

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

Cours 4: Méthodes de résolution, théorèmes de Thévenin et de Norton

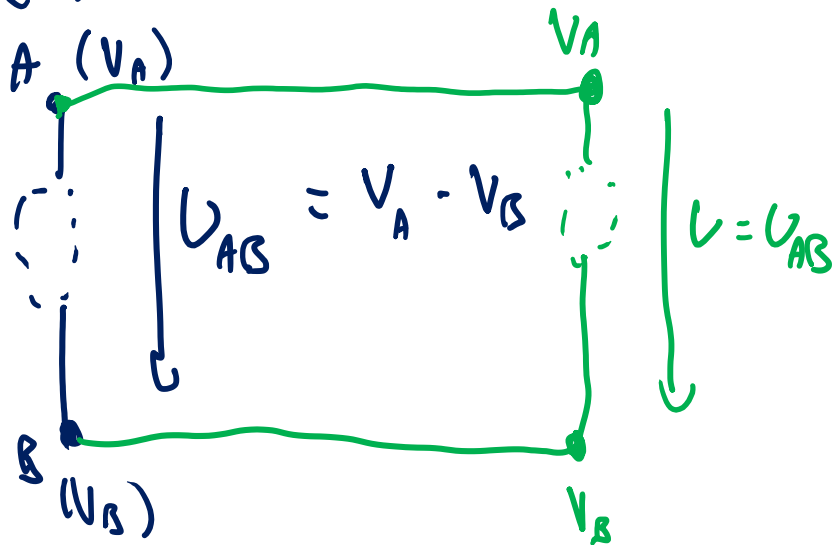
EE 106 – Sciences et
technologies de
l'électricité
Automne 2024

Rappels

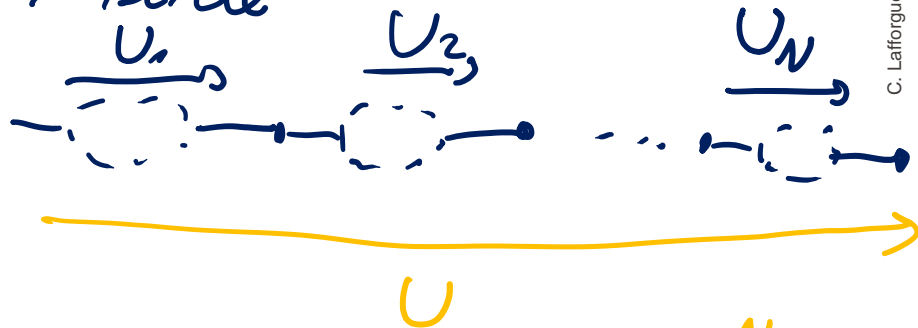


$$U \rightsquigarrow \mathcal{E}_{ES} \rightsquigarrow F_{ES}$$

(V)

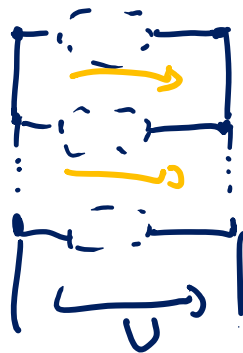


* série



$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_{n=1}^N U_n$$

* parallèle





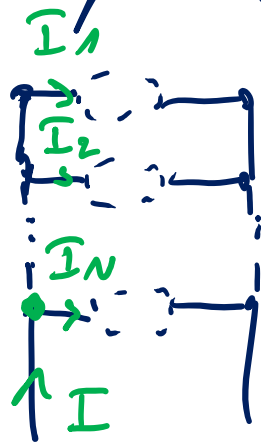
$$I = \frac{dq}{dt} \quad \leftarrow \text{charge qui a traversé pendant "dt"}$$

$$I \sim N_d$$

* série



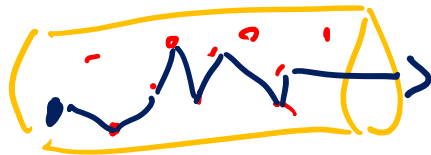
* parallèle



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

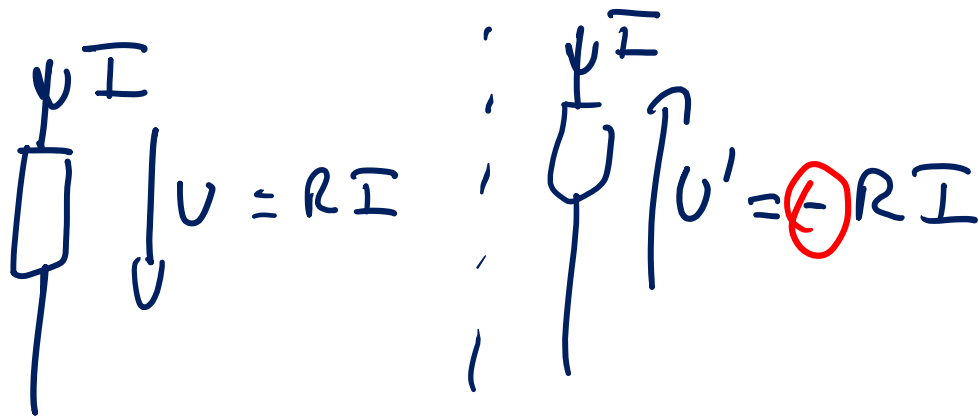
$$I = \sum_{n=1}^N I_n$$

- Rappels - Résistance



$$v_d \neq +\infty$$

$$V = RI \quad (\text{loi d'Ohm})$$



EPFL - Rappels - Résistance

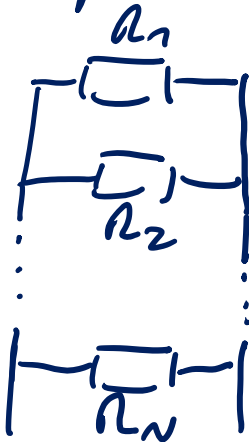
* série



$\hat{=}$

$$R_s = \sum_{n=1}^N R_n$$

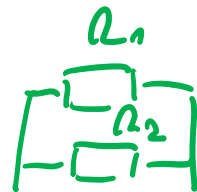
* parallèle



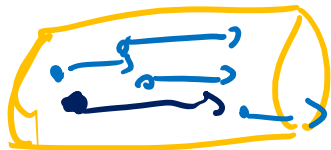
(=)

$$R_p$$

$$G_p = \sum_{n=1}^N G_n$$
$$\frac{1}{R_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}$$



$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

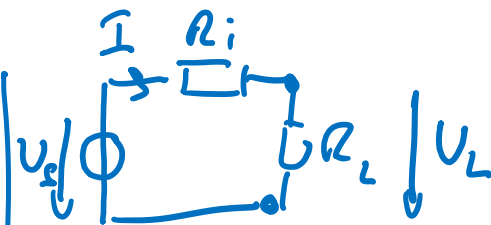


$$W_1 = qU$$

$$dW_{\text{tot}} = dq U$$

$$P = \frac{dW_{\text{tot}}}{dt} = \frac{dq}{dt} U$$

$$P = UI$$

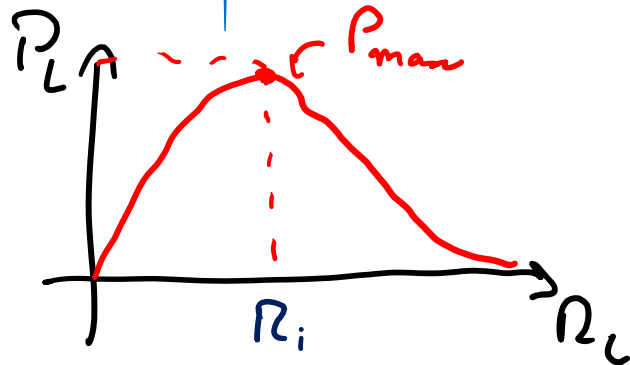


$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_s$$

$$I = \frac{U_L}{R_L} \Rightarrow P_L = \frac{U_L^2}{R_L}$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \cdot U_s^2$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} V_s^2$$



$$\eta = \frac{1}{2} = \frac{P_L}{P_s}$$

Il y a une petite erreur
dans le cours oral,
corrigée ici

$$P_L = P_{\max} \Leftrightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

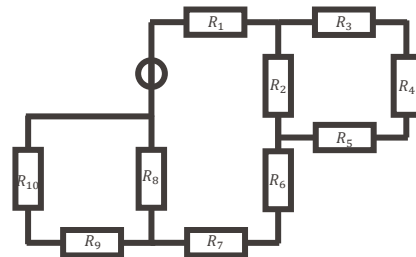
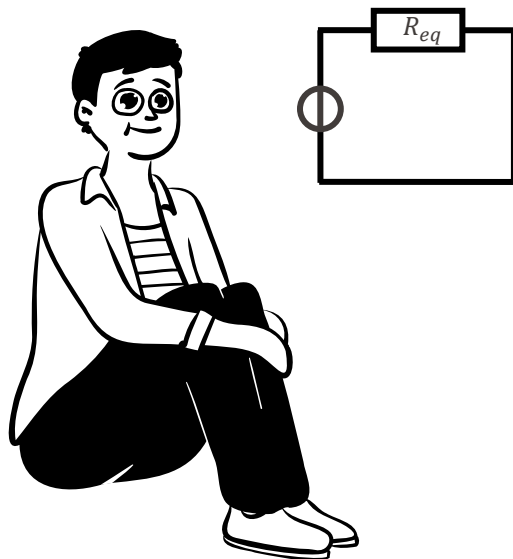
$$\Leftrightarrow \frac{1 \times (R_i + R_L)^2 - R_L \times 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} V_s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(R_i^2 - R_L^2) V_s^2}{(R_i + R_L)^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow R_i = R_L$$

↳ adaptation de puissance

Simplification de schémas électriques

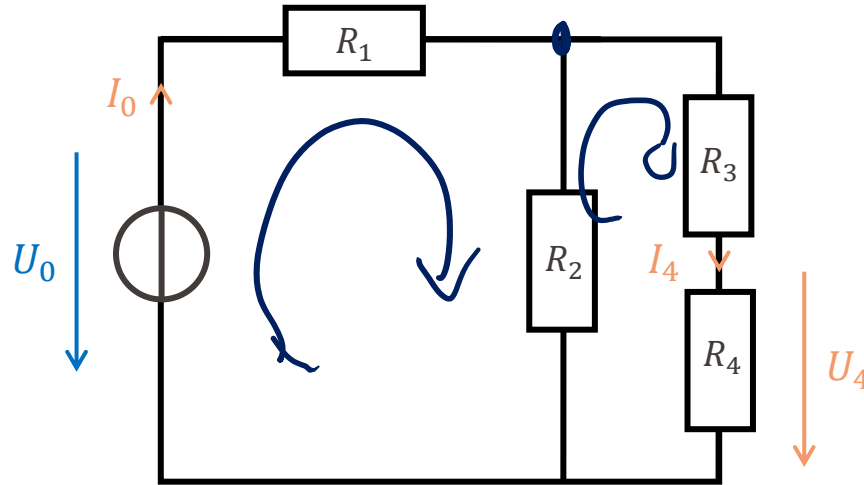


Simplification du schéma

- Etape 1: Dessiner un schéma électrique **clair, précis et lisible**
- Etape 2: Identifier les inconnues à déterminer et les données
- Etape 3: Ajouter les grandeurs électriques et les flèches
- Etape 4: Procéder à des simplifications successives autant que possible
- Etape 5: Mise en équation

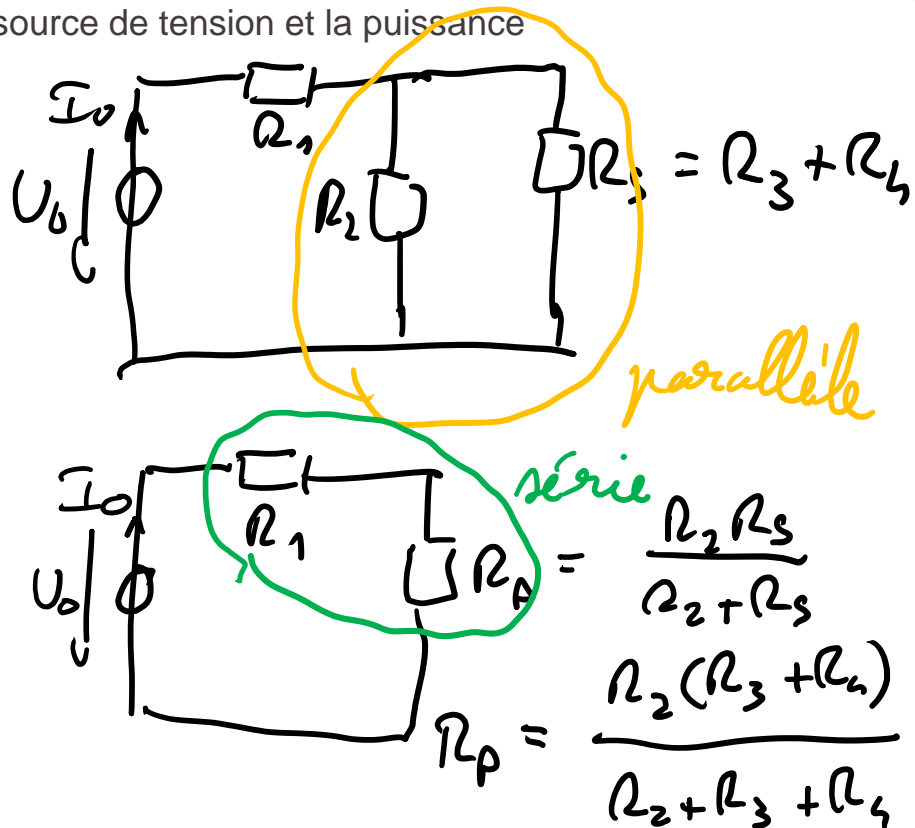
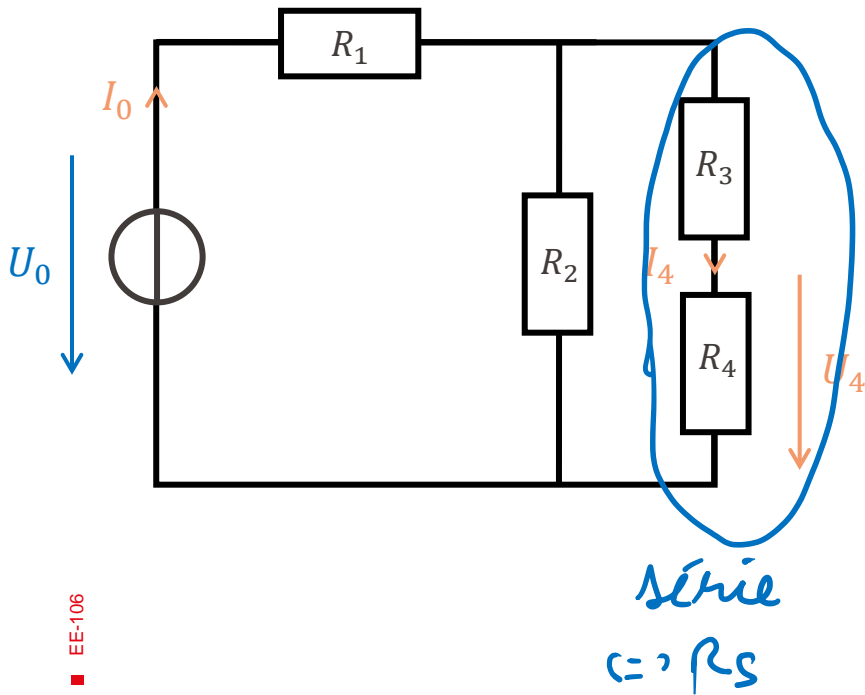
Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0



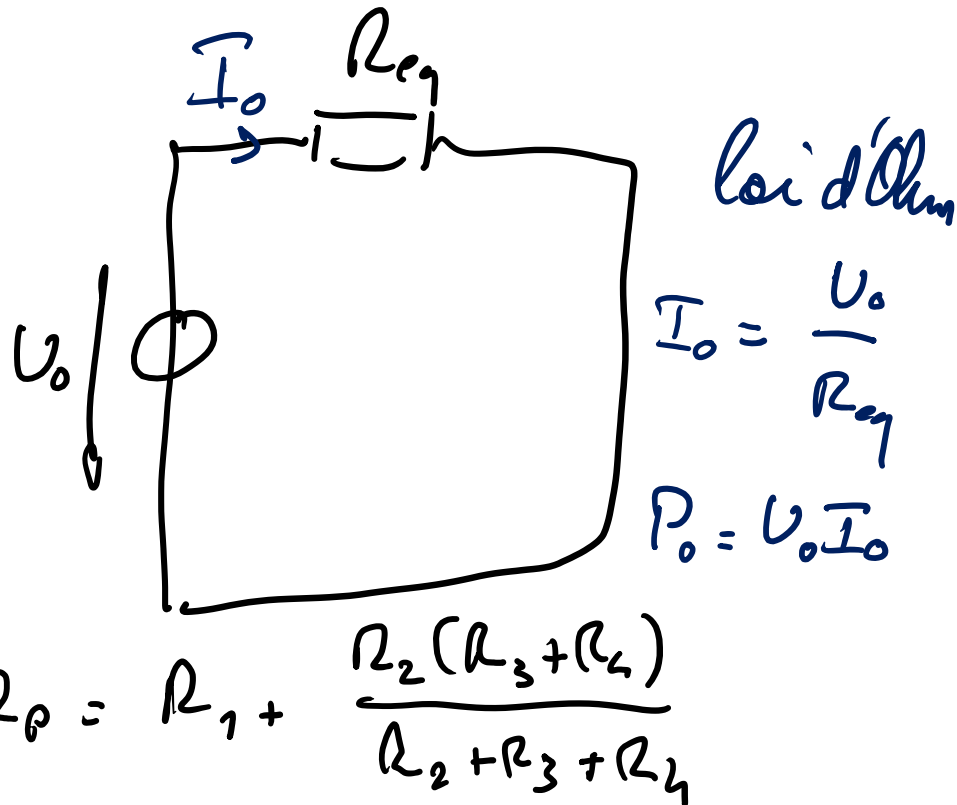
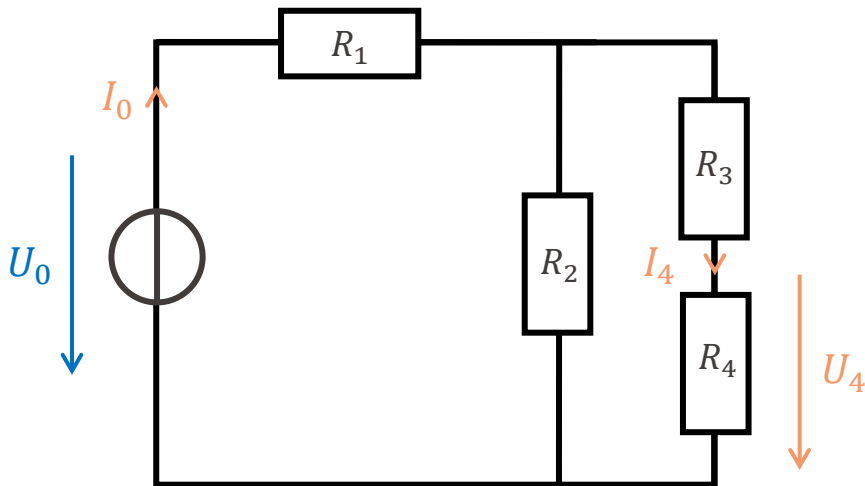
Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0



Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0

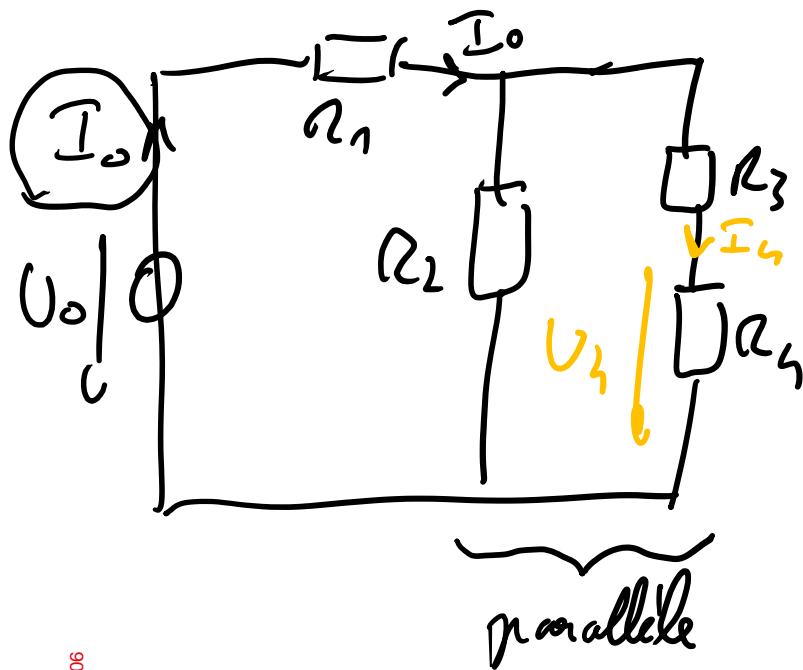


$$R_{eq} = R_1 + R_p = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Simplification du schéma – Exemple 1



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0



diviseur de courant

$$I_4 = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} I_0$$

loi d'Ohm :

$$U_4 = R_4 I_4$$

Simplification du schéma – Exemple 1



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0



Points clés

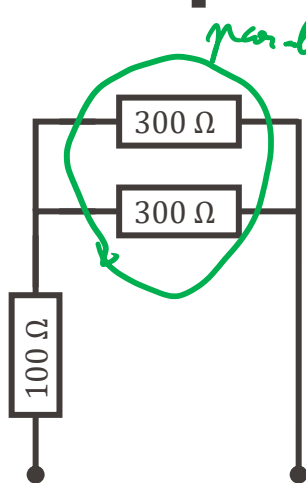
- Le schéma électrique est votre outil principal: il faut le soigner!
- Bien repérer les combinaisons série/parallèle pour simplifier le schéma
- Réagencer le schéma si nécessaire



Que vaut la resistance équivalente après simplification?

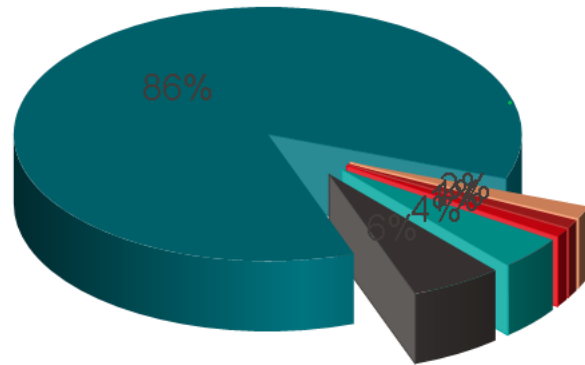


$$R_p = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

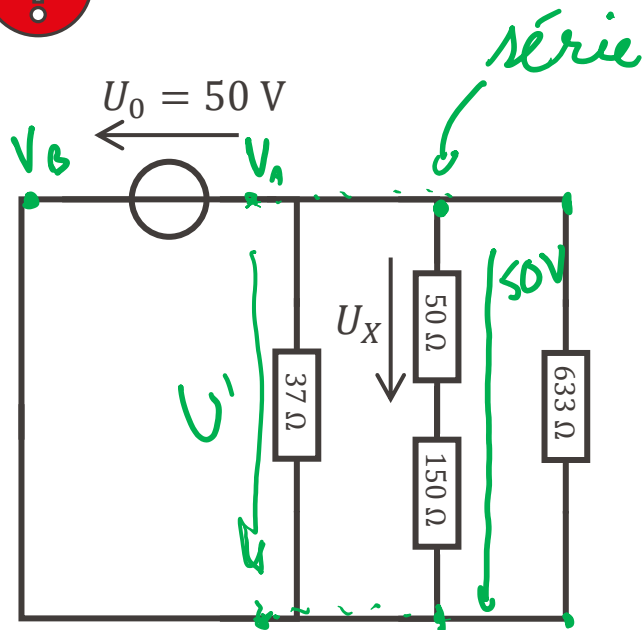


150 Ω

- A. 700 Ω
- B. 171.43 Ω
- C. 85.7 Ω
- ✓ D. 250 Ω
- E. 60 Ω
- F. 375 Ω



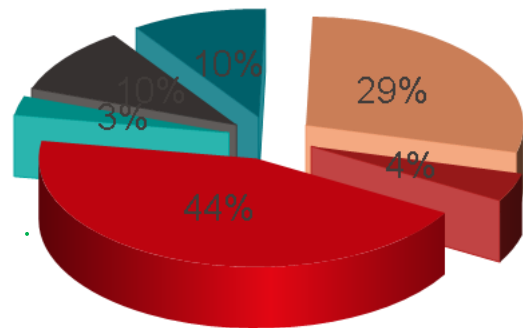
Que vaut la tension U_X ?



div. de tension

$$U_X = \frac{50}{50+150} 50V = 12,5 V$$

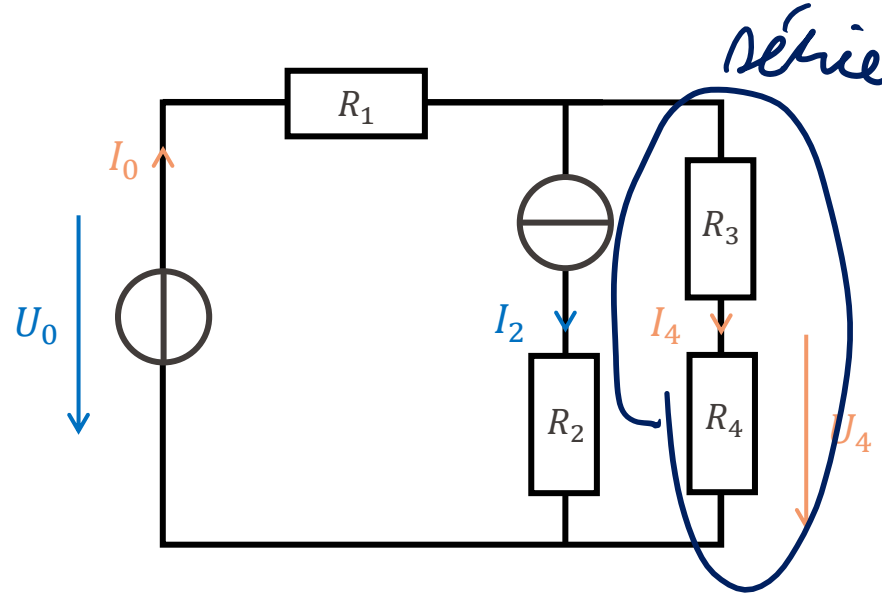
- ✓
- A. $U_X = 12.5 V$
 - B. $U_X = 21.3 V$
 - C. $U_X = 37.5 V$
 - D. $U_X = -37.5 V$
 - E. $U_X = -50 V$
 - F. $U_X = 16.7 V$



$$U' = V_A - V_B = U_0$$

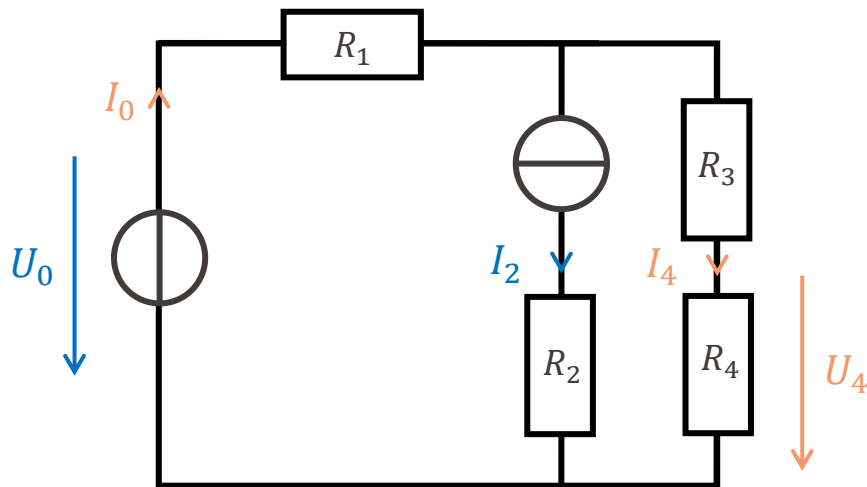
Simplification du schéma – Exemple 2

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2



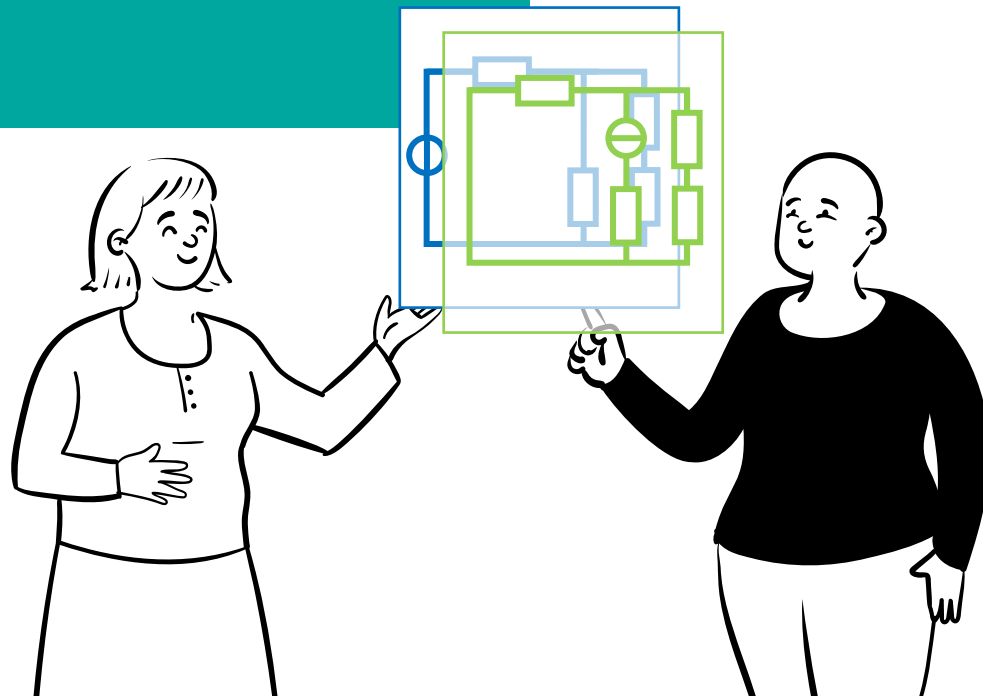
Simplification du schéma – Exemple 2

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2



- Pas évident à simplifier...
- Il est toujours possible d'appliquer les lois de Kirchhoff et d'Ohm (mais ça risque d'être très long!)
- Comment faire autrement?

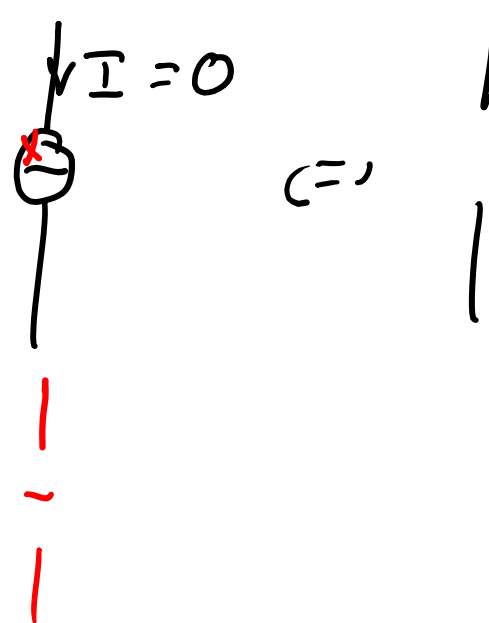
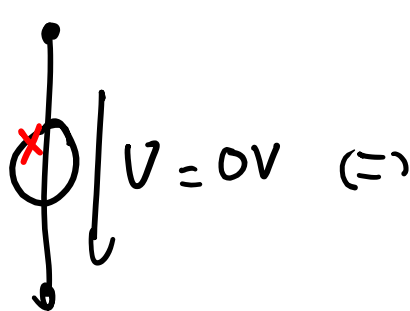
Principe de superposition



- En présence de plusieurs sources, on ne peut pas toujours simplifier le circuit
- On peut séparer le problème en plusieurs problèmes plus simples
 - On ne traite qu'une seule source à la fois, en éteignant les autres sources
 - On répète cela pour chaque source
 - On additionne les résultats

Principe de superposition: le résultat total est la somme des solutions correspondant à chaque source individuelle.

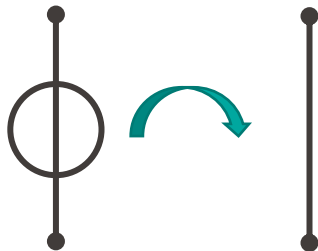
- Ca veut dire quoi « éteindre une source » dans un schéma électrique?





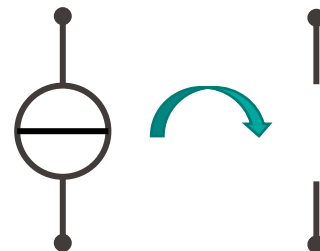
- Ca veut dire quoi « éteindre une source » dans un schéma électrique?

Source de tension



La source devient un « court-circuit »

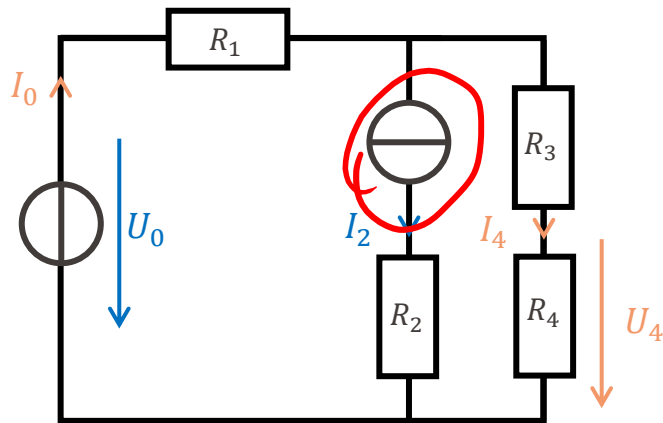
Source de courant



La source devient un « circuit ouvert »

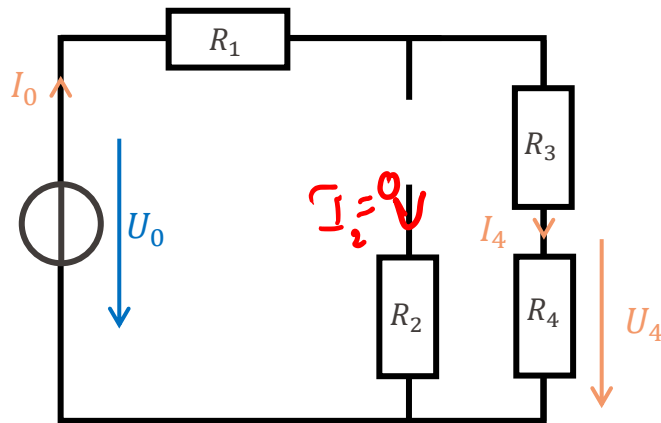
Principe de superposition– Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2



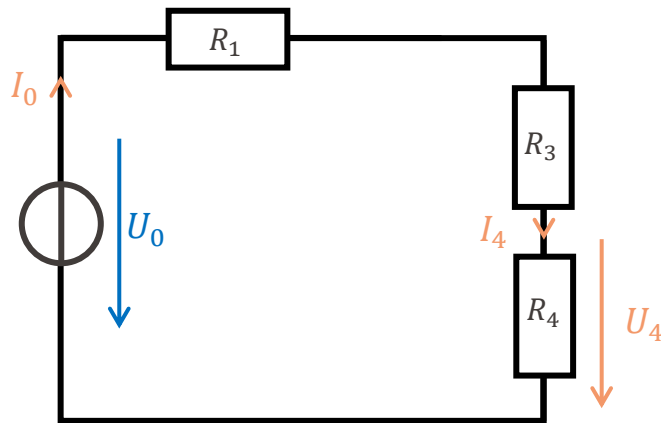
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant

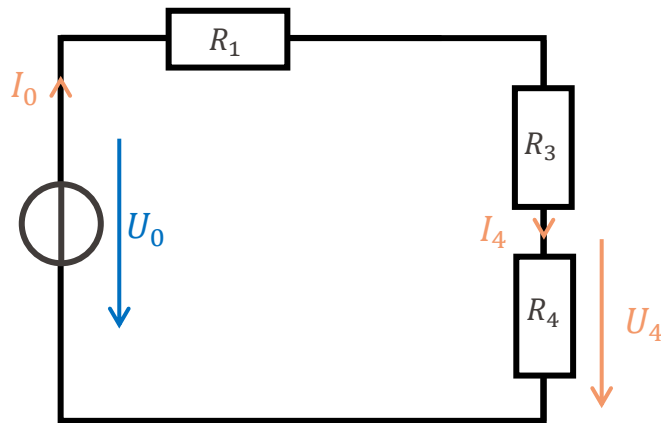


Principe de superposition– Exemple



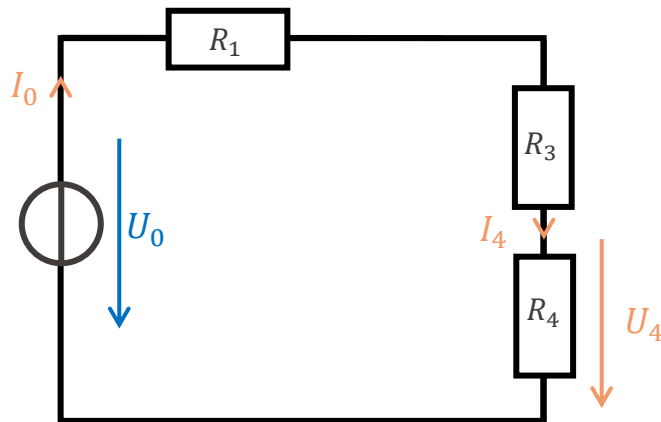
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées



Diviseur de tension sur R_4 :

$$U_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_3 + R_4} U_0$$

Loi des nœuds:

$$I_4 = I_0$$

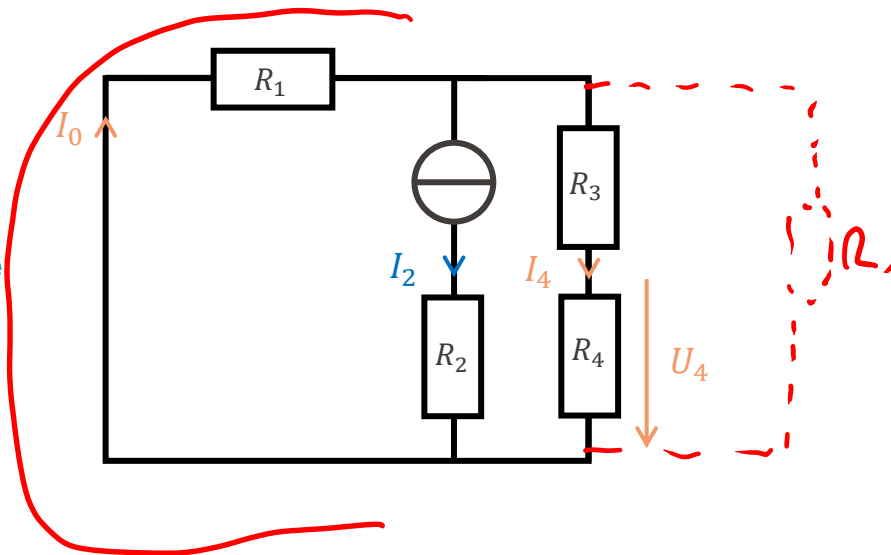
Loi d'Ohm:

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{U_0}{R_1 + R_3 + R_4}$$

stine

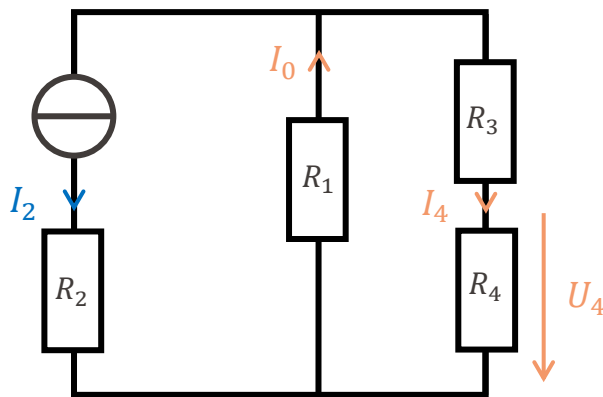
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)

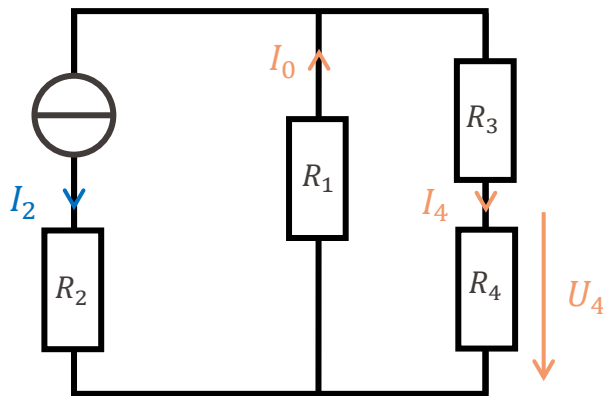


Principe de superposition– Exemple



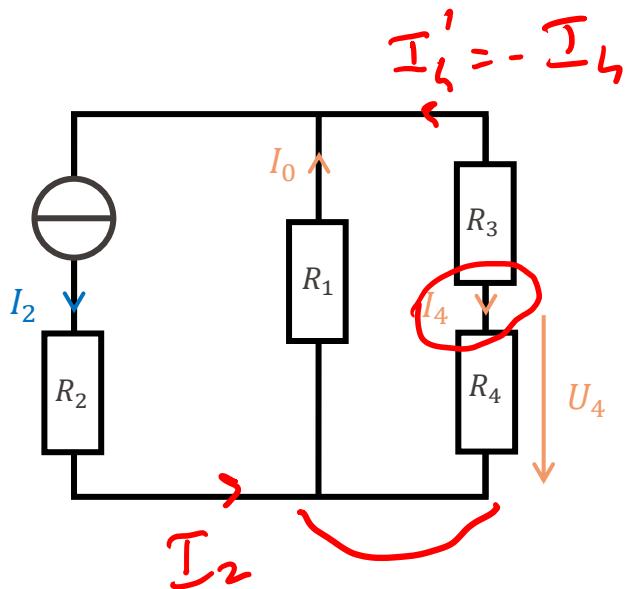
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



Diviseur de courant:

$$I_4 = \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_4} I_2$$

$$I_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} I_2$$

Loi d'Ohm:

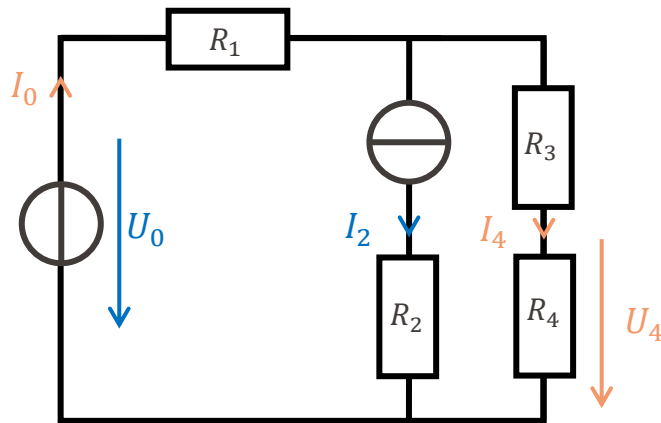
$$U_4 = R_4 I_4 = - \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_4} I_2$$

Principe de superposition– Exemple



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**

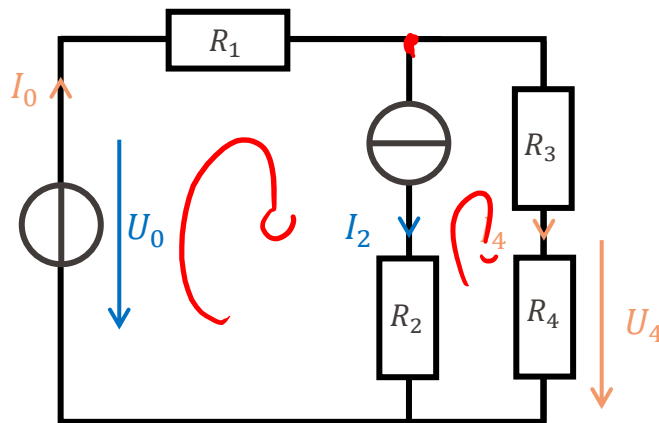


Principe de superposition- Exemple



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par R_4 en fonction de U_0 et de I_2

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. **On additionne les résultats**

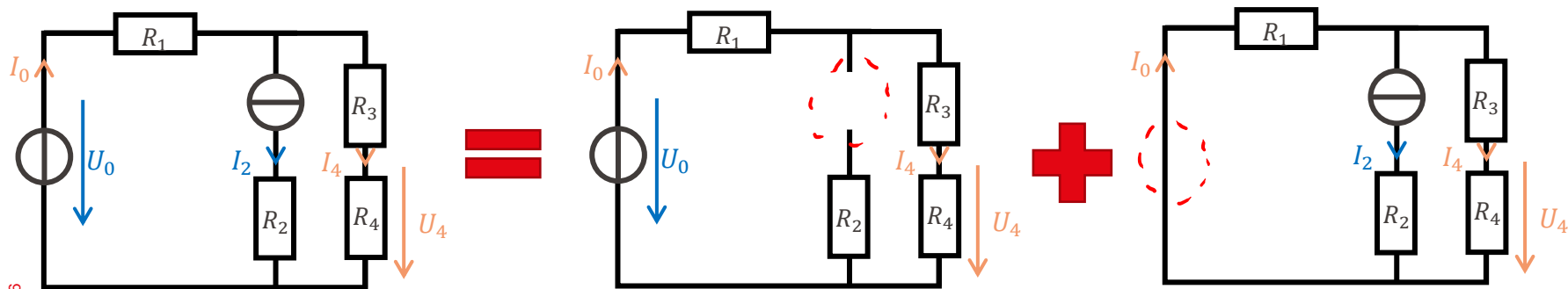


$$I_4 = \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} (U_0 - R_1 I_2)$$

$$I_0 = \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} (U_0 + (R_3 + R_4) I_2)$$

$$U_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4} (U_0 - R_1 I_2)$$

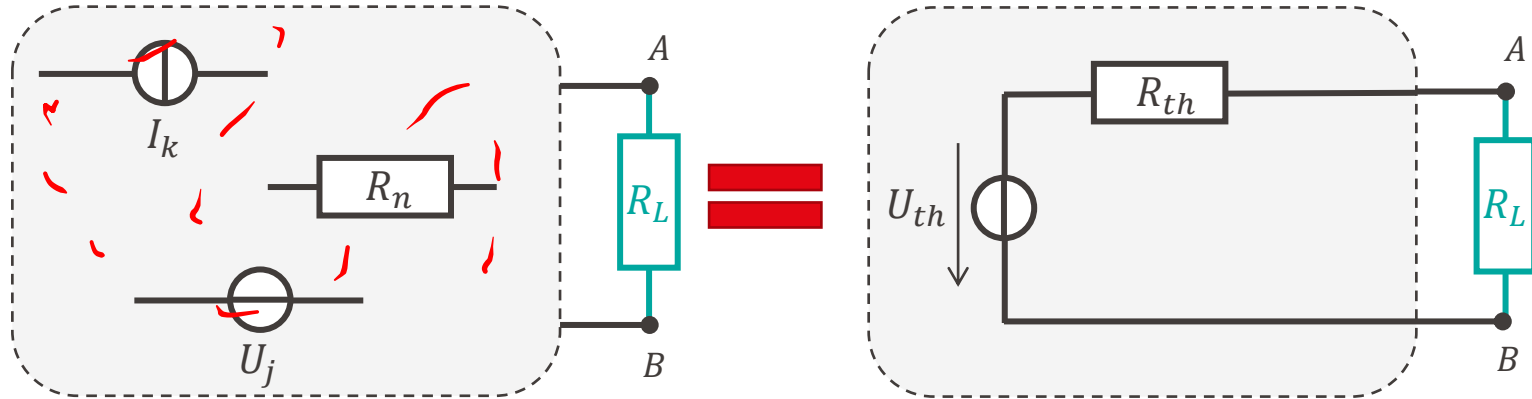
- Le principe de superposition permet de séparer un problème à N sources en N problèmes à une source
 - Particulièrement utile pour résoudre les systèmes à plusieurs sources
- Une source de tension éteinte est un « court-circuit »
- Une source de courant éteinte est un « circuit ouvert »



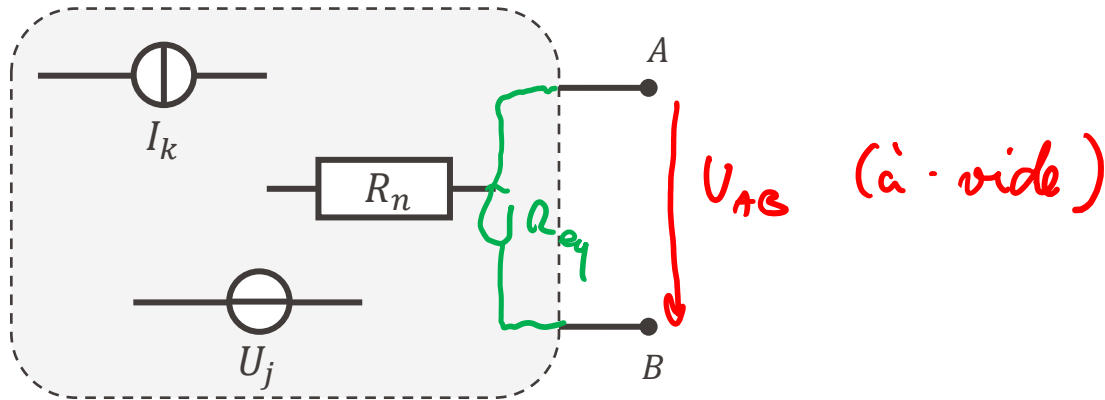
Théorème de Thévenin / théorème de Norton



- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série



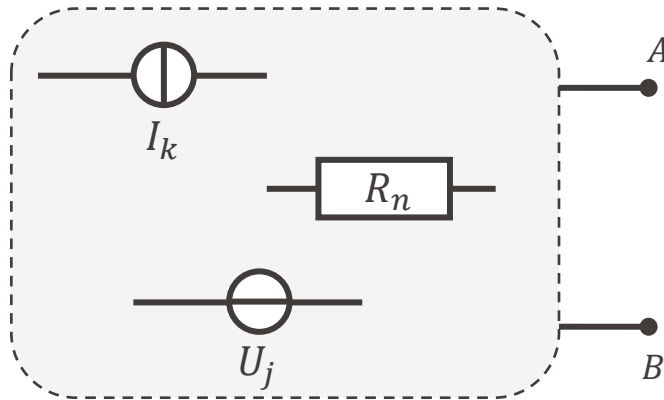
- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série



systeme complexe = 2 grandeurs

Théorème de Thévenin

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série

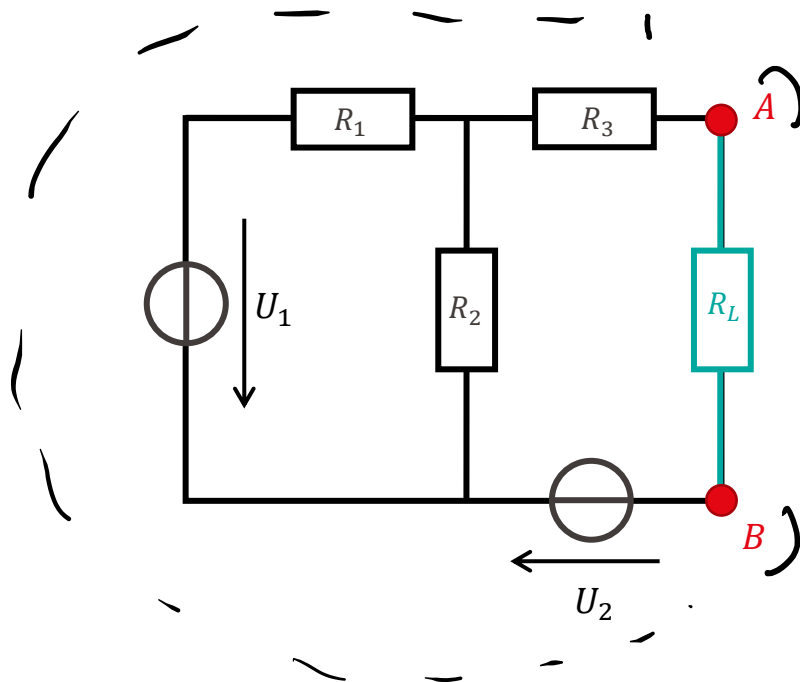


$$\begin{aligned} U_{th} &= U_0 \\ R_{th} &= R_{AB} \end{aligned}$$

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série

- **Procédure:**
 - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
 - Calculer ou mesurer la **tension à vide** (tensions entre A et B **sans charge**)
 - Calculer ou mesurer la résistance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

Théorème de Thévenin - Exemple



$$U_1 = 10 \text{ V}$$

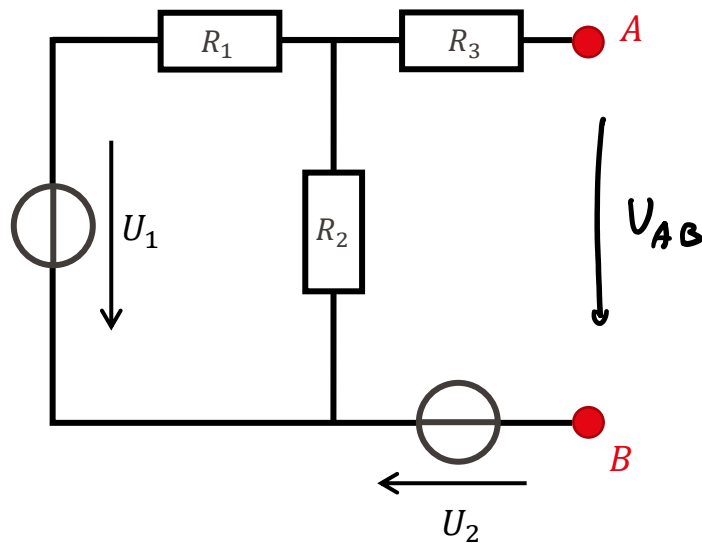
$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Théorème de Thévenin - Exemple



$$U_1 = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

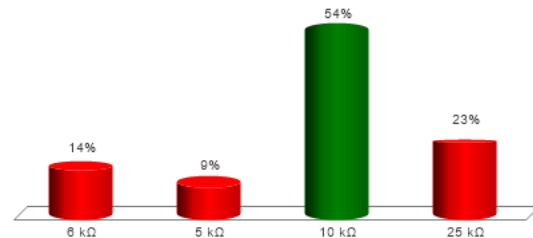
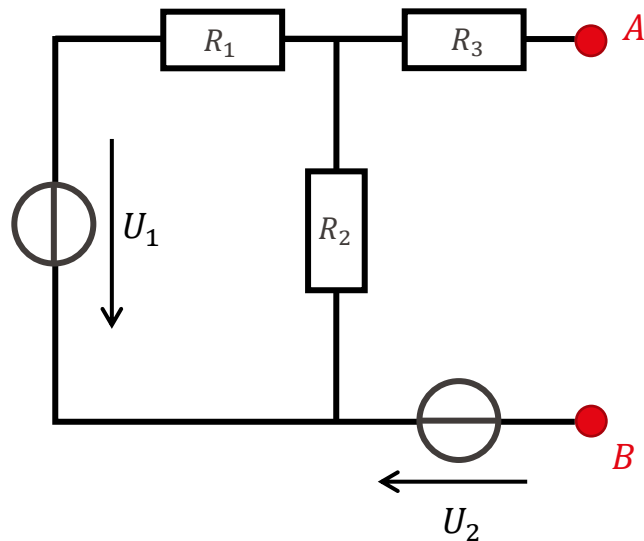
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$



Théorème de Thévenin – Exemple

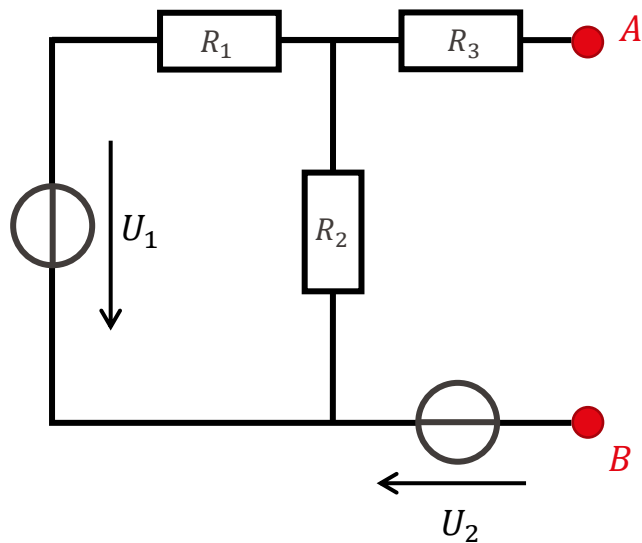
Que vaut la résistance de Thévenin?



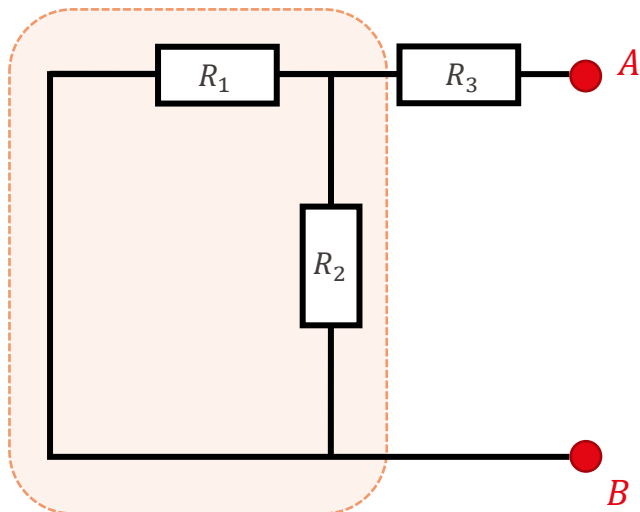
- A. 6 kΩ
- B. 5 kΩ
- ✓ C. 10 kΩ
- D. 25 kΩ

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma



Agencement en parallèle

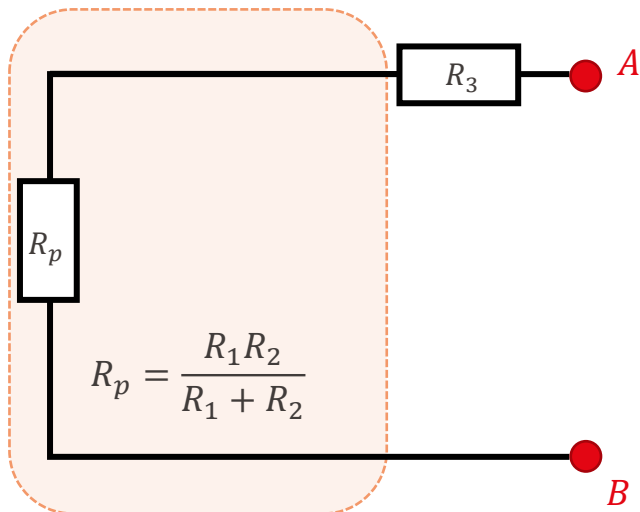


$$\begin{array}{l} R_1 = 10 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 10 \text{ k}\Omega \\ R_3 = 5 \text{ k}\Omega \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}} \right\}$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en parallèle



$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

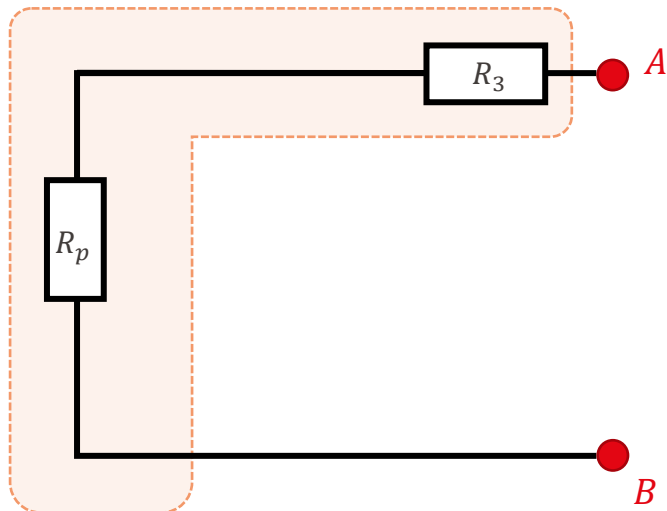
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

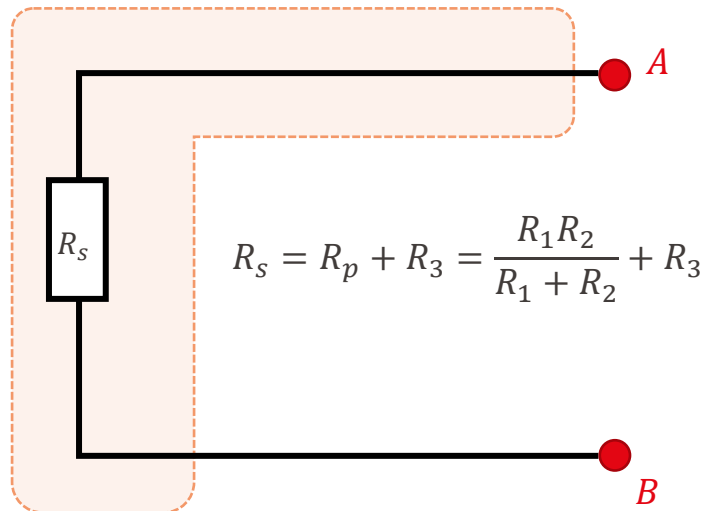
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_s = R_p + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

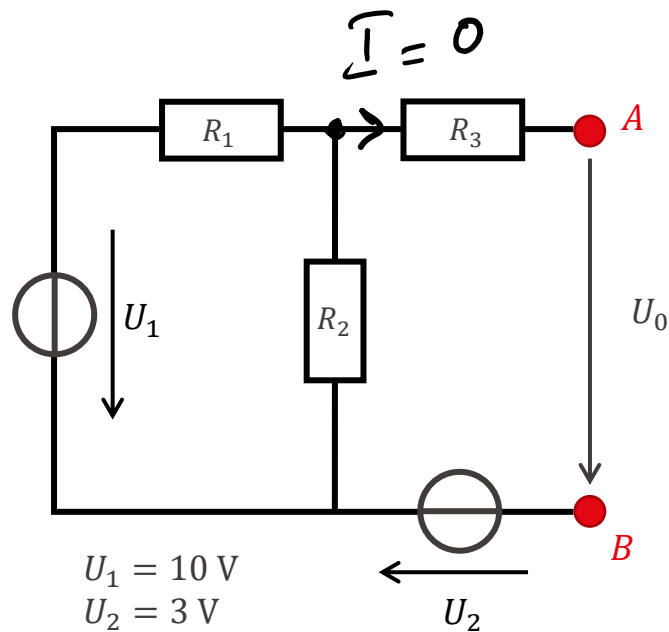
- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

La résistance vue des bornes A et B est R_s

On a donc la résistance interne du circuit équivalent de Thévenin:

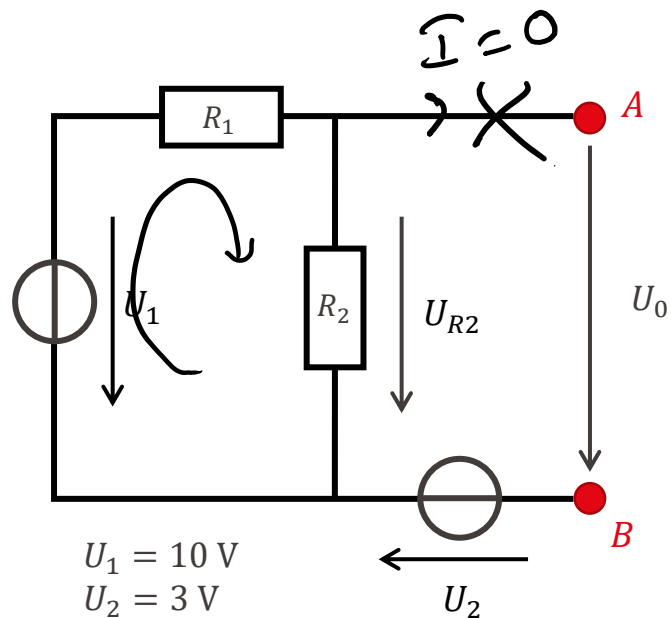
$$R_{th} = R_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

Donc $R_{th} = 10 \text{ k}\Omega$



Calcul de la tension à vide:

- Pas de courant dans les branches sortantes
- On simplifie le schéma



$$\begin{aligned}
 R_1 &= 10\text{ k}\Omega \\
 R_2 &= 10\text{ k}\Omega \\
 R_3 &= 5\text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

Calcul de la tension à vide:

- Pas de courant dans les branches sortantes
- On simplifie le schéma

Loi des mailles à droite:

$$U_{R2} = U_0 + U_2$$

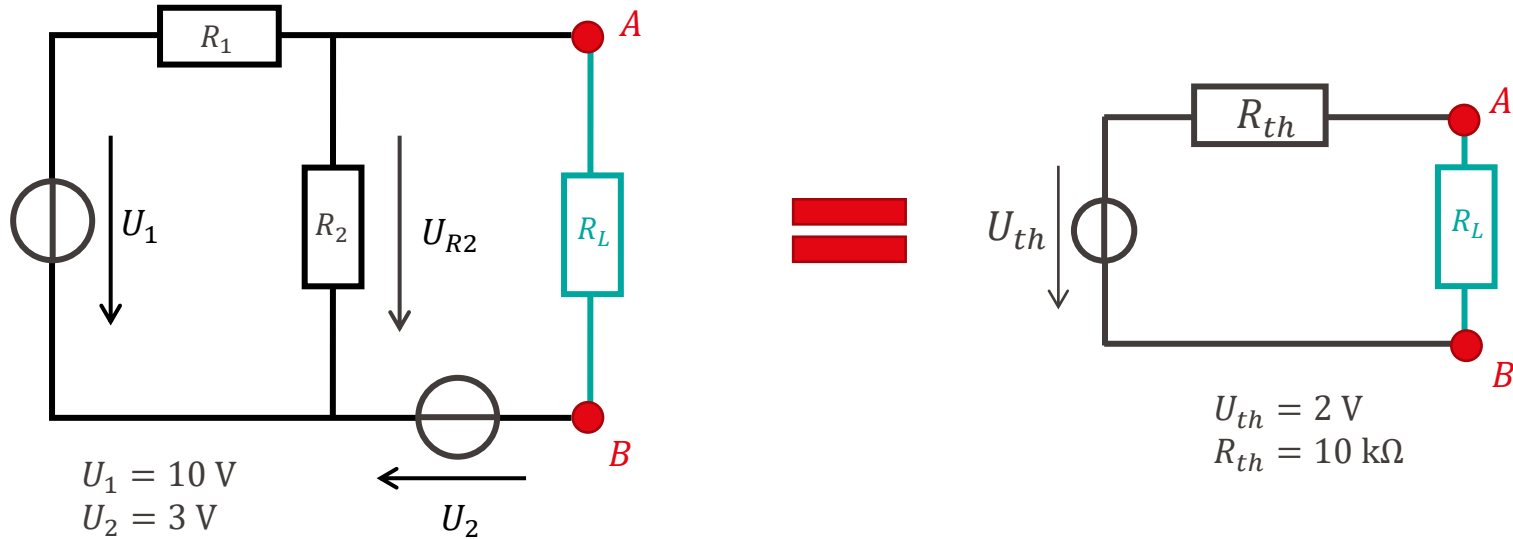
Diviseur de tension sur R_2 :

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$$

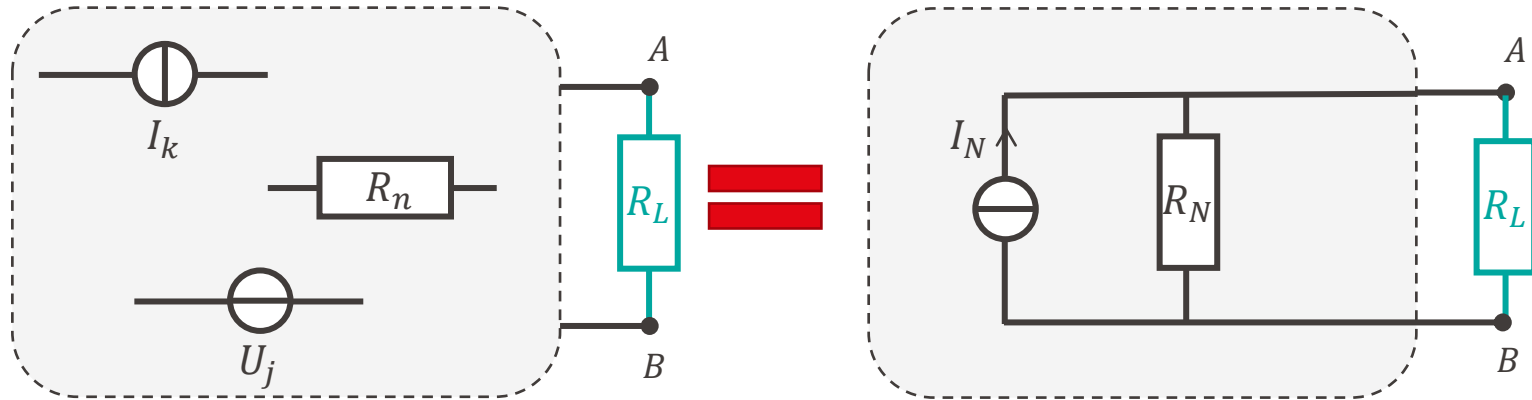
On en déduit:

$$U_0 = U_{R2} - U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 - U_2$$

Donc: $U_0 = 2\text{ V}$



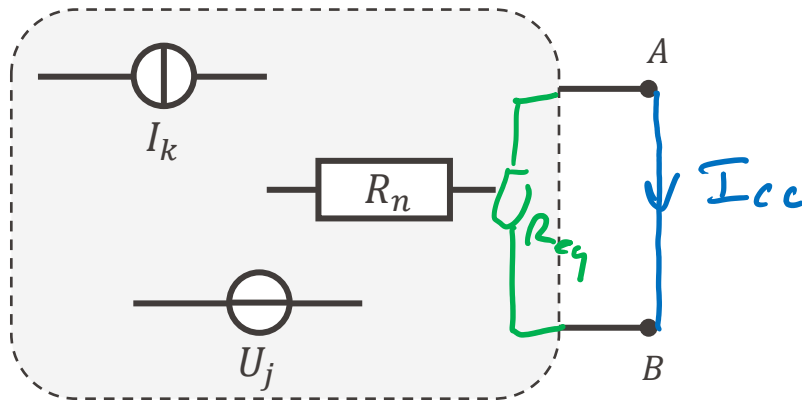
- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle



Edward Lawry Norton
1898-1983
Ingénieur américain



- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle

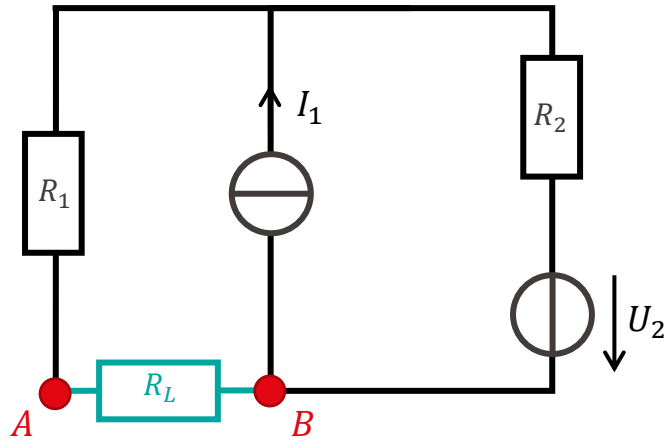


$$\begin{aligned} I_N &= I_{cc} \\ R_N &= R_{AB} \end{aligned}$$

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle

- **Procédure:**
 - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
 - Calculer ou mesurer le **courant de court-circuit** (courant dans la branche AB pour une **charge nulle**)
 - Calculer ou mesurer la résistance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

Théorème de Norton – Exemple



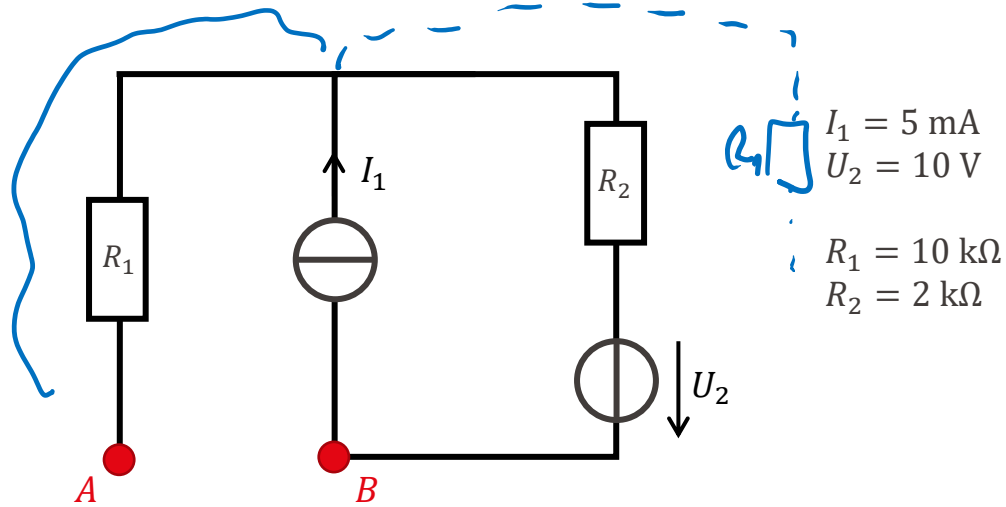
$$I_1 = 5 \text{ mA}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

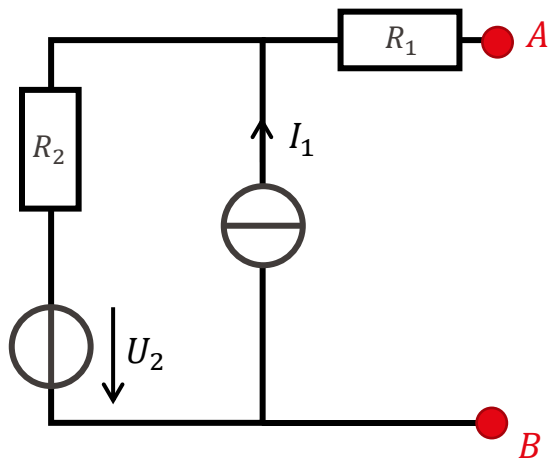
$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

Théorème de Norton – Exemple



Théorème de Norton – Exemple



$$I_1 = 5 \text{ mA}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

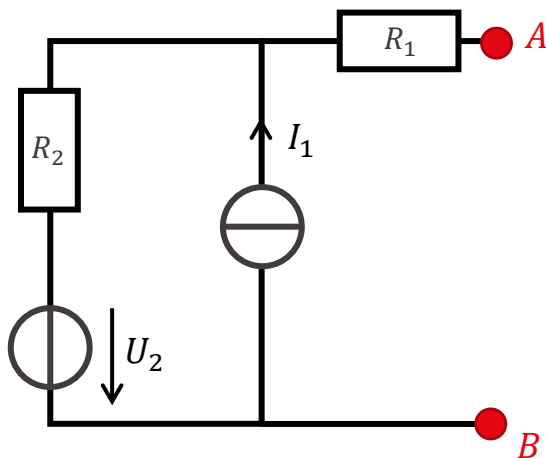
$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$



Théorème de Norton – Exemple

Que vaut la résistance de Norton?

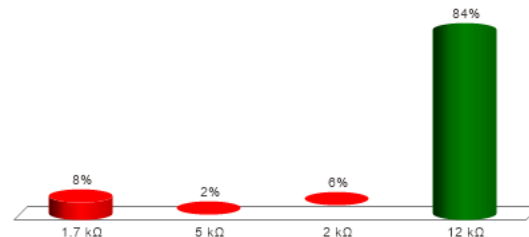


$$I_1 = 5 \text{ mA}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

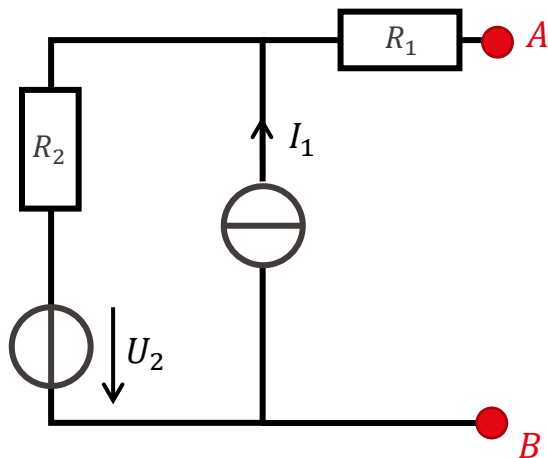
$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$



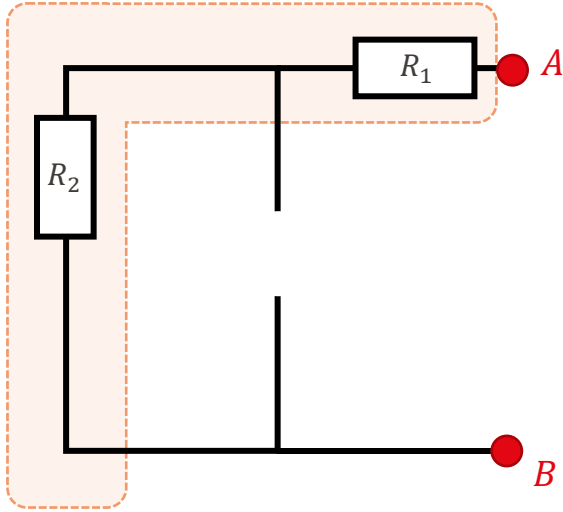
- A. 1.7 kΩ
- B. 5 kΩ
- C. 2 kΩ
- ✓ D. 12 kΩ

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma



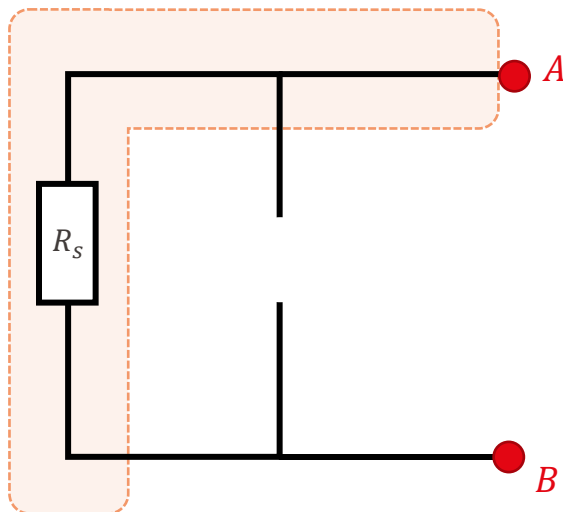
Agencement en série



Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_S = R_1 + R_2$$

Calcul de la résistance interne:

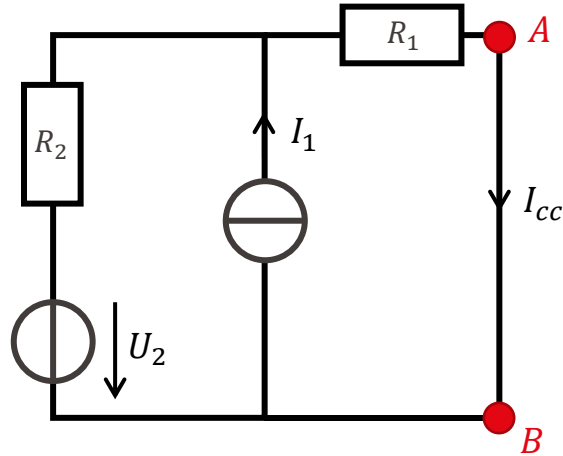
- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

La résistance vue des bornes A et B est R_S

On a donc la résistance interne du circuit équivalent de Norton:

$$R_N = R_S = R_1 + R_2$$

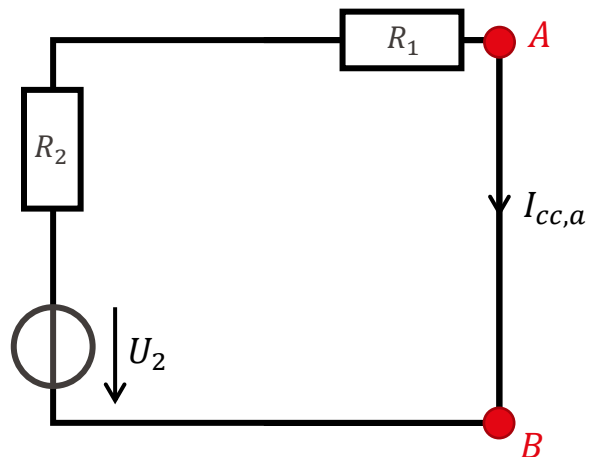
Donc $R_N = 12 \text{ k}\Omega$



Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**



Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

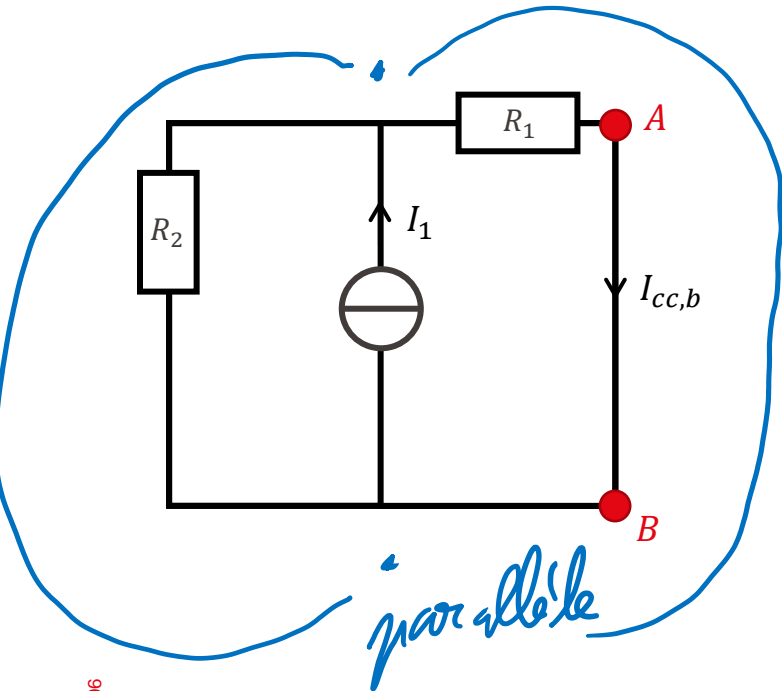
a. On éteint la source de courant

R_1 et R_2 sont en série. On en déduit:

$$U_2 = (R_1 + R_2)I_{cc}$$

Donc:

$$I_{cc,a} = \frac{U_2}{R_1 + R_2}$$



Calcul du courant de court-circuit:

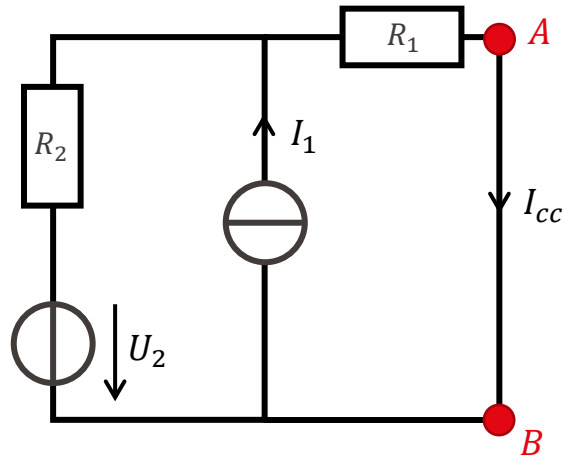
- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

b. On éteint la source de courant

On applique le diviseur de courant sur R_1 :

$$I_{cc,b} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1$$



$$I_1 = 5 \text{ mA}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

c. On additionne les contributions:

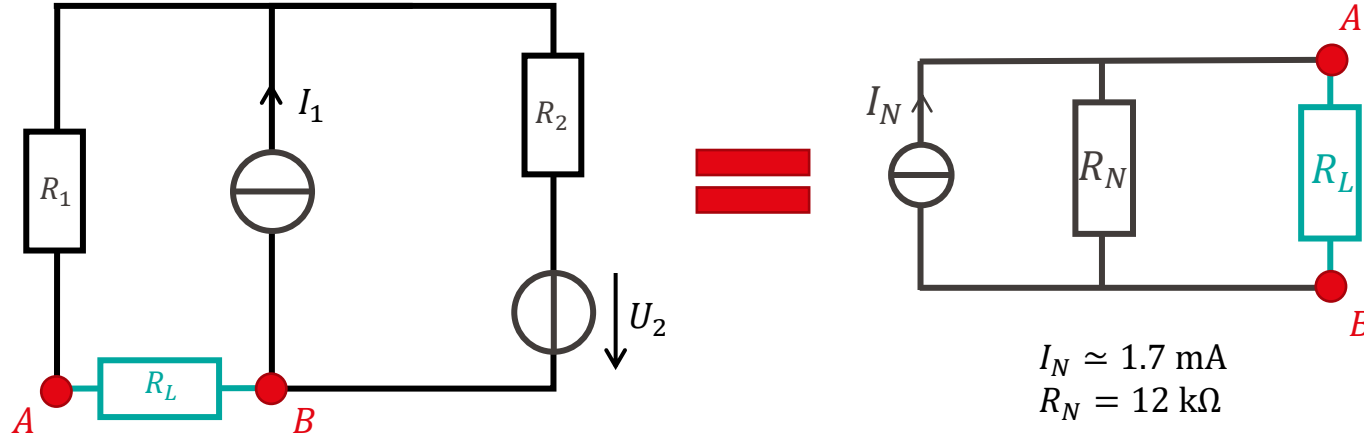
$$I_{cc} = I_{cc,a} + I_{cc,b} = \frac{U_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1$$

On obtient donc finalement:

$$I_{cc} = \frac{U_2 + R_2 I_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_{cc} \simeq 1.7 \text{ mA}$$

Théorème de Norton – Exemple

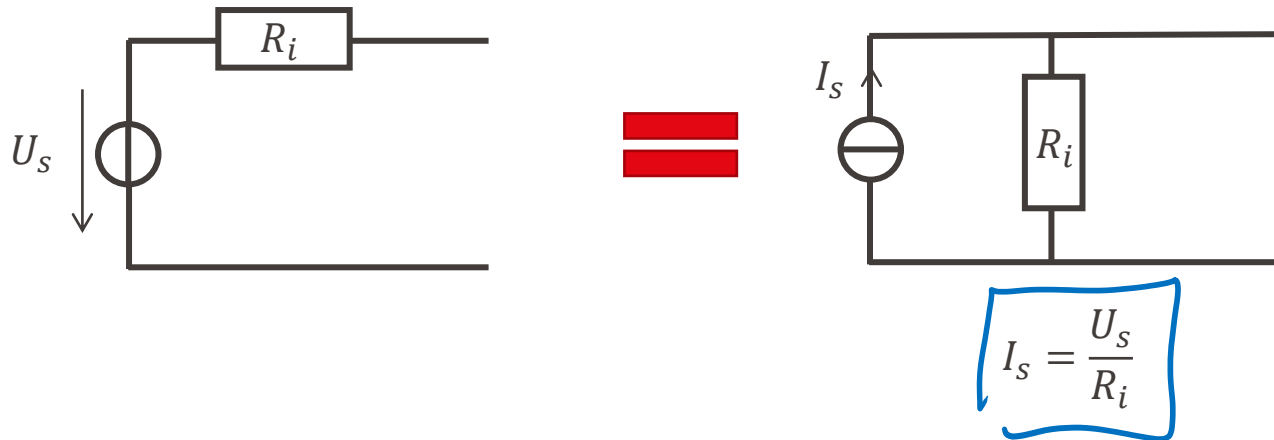


$$I_1 = 5 \text{ mA}$$
$$U_2 = 10 \text{ V}$$

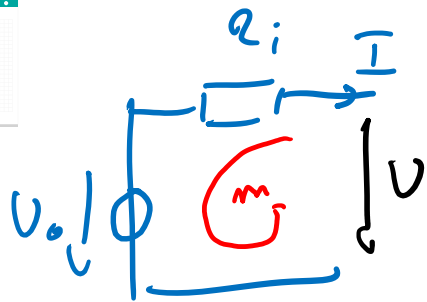
$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$
$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$I_N \approx 1.7 \text{ mA}$$
$$R_N = 12 \text{ k}\Omega$$

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
 - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche

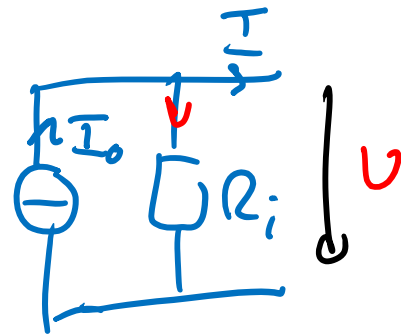
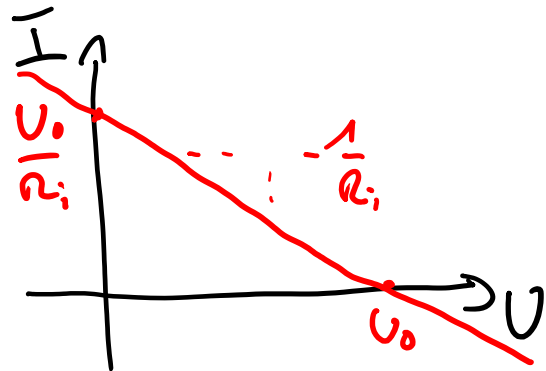


Equivalence de sources

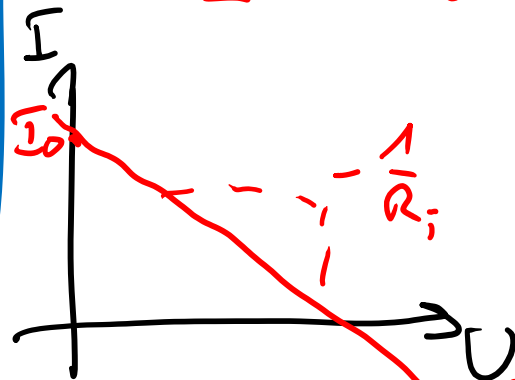


$$U = -R_i I + U_0$$

$$I = \frac{U_0 - U}{R_i}$$



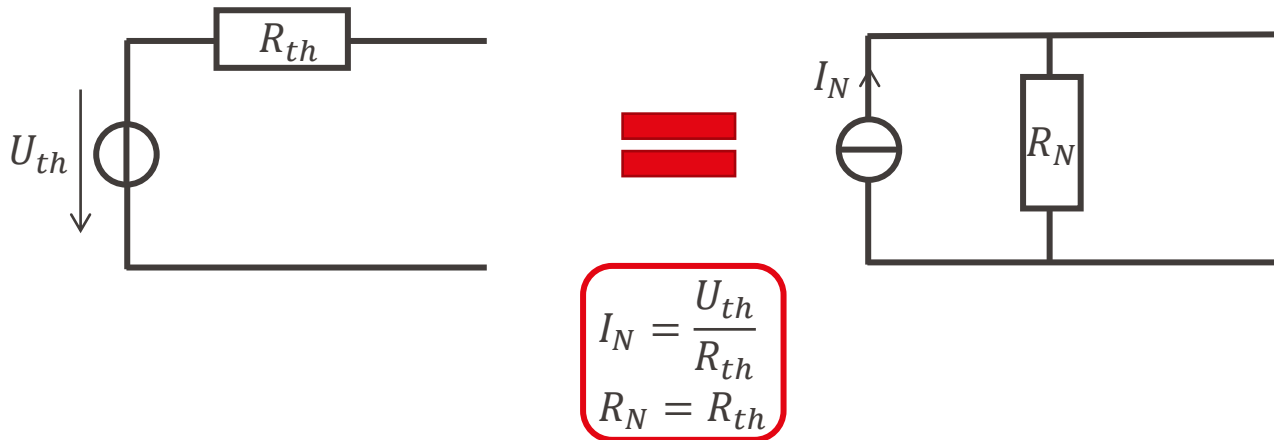
$$I = I_0 - \frac{1}{R_i} U$$



$$I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

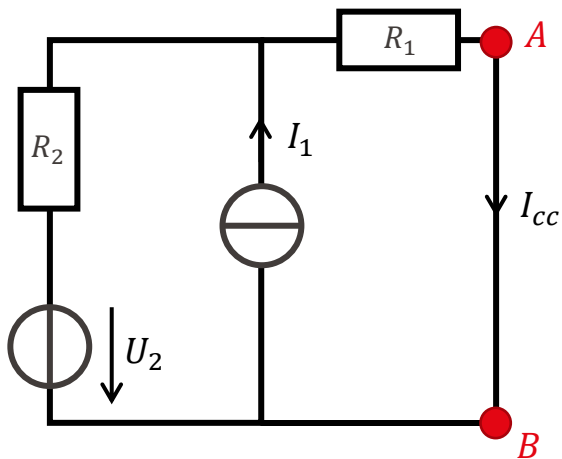
$$\Rightarrow U_0 = R_i I_0$$

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
 - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche
- Conséquence: les circuits équivalents de Thévenin et de Norton sont interchangeables!



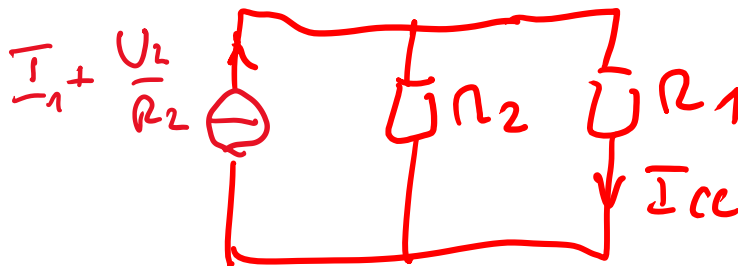
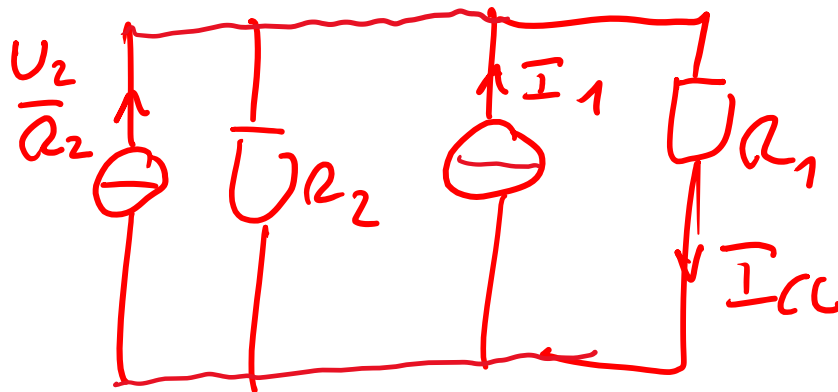
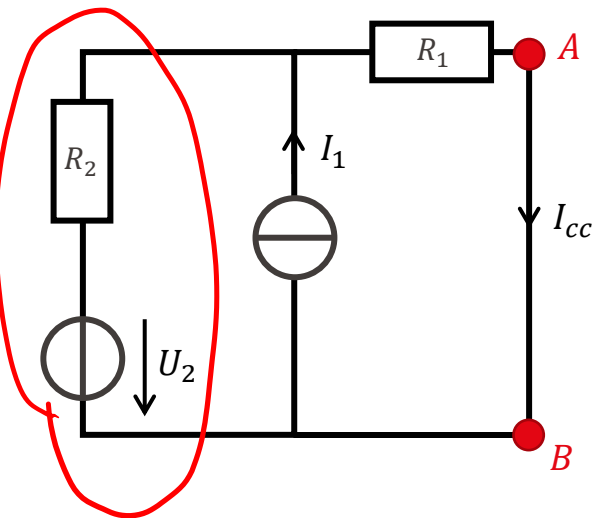


Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:

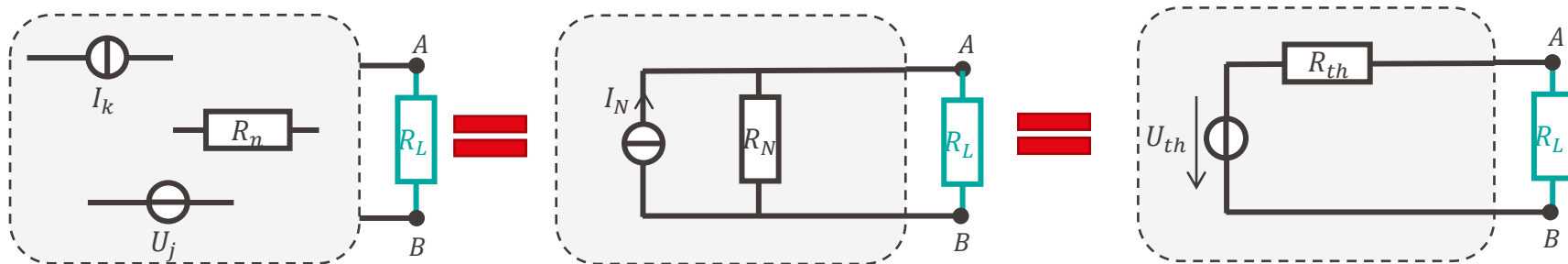




Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:



- Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de transformer des circuits linéaires complexes en sources équivalententes
 - Le théorème de Thévenin donne une source de tension en série avec une résistance
 - Le théorème de Norton donne une source de courant en parallèle avec une résistance
- Les deux modèles sont interchangeables (équivalence entre les sources de courant et de tension)



Pour aller plus loin



- Pour un circuit avec beaucoup de mailles, il existe une méthode matricielle
- En définissant des courants de mailles fictifs, on peut mettre le problème sous la forme d'une équation matricielle
- Il suffit alors d'inverser la matrice pour trouver les courants inconnus

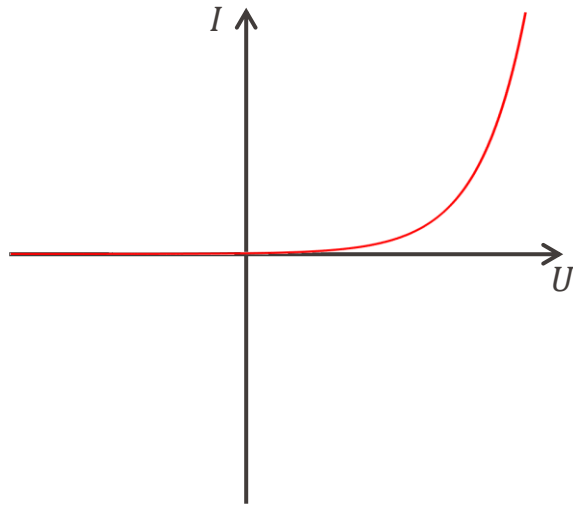
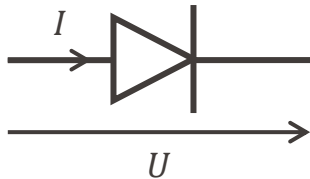


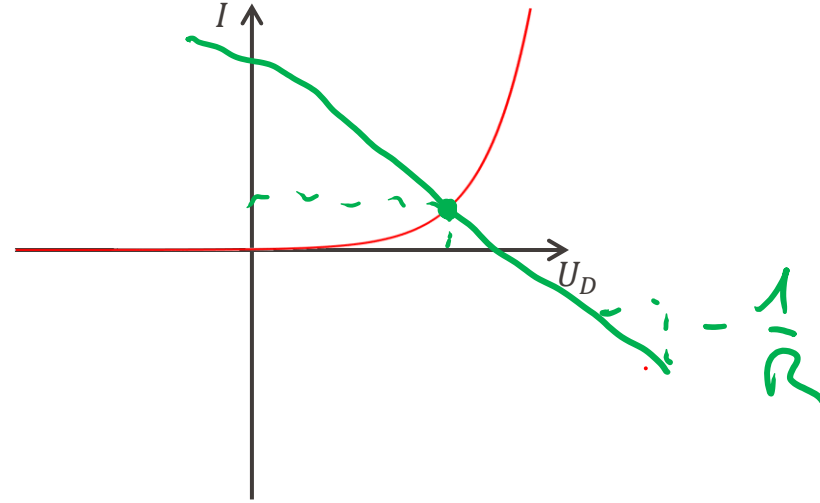
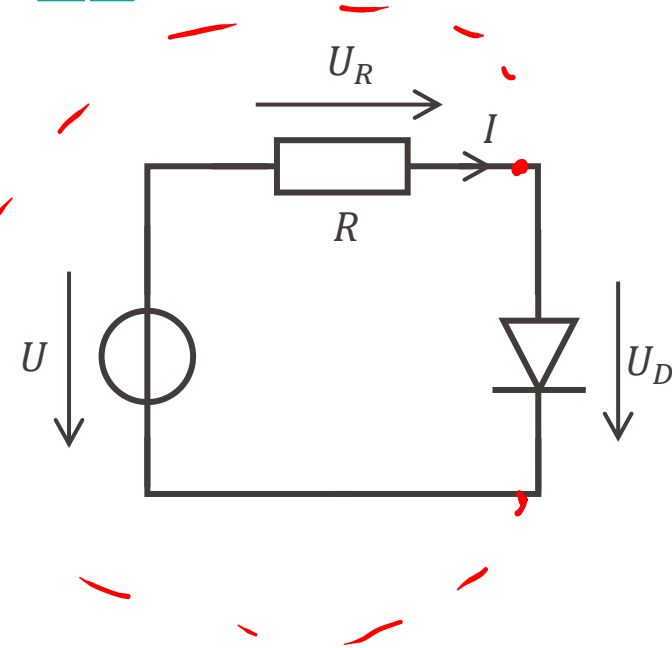
- Il existe des éléments de circuits non-linéaires
 - Ca veut dire quoi « non-linéaire »?
 - Courant et tension ne sont pas liés par une relation linéaire au sens mathématique

- C'est la cas de diodes
 - Les diodes ne laissent passer le courant que dans un sens
 - Le courant et la tension sont liés par une loi exponentielle

- Dans ce cas, il est difficile d'appliquer les méthodes de résolutions analytiques
 - On peut utiliser des méthodes graphiques

Pour aller plus loin





R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris

