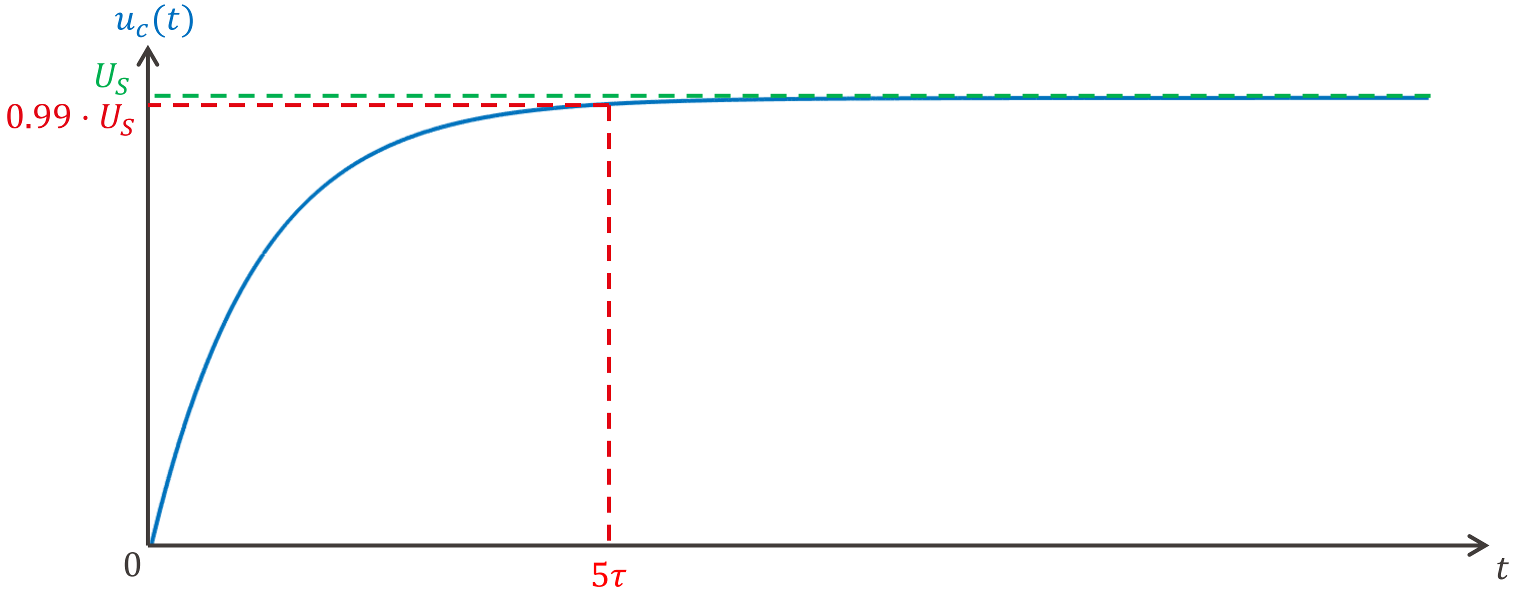
C. Lafforgue

$$\boxed{u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Circuit RC

$$\boxed{u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Circuit RC – charge du condensateur

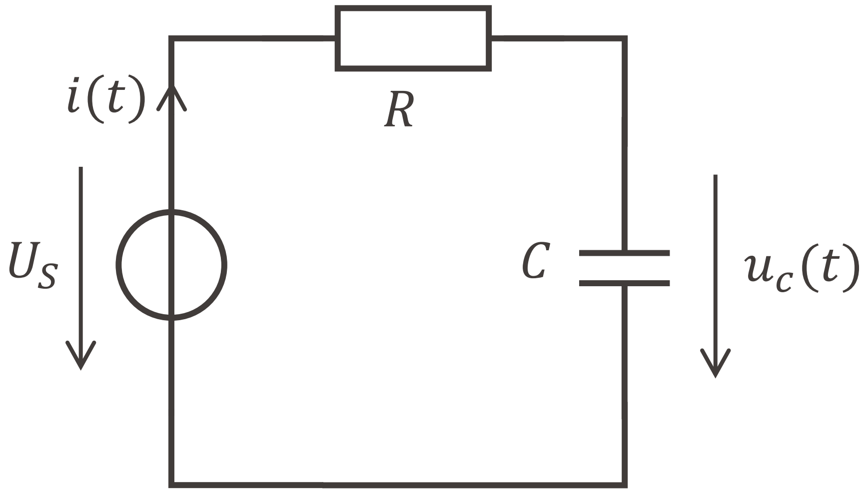
C. Lafforgue

- On modélise un circuit dépendant du temps t:

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

$$u_c(t) = U_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

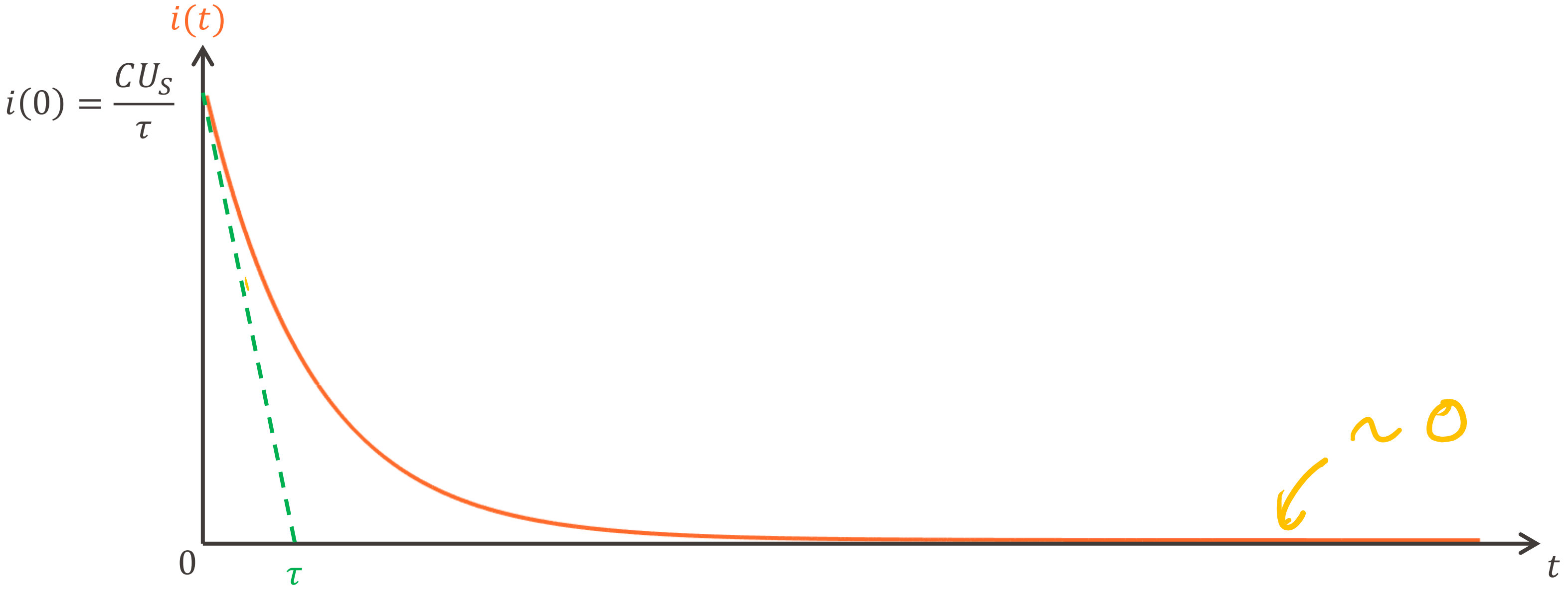
$$\Rightarrow i(t) = \frac{CU_S}{\tau}e^{-t/\tau}$$



Condition initiale:
$u_c(0) = 0\ \mathrm{V}$

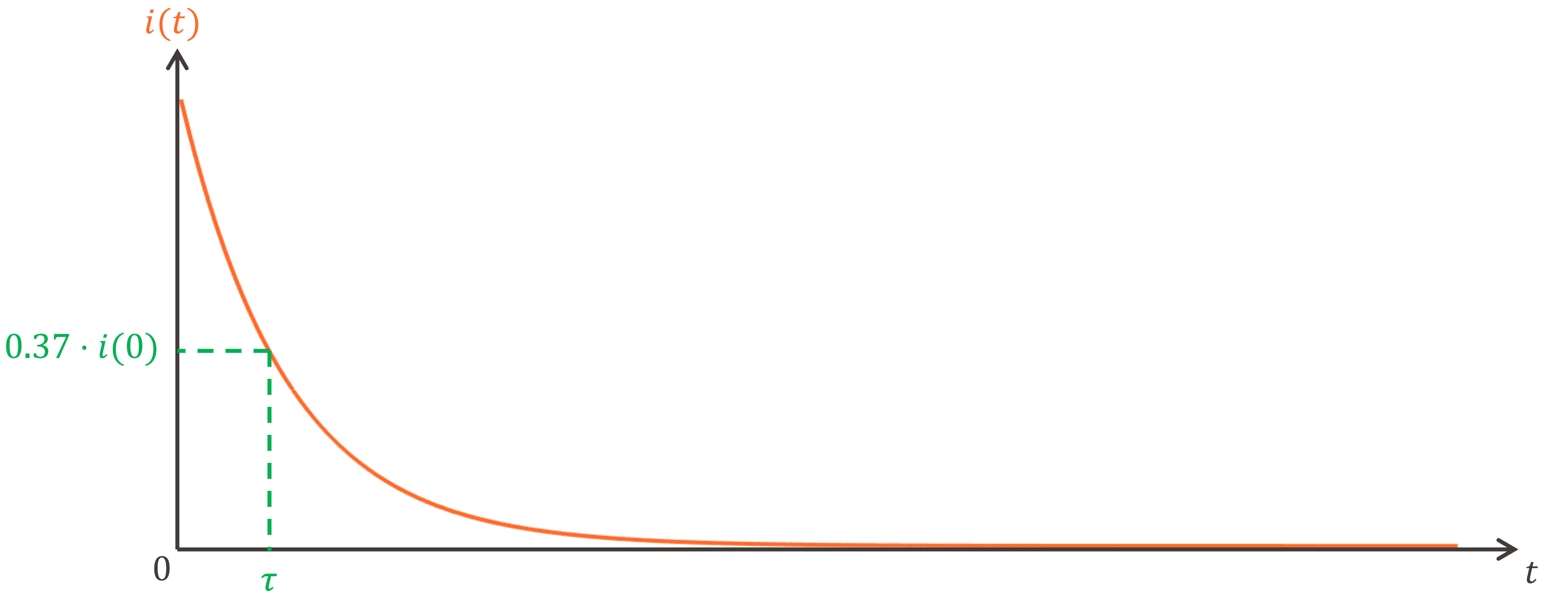
Circuit RC – charge du condensateur

$$\boxed{i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}}$$



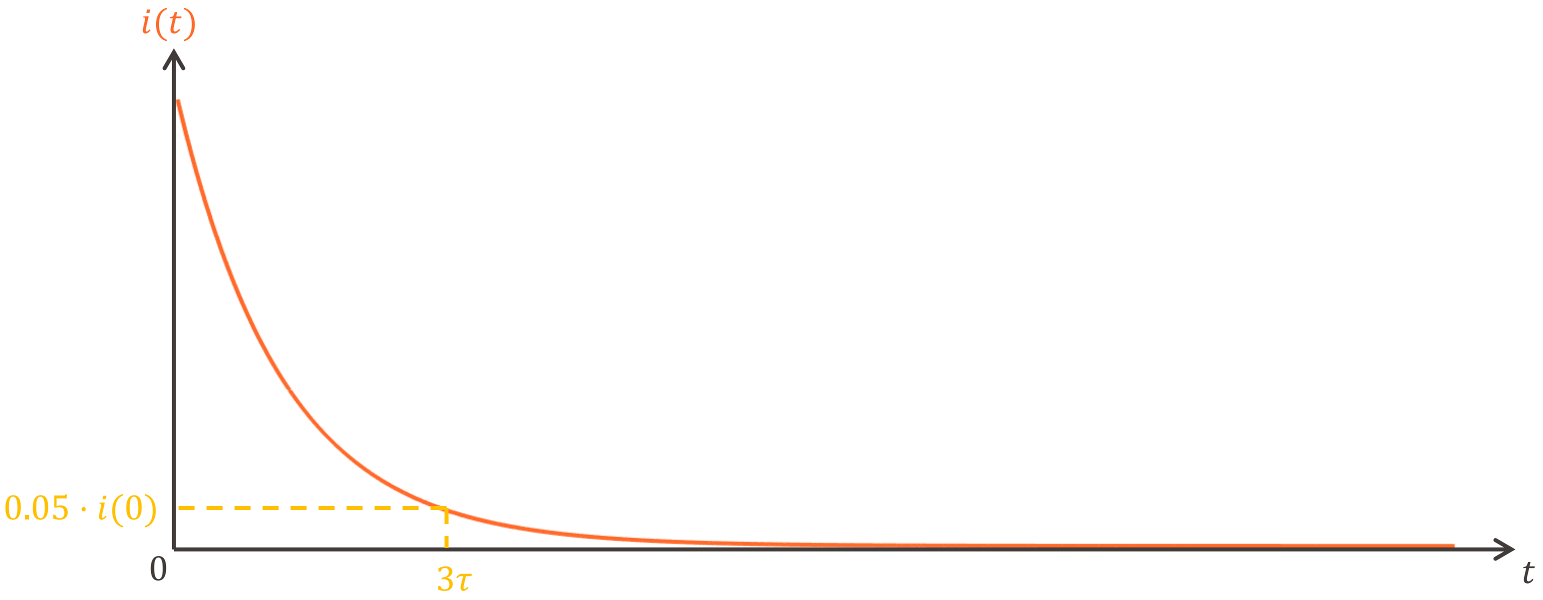
Circuit RC – charge du condensateur

$$\boxed{i(t) = \frac{C U_S}{\tau} e^{-t/\tau}}$$



Circuit RC – charge du condensateur

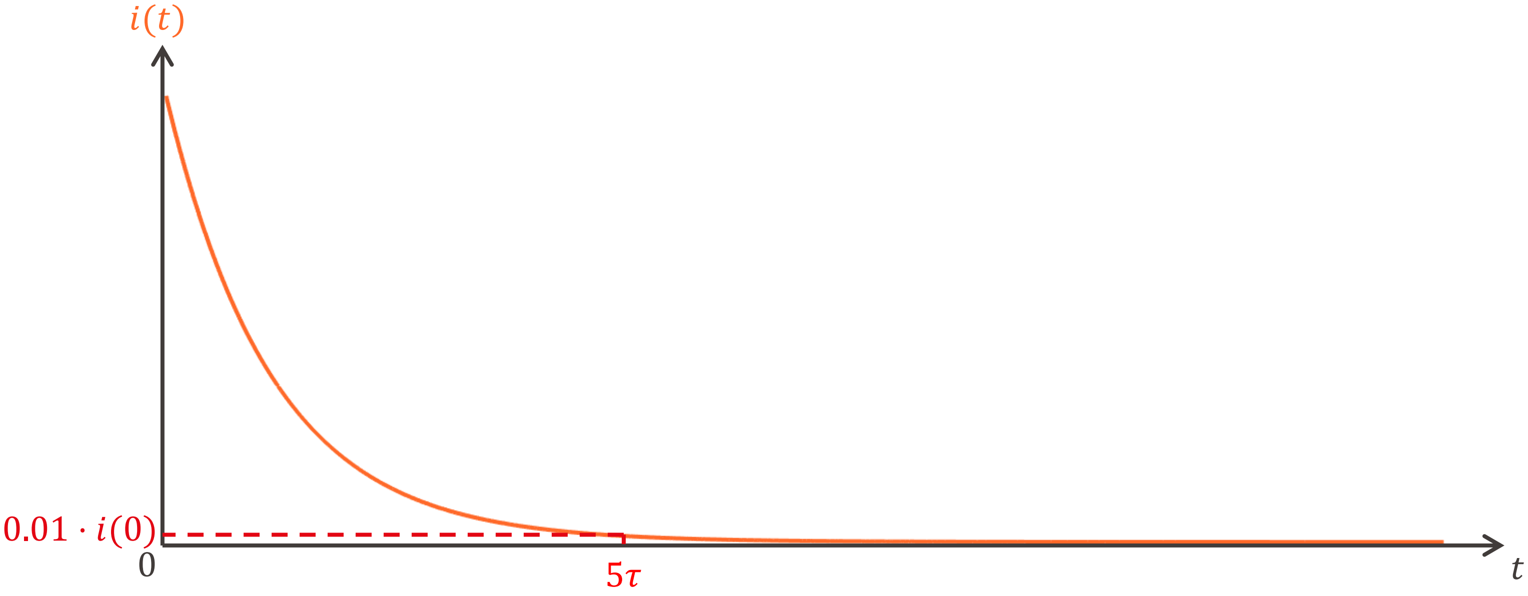
$$i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}$$



Circuit RC – charge du condensateur

C. Lafforgue

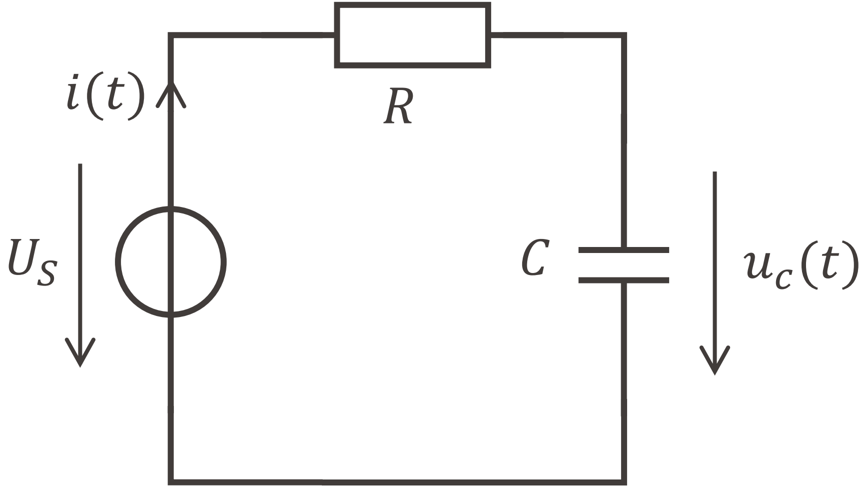
$$\boxed{i(t) = \frac{CU_S}{\tau} e^{-t/\tau}}$$

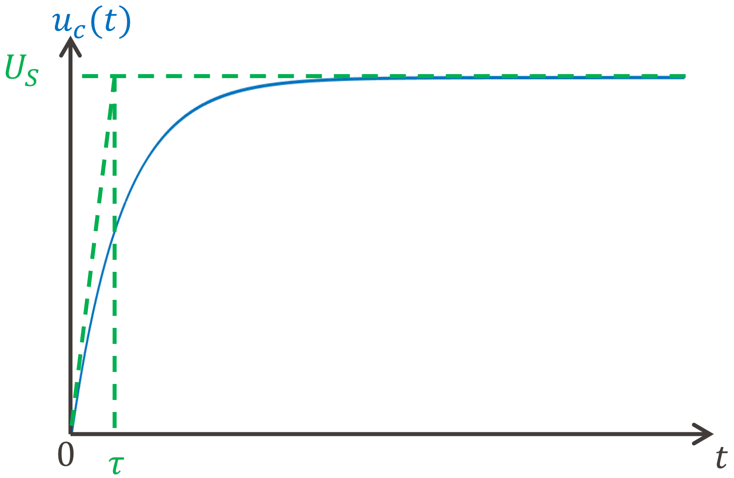


C. Lafforgue

Circuit RC – charge du condensateur

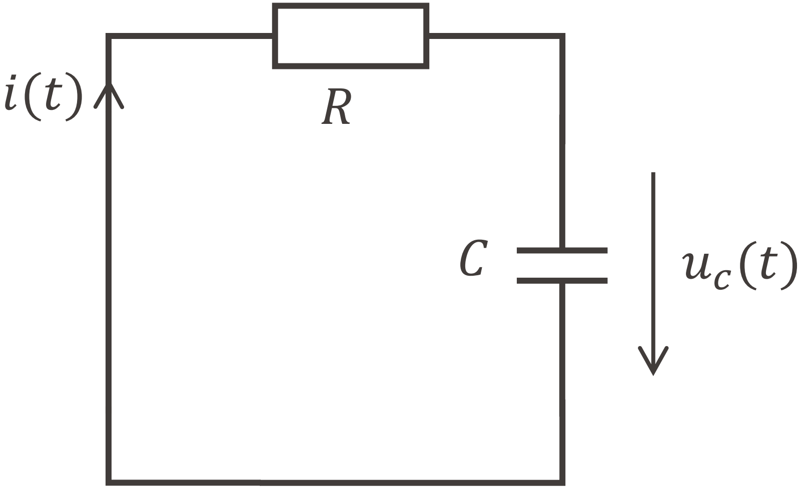
- Lorsque l'on alimente le circuit avec une source de tension, le condensateur se charge
  - La tension du condensateur tend vers une constante
  - Le condensateur est considéré chargé après 5τ (99% de la valeur finale)
  - Le courant tend vers 0 A, correspondant au régime statique





Circuit RC – décharge du condensateur

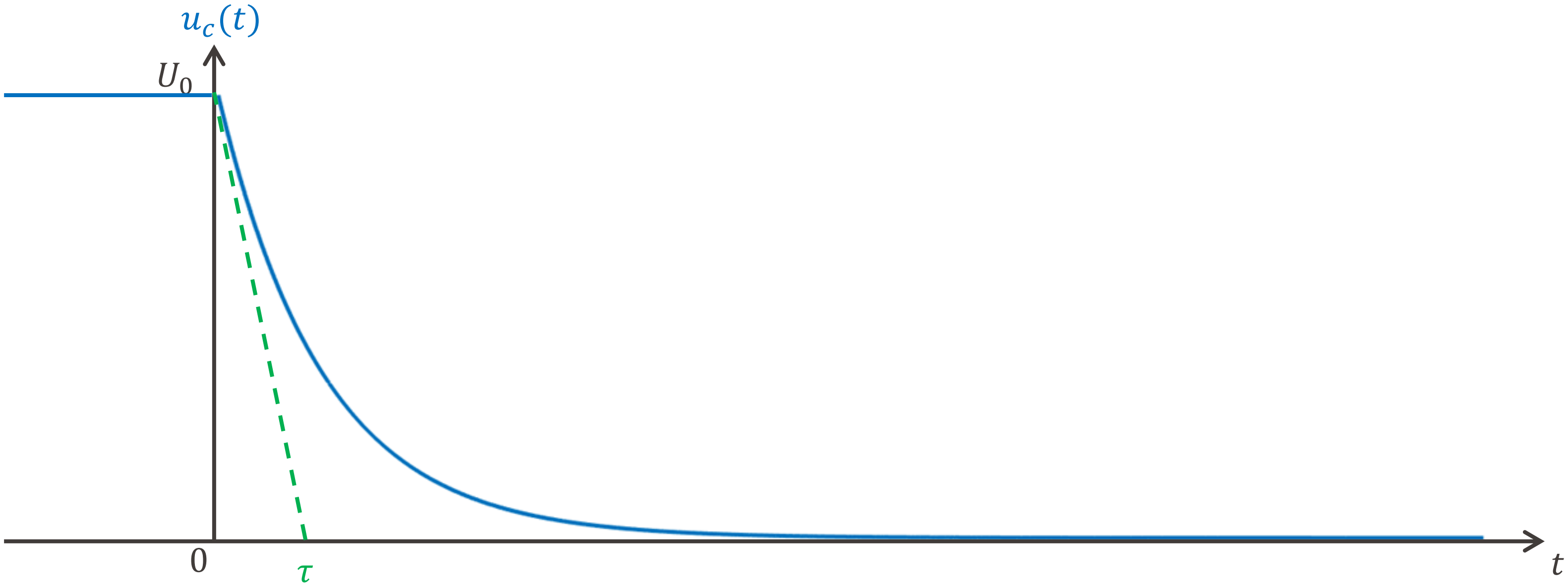
- On modélise un circuit dépendant du temps t:



Condition initiale:
$u_c(0) = U_0$

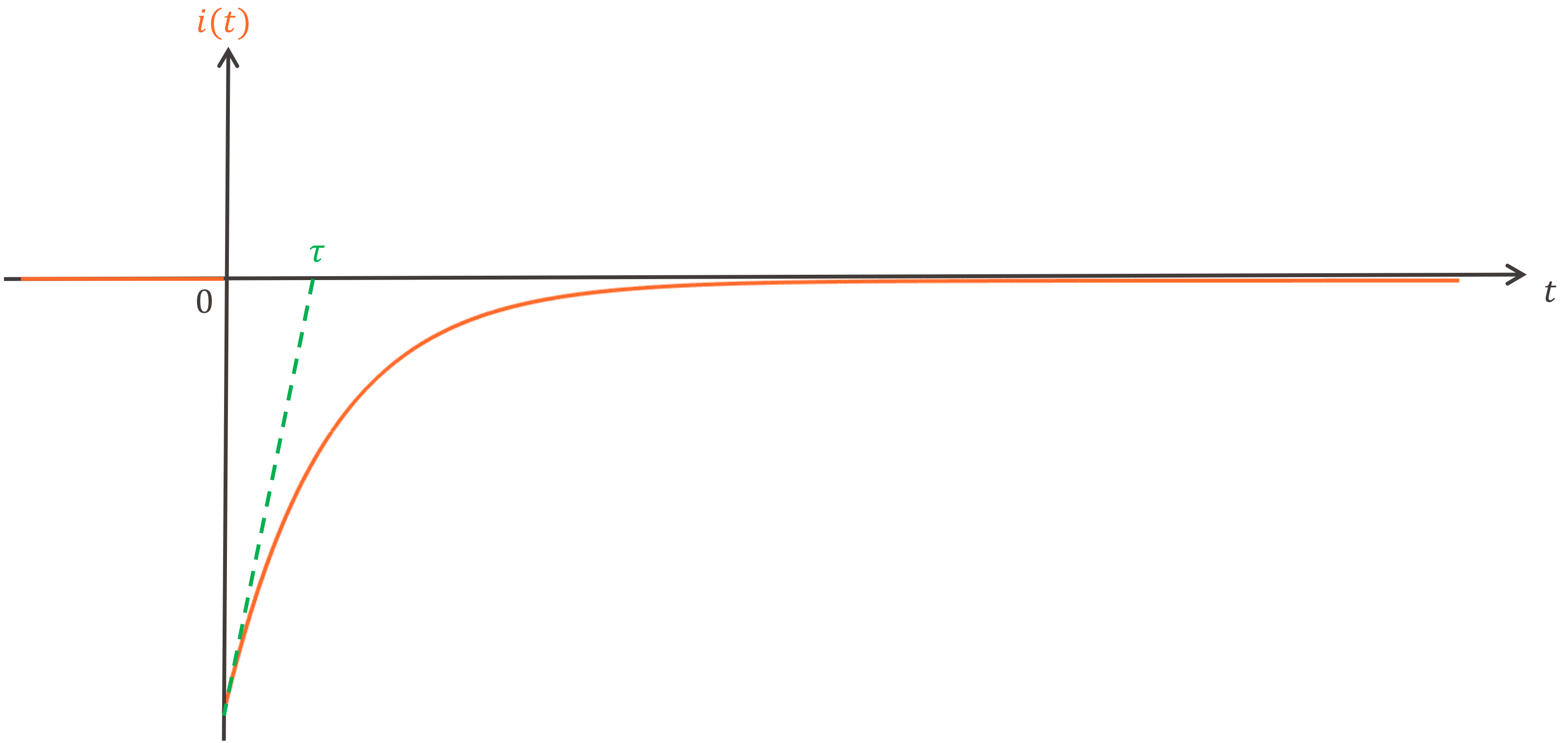
Circuit RC – décharge du condensateur

$$\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}}$$

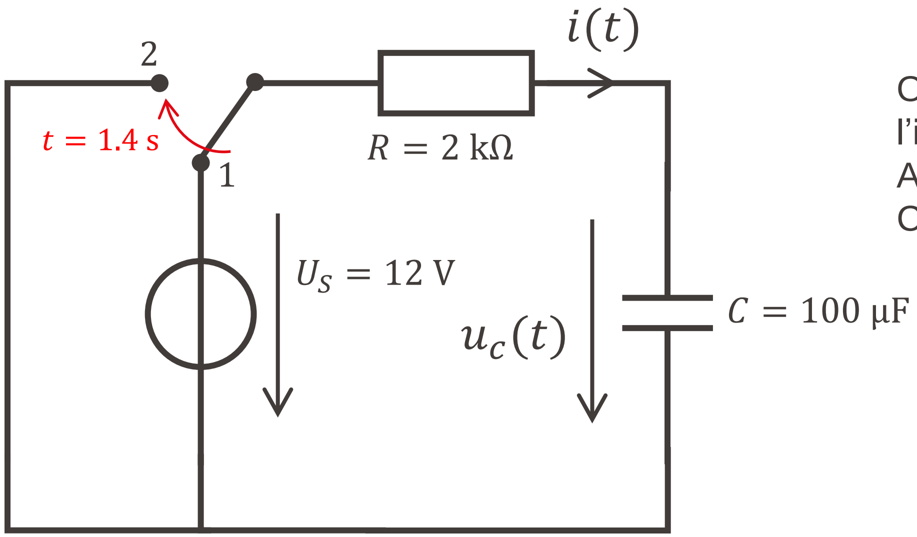


Circuit RC – décharge du condensateur

$$\boxed{i(t) = -\frac{CU_0}{\tau}e^{-t/\tau}}$$



Circuit RC – exemple



On considère le condensateur initialement déchargé et l'interrupteur est en position 1.
A $t = 1.4\ s$, on bascule l'interrupteur en position 2.
Calculons $u_c(t)$ et $i(t)$

Circuit RC – exemple

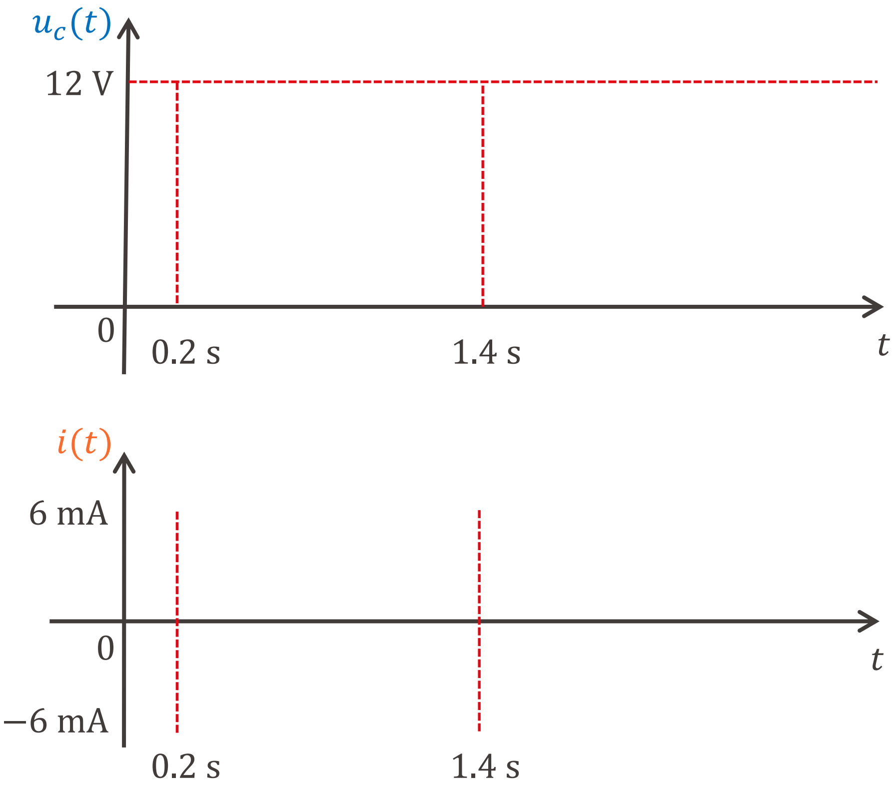
C. Lafforgue

Circuit RC – exemple

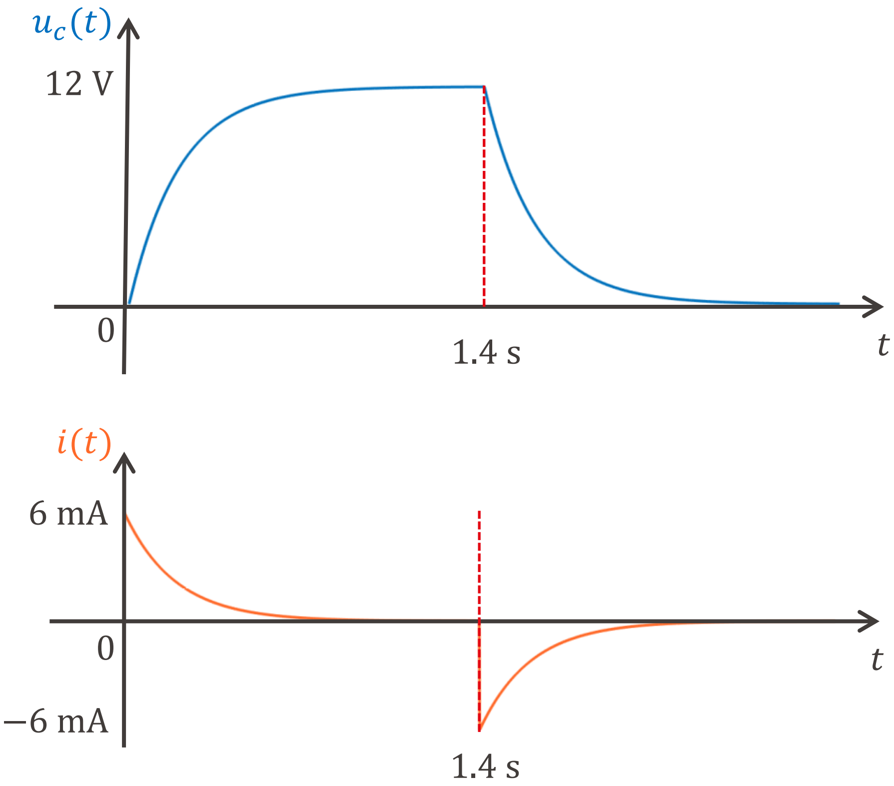
C. Lafforgue

Circuit RC – exemple

Circuit RC – exemple



Circuit RC – exemple



Points clés

- Un condensateur est un dipôle qui accumule de l'énergie électrostatique en condensant des charges proportionnellement à la tension:

$$\boxed{Q = CU}$$

- Le condensateur est caractérisé par sa **capacité**:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{d}}$$

- L'énergie accumulée pour une tension U est:

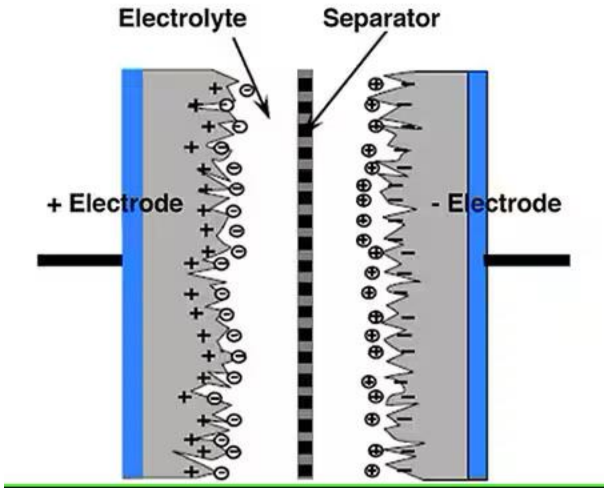
$$\boxed{W_c = \frac{1}{2} C U^2}$$

- En régime statique, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

Pour aller plus loin

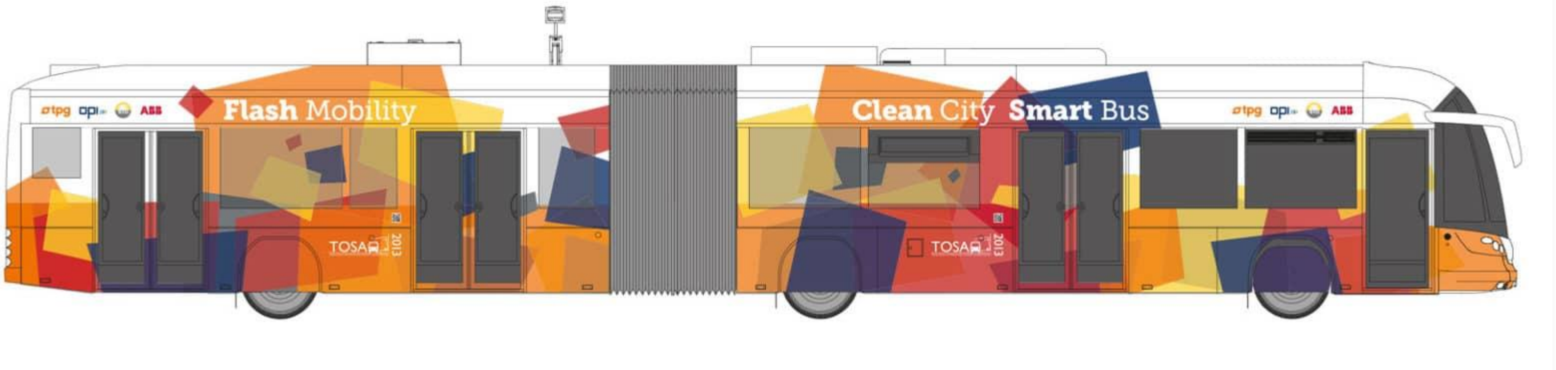
- Aujourd’hui, il existe des condensateurs particuliers utilisés pour des applications nécessitant de fortes densités de puissance et d’énergie
  - Recharge rapide de véhicules électriques
  - Démarrage de moteurs
  - …
- Il s’agit des supercondensateurs
  - Délivrent plus de courant que les condensateurs conventionnels
  - Plus grande durée de vie que les batteries
  - Charges/décharges rapides comparativement aux batteries
- Ils ont des capacités entre le F et le kF!

Pour aller plus loin



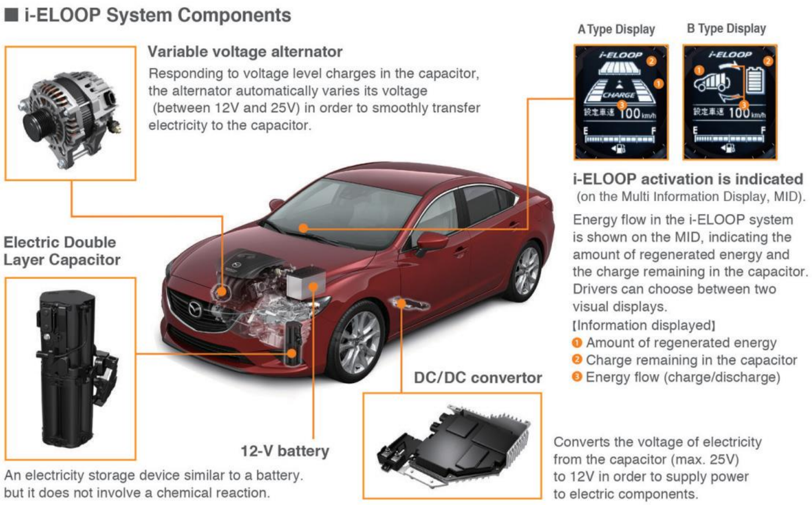
Pour aller plus loin

- Utilisés pour des recharges rapides
  - Exemple: système de recharge rapide pour bus électriques TOSA à Genève



Pour aller plus loin

- Utilisés pour récupérer de l'énergie lors de freinages
  - Exemple: système de récupération pour fonctions « start & stop » (i-ELOOP Mazda)
  - Exemple: alimentation ponctuelle d'excavatrice (6120B H FS Cat)



Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris