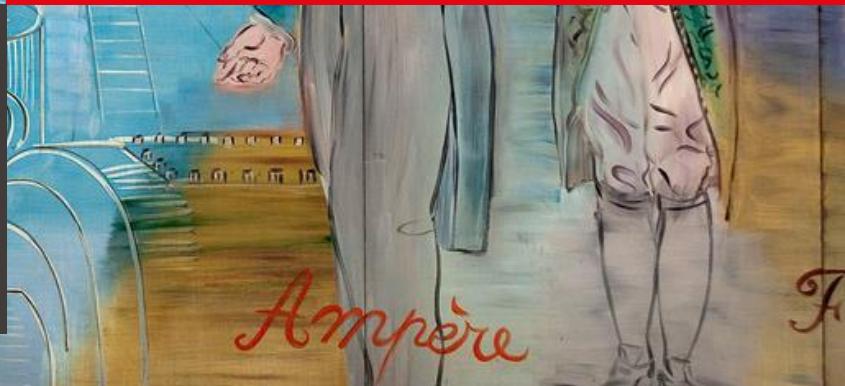




R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

EE 106 – Sciences et  
technologies de  
l'électricité  
Automne 2024

# Cours 4: Méthodes de résolution, théorèmes de Thévenin et de Norton



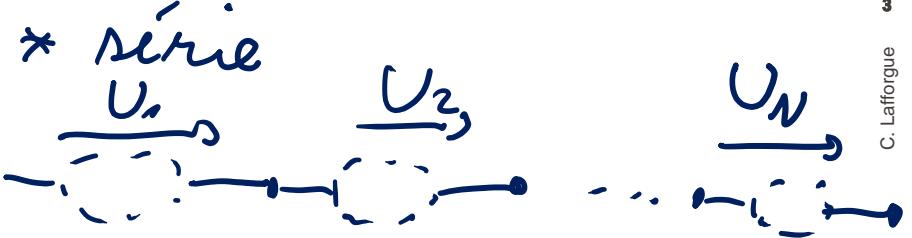
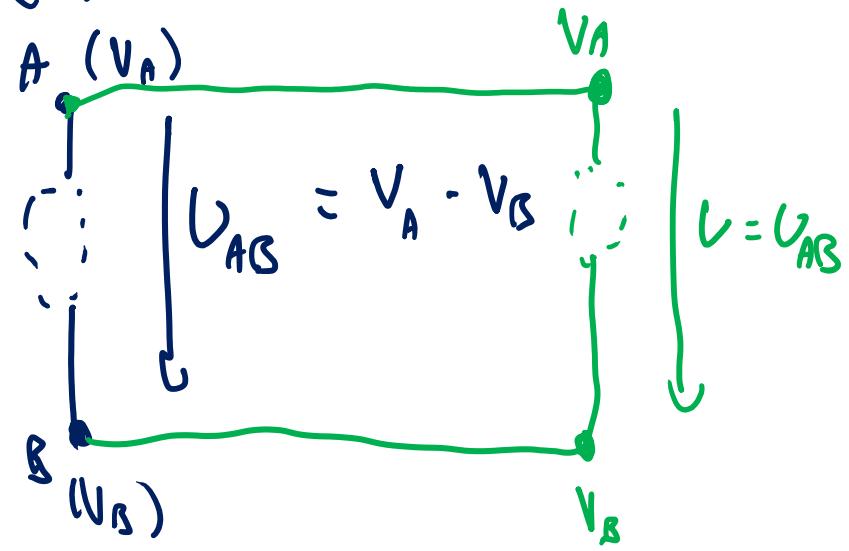
# Rappels



# - Rappels - Tension

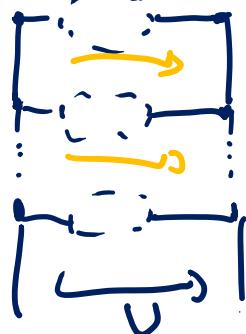
$U \rightsquigarrow \mathcal{E}_{ES} \rightsquigarrow F_{ES}$

(V)



$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_{n=1}^N U_n$$

\* parallèle



# - Rappels - Courant



$$I = \frac{dq}{dt}$$

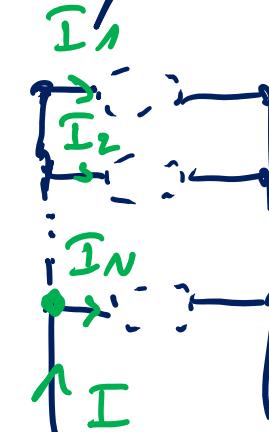
charge qui a traversé pendant " $dt$ "

$$I \approx N_d$$

→ série



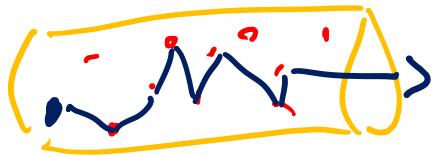
→ parallèle



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

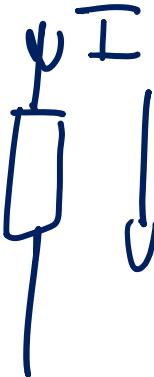
$$I = \sum_{n=1}^N I_n$$

# - Rappels - Résistance

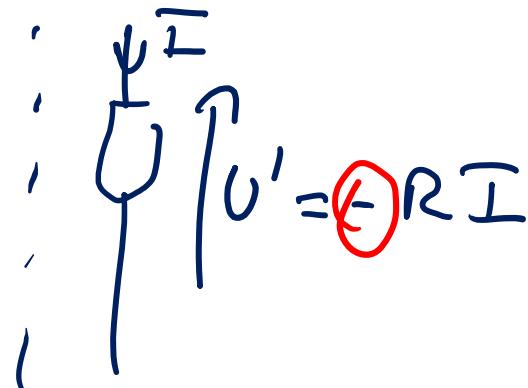


$$V_d \neq +\infty$$

$$V = RI \quad (\text{Loi d'Ohm})$$



$$V = RI$$



$$V' = -RI$$

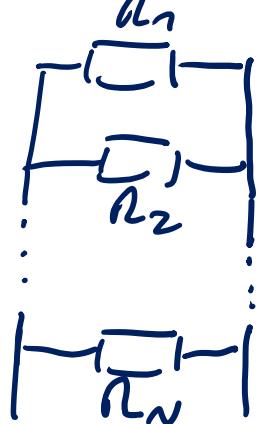
# - Rappels - Résistance

\* série



$$R_s = \sum_{n=1}^N R_n$$

\* parallèle



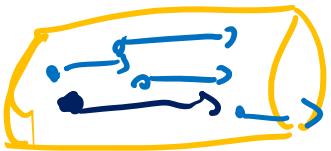
$$R_p = \frac{U}{I}$$

$$G_p = \sum_{n=1}^N G_n$$

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}$$



$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

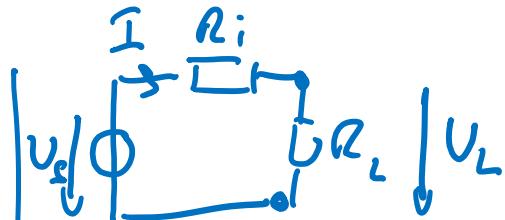


$$W_1 = q U$$

$$dW_{\text{tot}} = dq U$$

$$P = \frac{dW_{\text{tot}}}{dt} = \frac{dq}{dt} U$$

$$P = U I$$

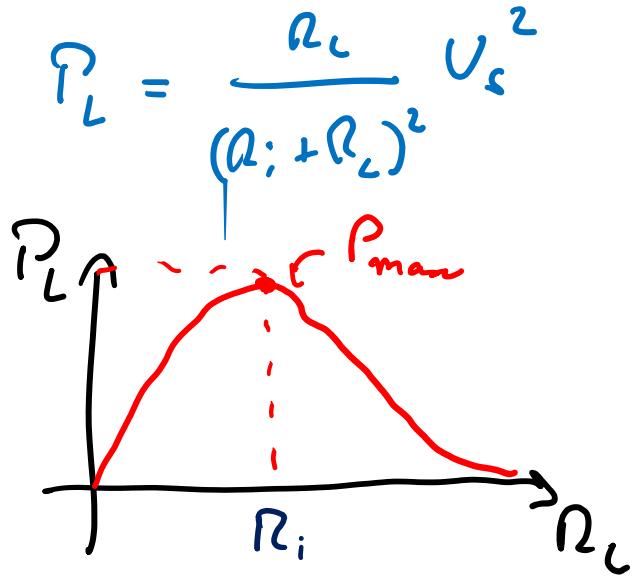


$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_s$$

$$I = \frac{U_L}{R_L} \Rightarrow P_L = \frac{U_L^2}{R_L}$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} \cdot U_s^2$$

# - Rappels - Puissance



$$\eta = \frac{1}{2} = \frac{P_L}{P_s}$$

Il y a une petite erreur  
dans le cours oral,  
corrigée ici

$$P_L = P_{\max} \Leftrightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

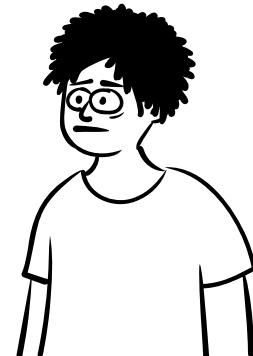
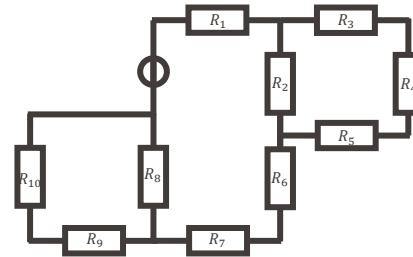
$$\Leftrightarrow \frac{1 \times (R_i + R_L)^2 - R_L \times 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} V_s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(R_i^2 - R_L^2)}{(R_i + R_L)^4} V_s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_i = R_L$$

↳ adaptation de puissance

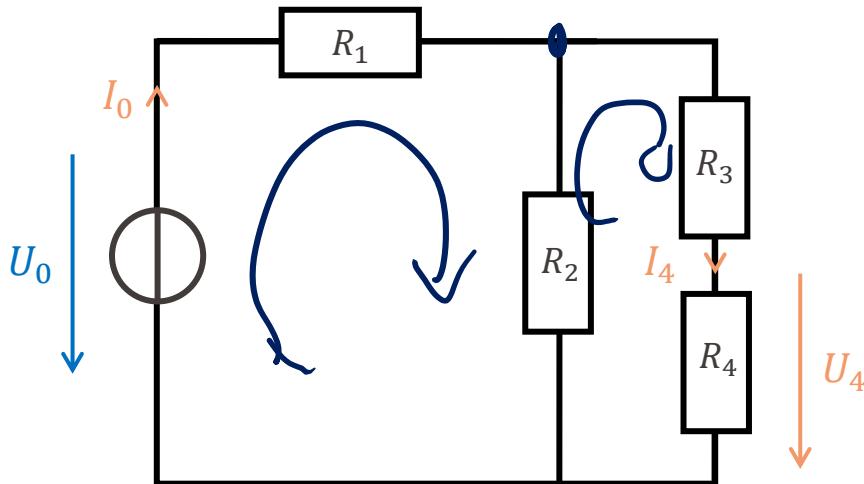
# Simplification de schémas électriques



- Etape 1: Dessiner un schéma électrique **clair, précis et lisible**
- Etape 2: Identifier les inconnues à déterminer et les données
- Etape 3: Ajouter les grandeurs électriques et les flécher
- Etape 4: Procéder à des simplifications successives autant que possible
- Etape 5: Mise en équation

# Simplification du schéma – Exemple 1

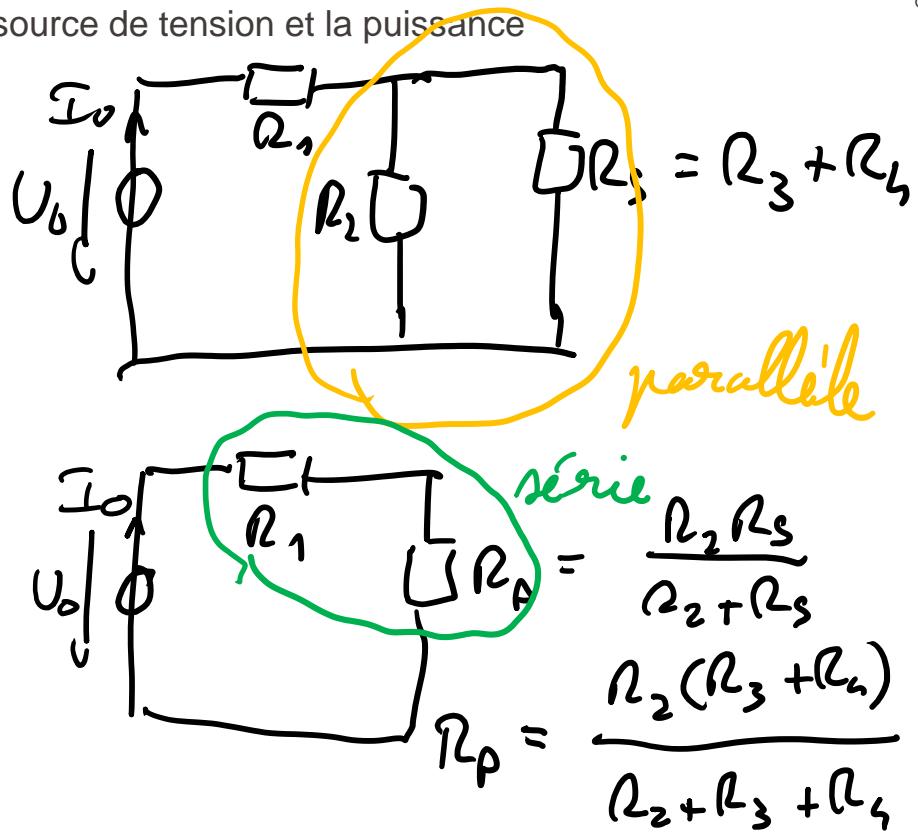
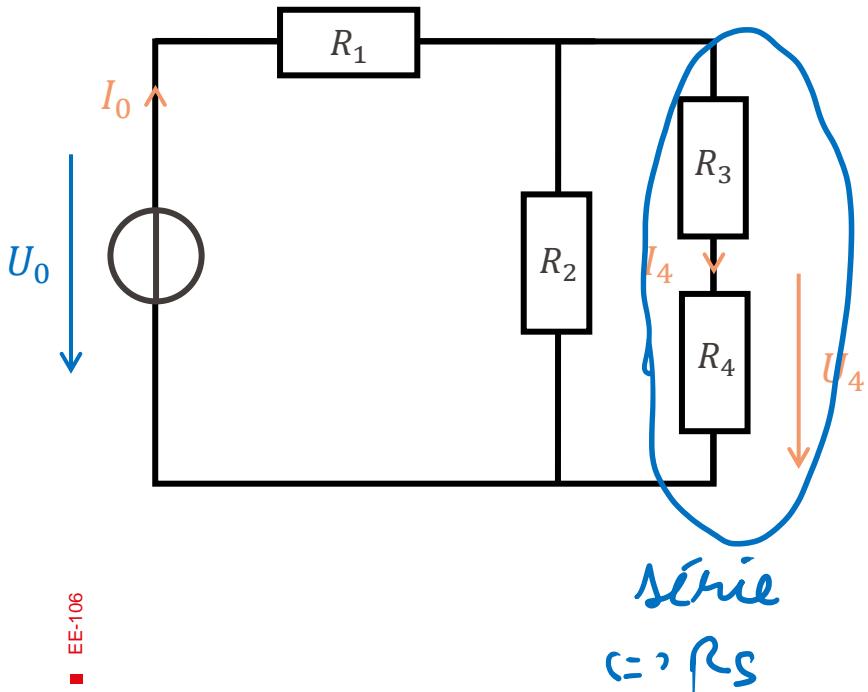
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$





# Simplification du schéma – Exemple 1

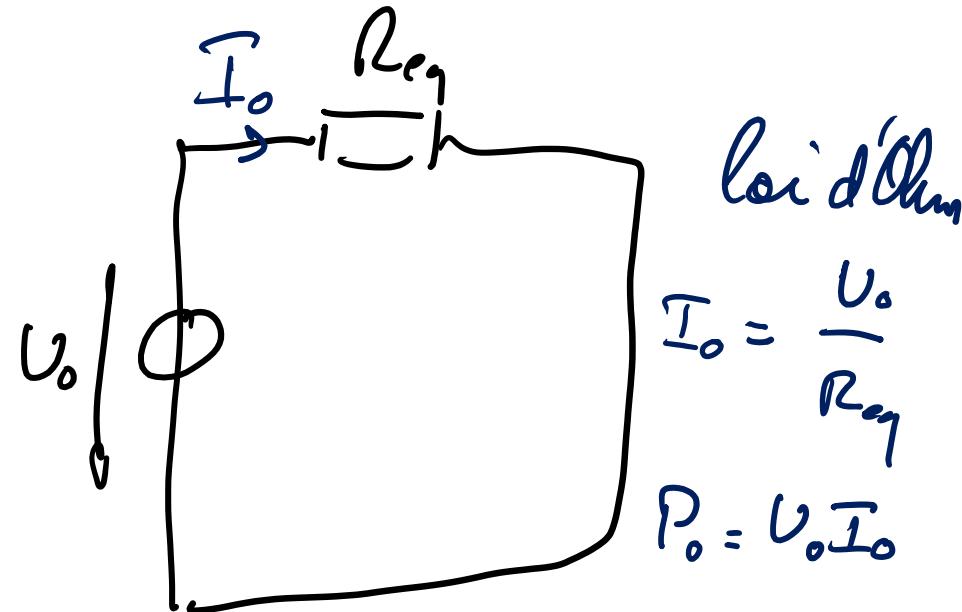
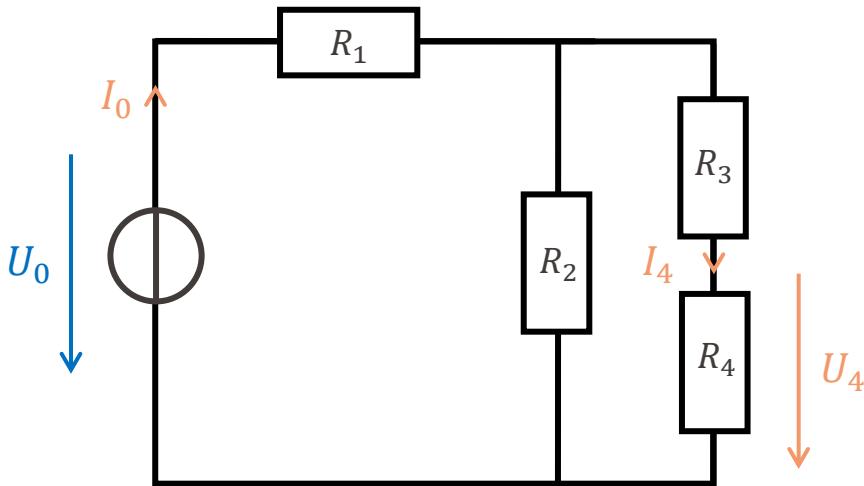
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$





# Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$



loi d'Ohm

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{eq}}$$

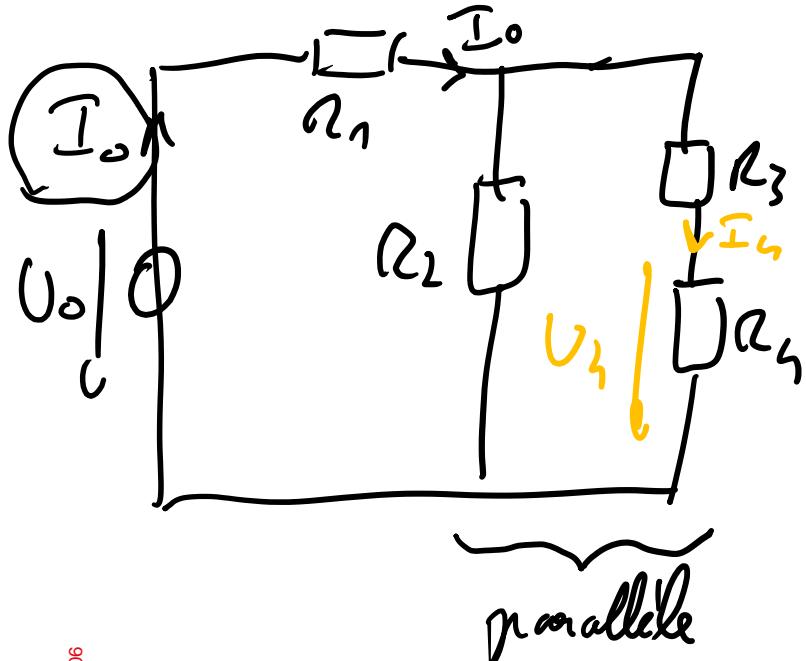
$$P_0 = U_0 I_0$$

$$R_{eq} = R_1 + R_p = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$



# Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$



diviseur de courant

$$I_4 = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} I_0$$

loi d'Ohm :

$$U_4 = R_4 I_4$$



# Simplification du schéma – Exemple 1

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$



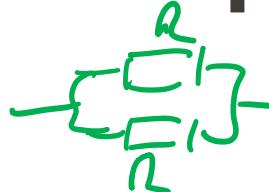
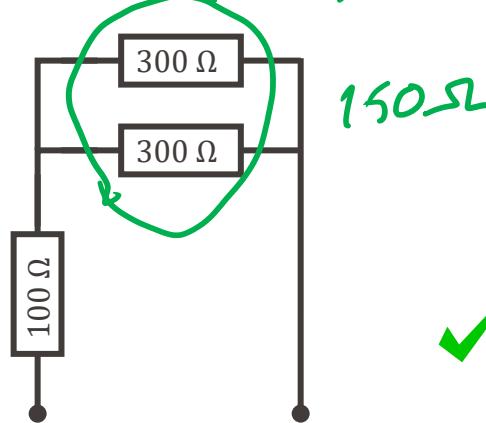
# Points clés

- Le schéma électrique est votre outil principal: il faut le soigner!
- Bien repérer les combinaisons série/parallèle pour simplifier le schéma
- Réagencer le schéma si nécessaire



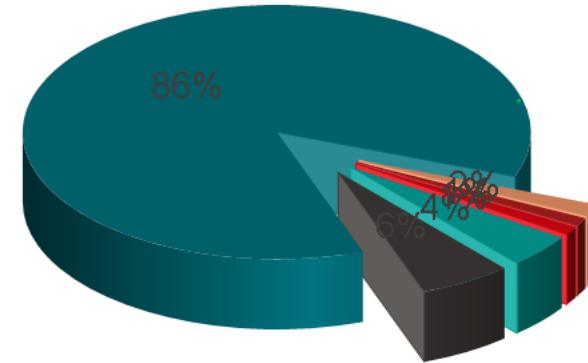
# Que vaut la resistance équivalente après simplification?

parallèle



$$R_p = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

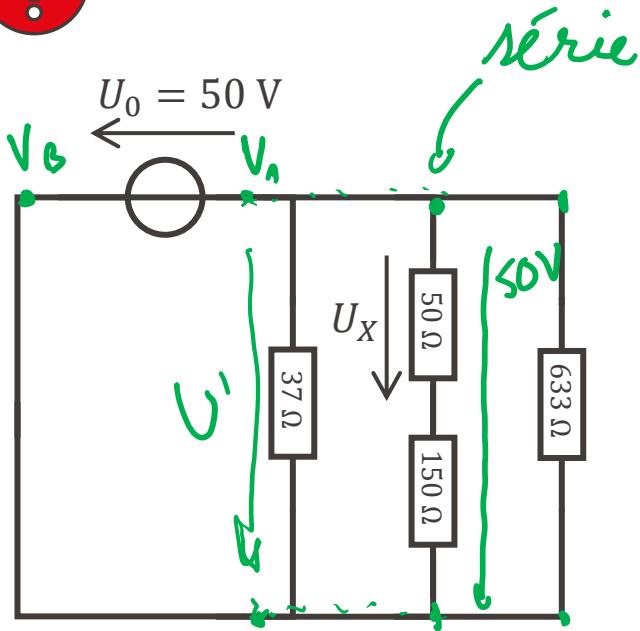
- A. 700 Ω  
 B. 171.43 Ω  
 C. 85.7 Ω  
 D. 250 Ω  
 E. 60 Ω  
 F. 375 Ω



- |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |
|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|
| ■ | A. | ■ | C. | ■ | D. | ■ | E. | ■ | F. |
| ■ | B. |   |    |   |    |   |    |   |    |



# Que vaut la tension $U_X$ ?

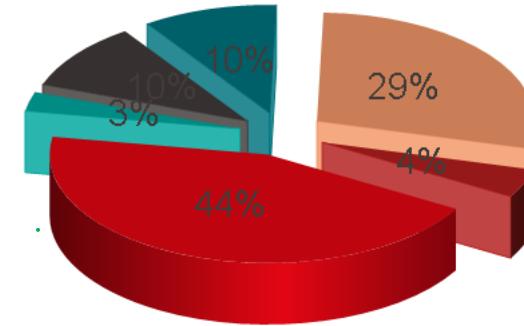


$$U' = V_A - V_B = U_0$$

div. de tension

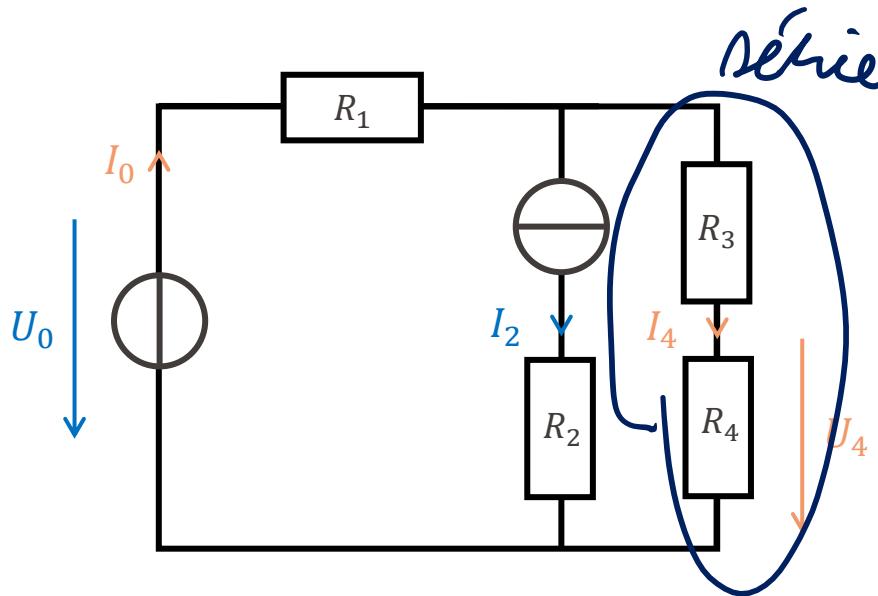
$$U_X = \frac{50}{50+150} 50\text{V} = 12,5 \text{ V}$$

- ✓ A.  $U_X = 12.5 \text{ V}$   
 B.  $U_X = 21.3 \text{ V}$   
 C.  $U_X = 37.5 \text{ V}$   
 D.  $U_X = -37.5 \text{ V}$   
 E.  $U_X = -50 \text{ V}$   
 F.  $U_X = 16.7 \text{ V}$



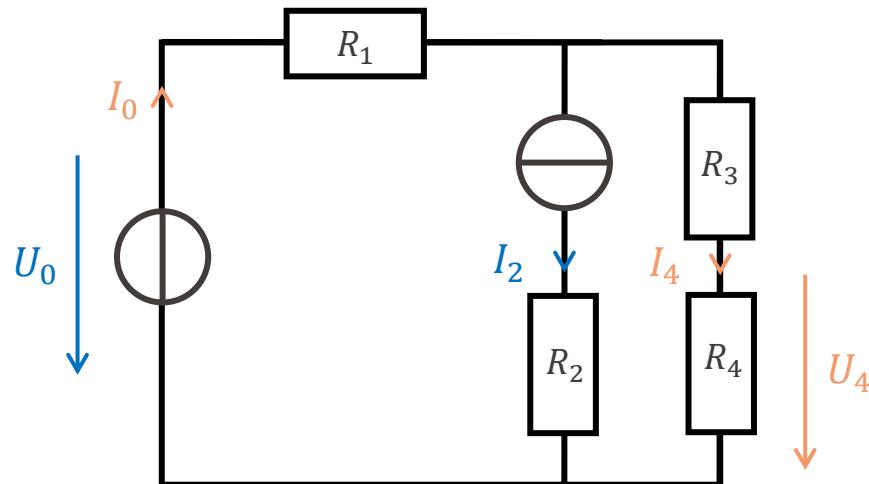
# Simplification du schéma – Exemple 2

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$



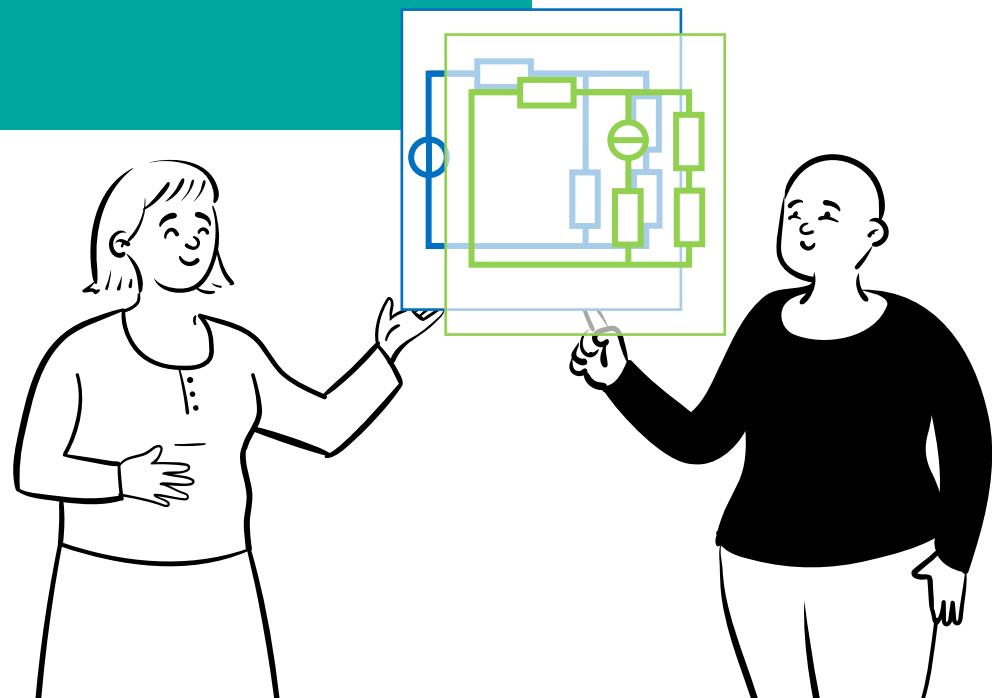
# Simplification du schéma – Exemple 2

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$



- Pas évident à simplifier...
- Il est toujours possible d'appliquer les lois de Kirchhoff et d'Ohm (mais ça risque d'être très long!)
- Comment faire autrement?

# Principe de superposition

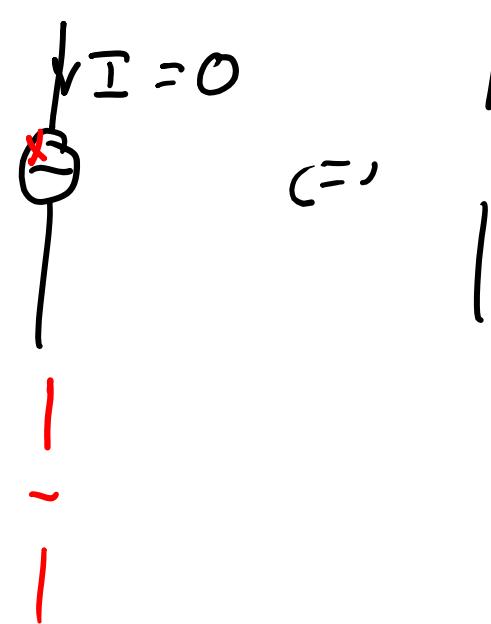
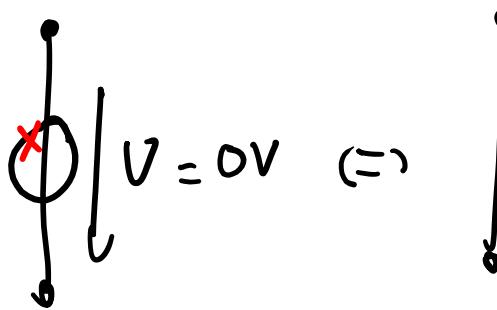


- En présence de plusieurs sources, on ne peut pas toujours simplifier le circuit
- On peut séparer le problème en plusieurs problèmes plus simples
  - On ne traite qu'une seule source à la fois, en éteignant les autres sources
  - On répète cela pour chaque source
  - On additionne les résultats

**Principe de superposition: le résultat total est la somme des solutions correspondant à chaque source individuelle.**



- Ca veut dire quoi « éteindre une source » dans un schéma électrique?

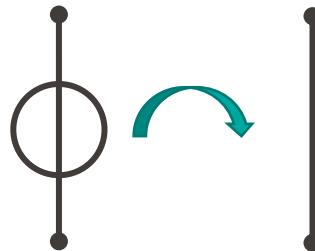




# Principe de superposition

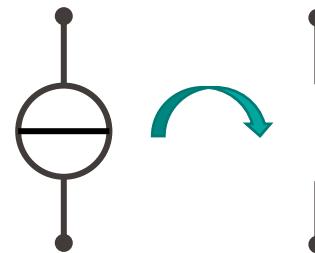
- Ca veut dire quoi « éteindre une source » dans un schéma électrique?

Source de tension



La source devient un « court-circuit »

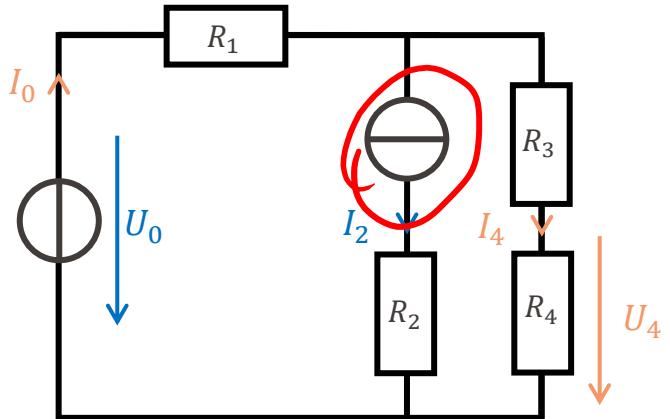
Source de courant



La source devient un « circuit ouvert »

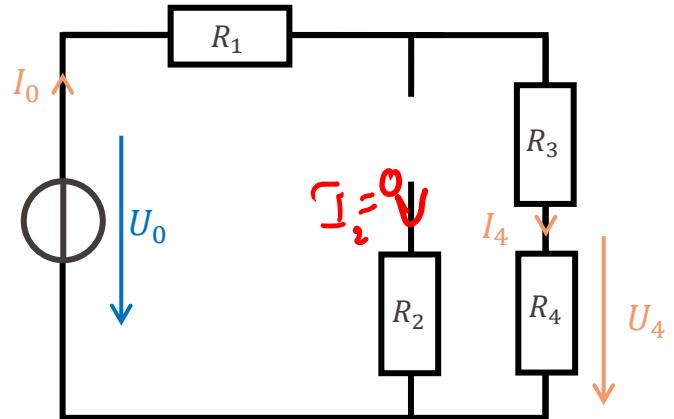
# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$



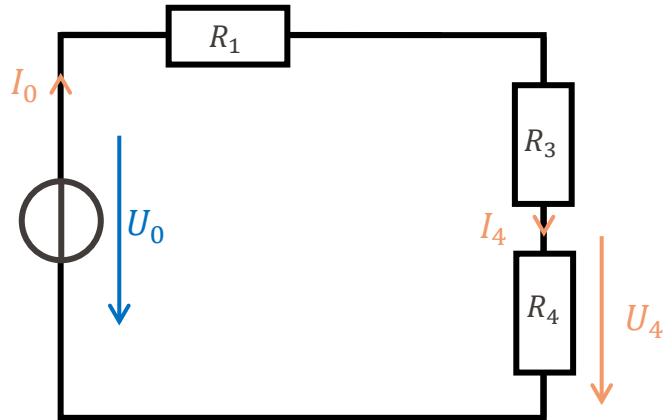
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

### 1. On éteint la source de courant



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

### 1. On éteint la source de courant

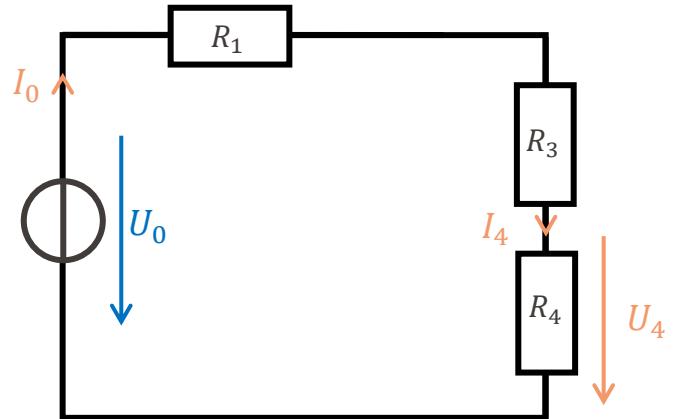




# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

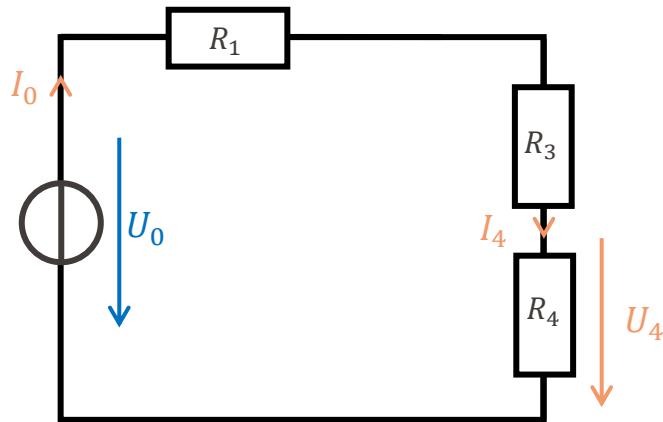
1. On éteint la source de courant
2. **On détermine les grandeurs souhaitées**



# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées



Diviseur de tension sur  $R_4$ :

$$U_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_3 + R_4} U_0$$

Loi des nœuds:

$$I_4 = I_0$$

Loi d'Ohm:

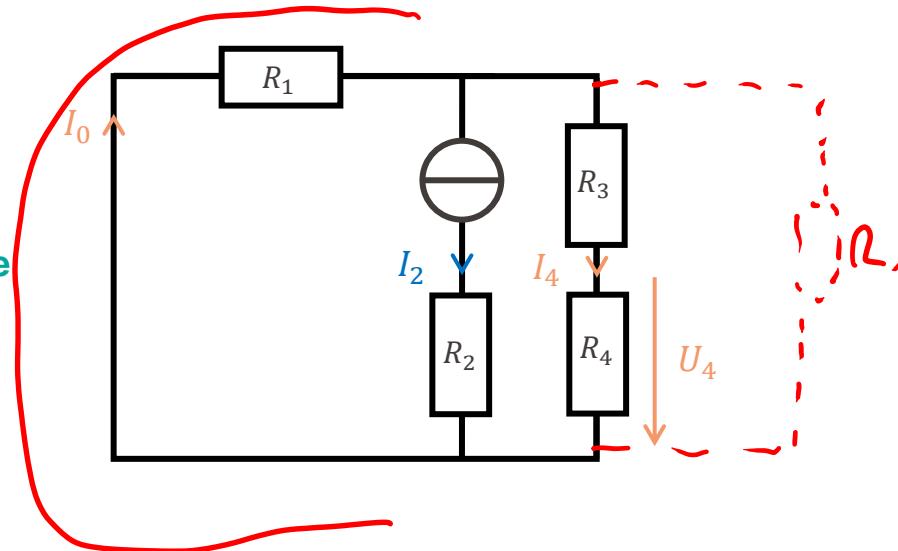
$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{U_0}{R_1 + R_3 + R_4}$$

slérie

# Principe de superposition- Exemple

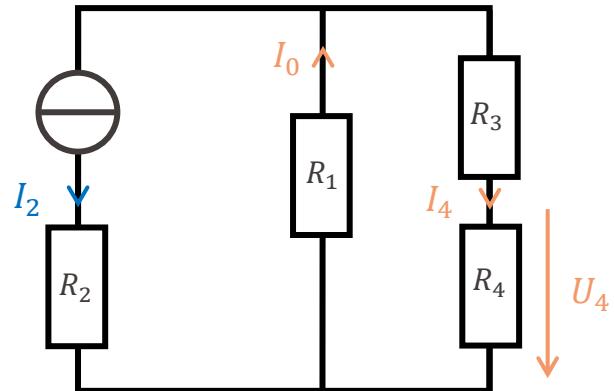
Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. **On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)**



Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. **On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)**

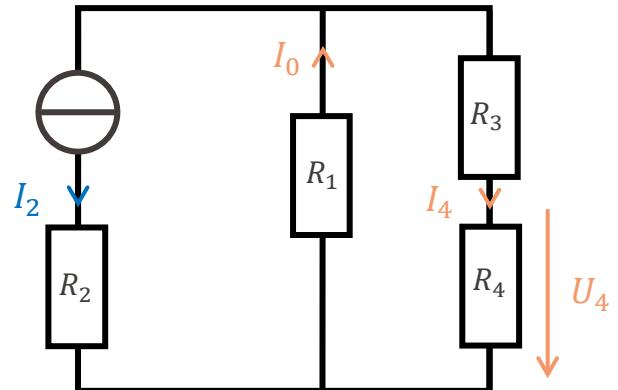




# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

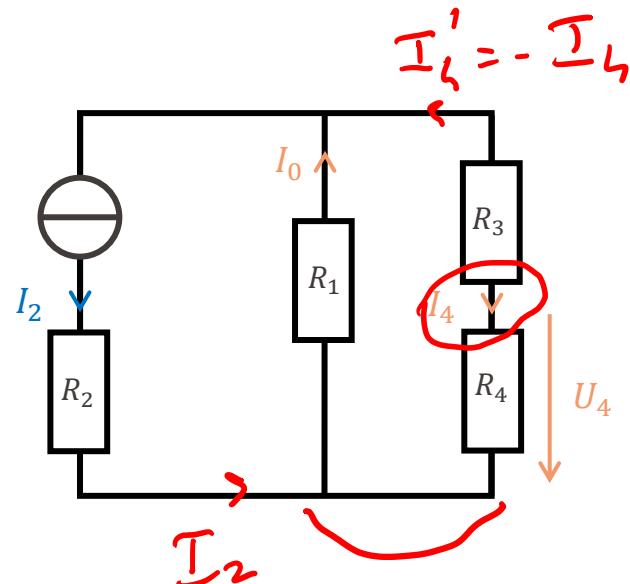
1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. **On détermine les grandeurs souhaitées**



Diviseur de courant:

$$I_4 = \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_4} I_2$$

$$I_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} I_2$$

Loi d'Ohm:

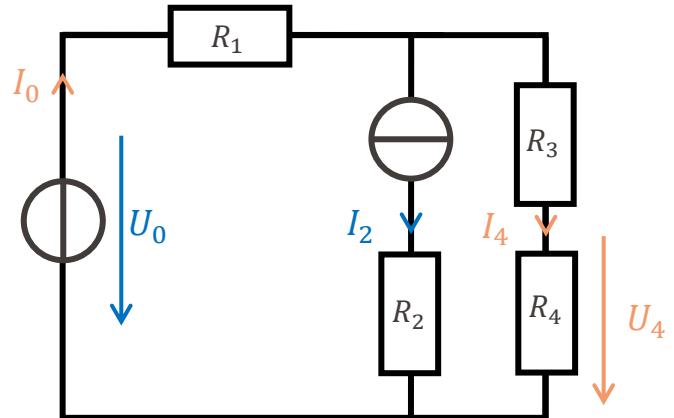
$$U_4 = R_4 I_4 = - \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_4} I_2$$



# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. On additionne les résultats

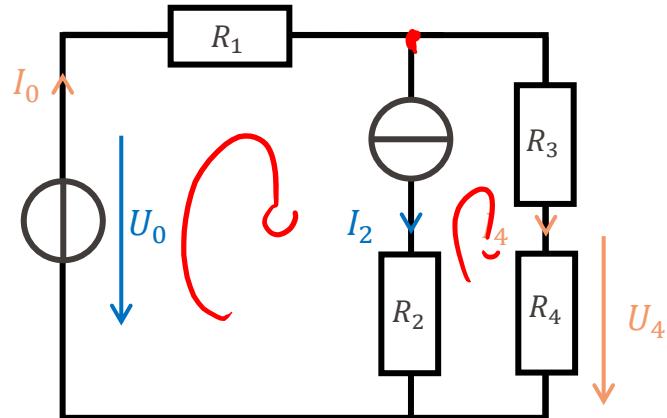




# Principe de superposition- Exemple

Objectif: Calculer la puissance fournie par la source de tension et la puissance consommée par  $R_4$  en fonction de  $U_0$  et de  $I_2$

1. On éteint la source de courant
2. On détermine les grandeurs souhaitées
3. On éteint la source de tension (et on allume la source de courant)
4. On détermine les grandeurs souhaitées
5. On additionne les résultats

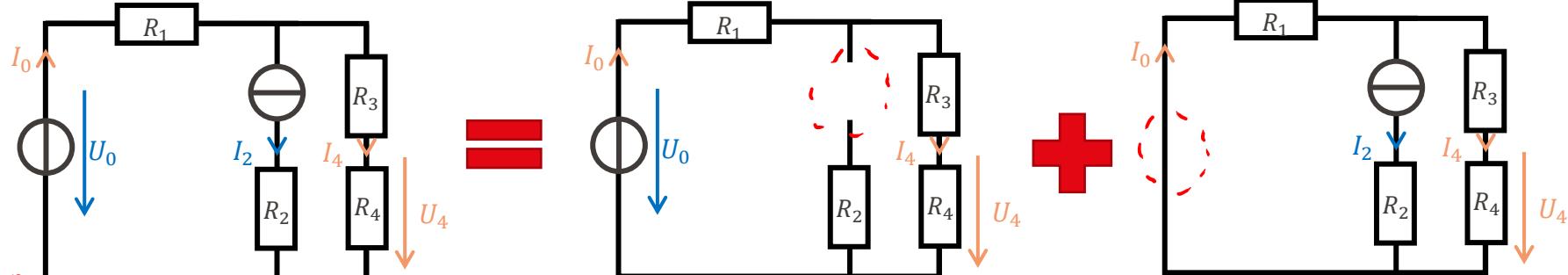


$$I_4 = \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} (U_0 - R_1 I_2)$$

$$I_0 = \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} (U_0 + (R_3 + R_4) I_2)$$

$$U_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4} (U_0 - R_1 I_2)$$

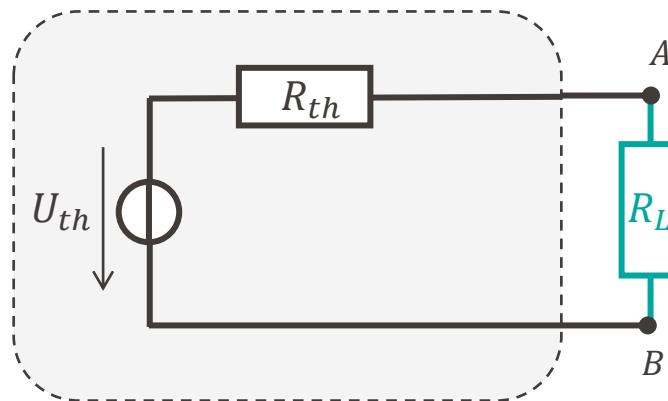
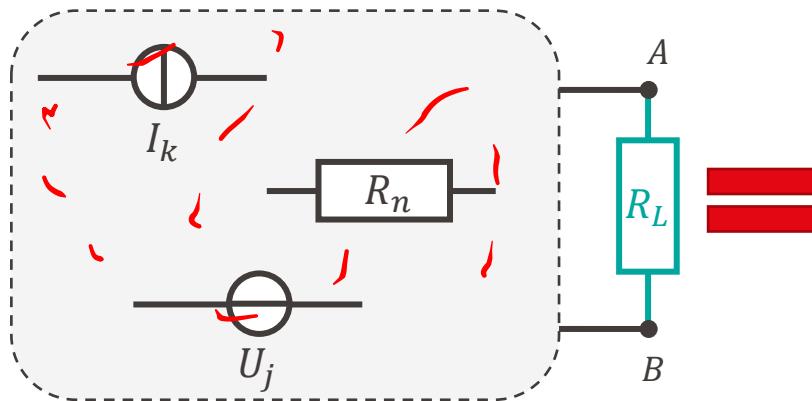
- Le principe de superposition permet de séparer un problème à  $N$  sources en  $N$  problèmes à une source
  - Particulièrement utile pour résoudre les systèmes à plusieurs sources
- Une source de tension éteinte est un « court-circuit »
- Une source de courant éteinte est un « circuit ouvert »



# Théorème de Thévenin / théorème de Norton



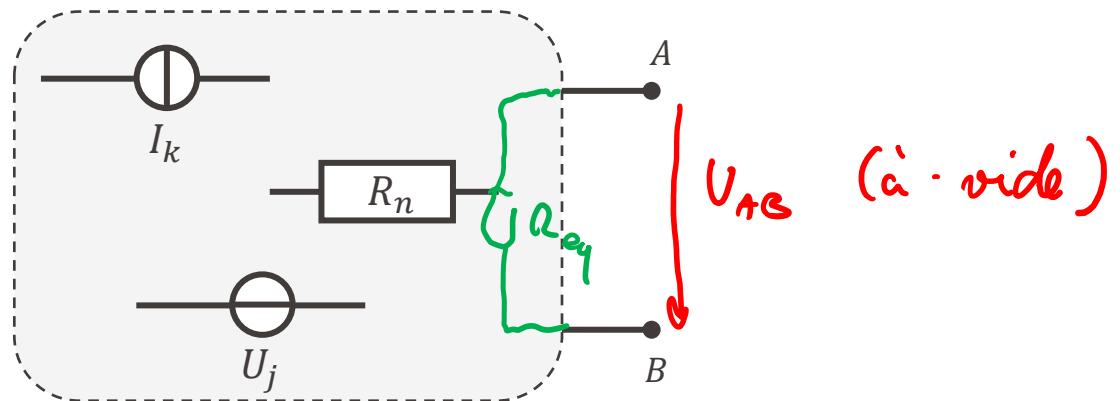
- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série





# Théorème de Thévenin

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série

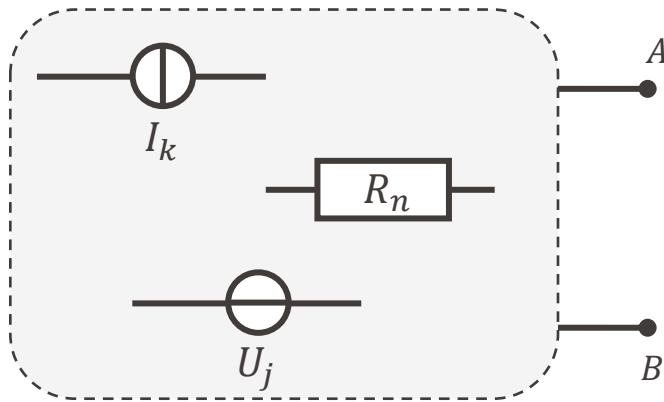


*système complexe = 2 grandeurs*



# Théorème de Thévenin

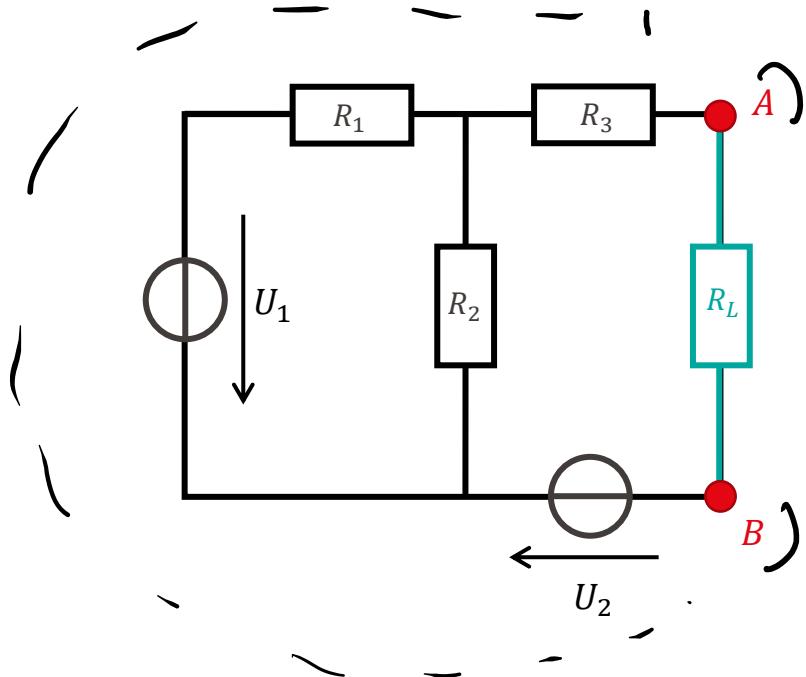
- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série



$$U_{th} = U_0$$
$$R_{th} = R_{AB}$$

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de tension et une résistance en série
- **Procédure:**
  - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
  - Calculer ou mesurer la **tension à vide** (tensions entre A et B **sans charge**)
  - Calculer ou mesurer la résistance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

## Théorème de Thévenin - Exemple



$$U_1 = 10 \text{ V}$$

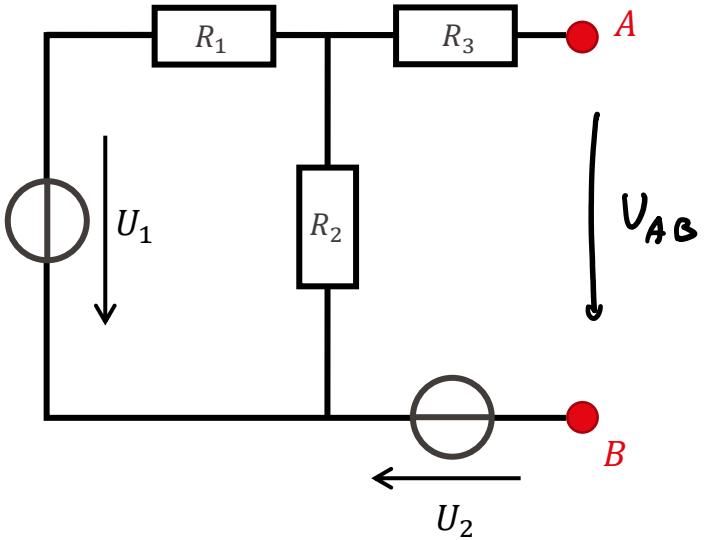
$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

# Théorème de Thévenin - Exemple



$$U_1 = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

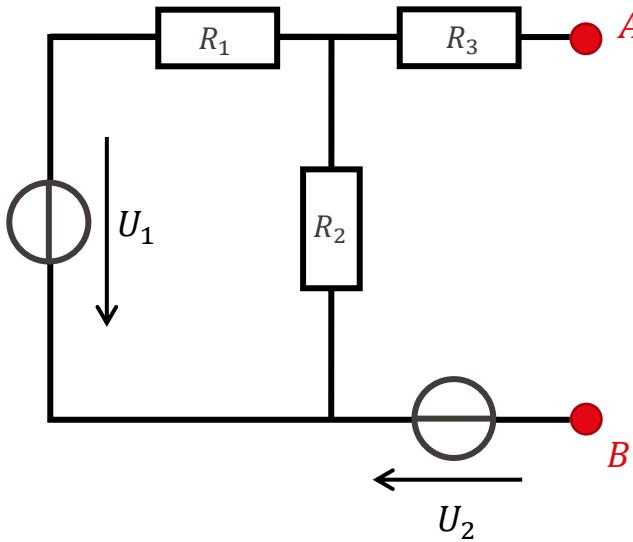
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$



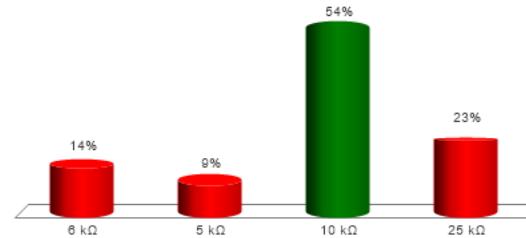
# Théorème de Thévenin – Exemple

## Que vaut la résistance de Thévenin?



$$U_1 = 10 \text{ V}$$
$$U_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$
$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$



A. 6 kΩ

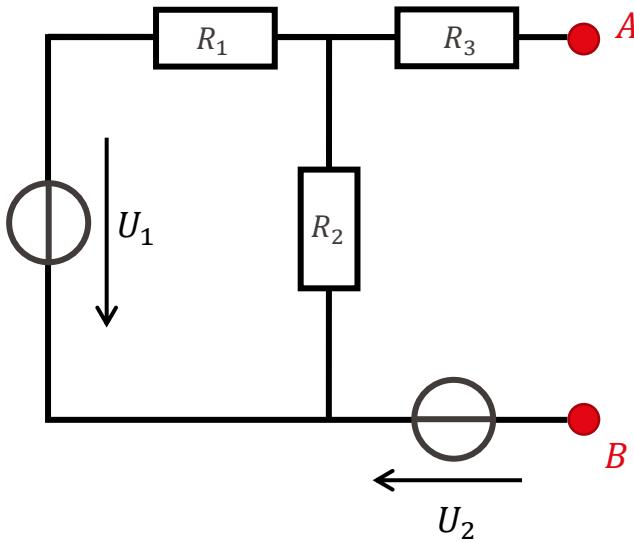
B. 5 kΩ

C. 10 kΩ

D. 25 kΩ



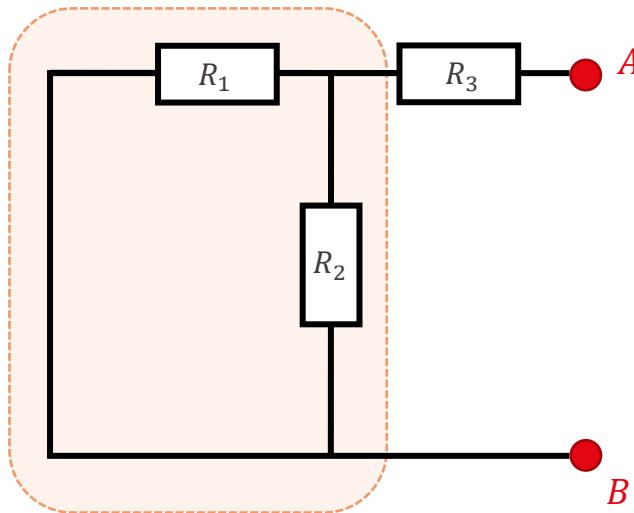
# Théorème de Thévenin - Exemple



Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en parallèle

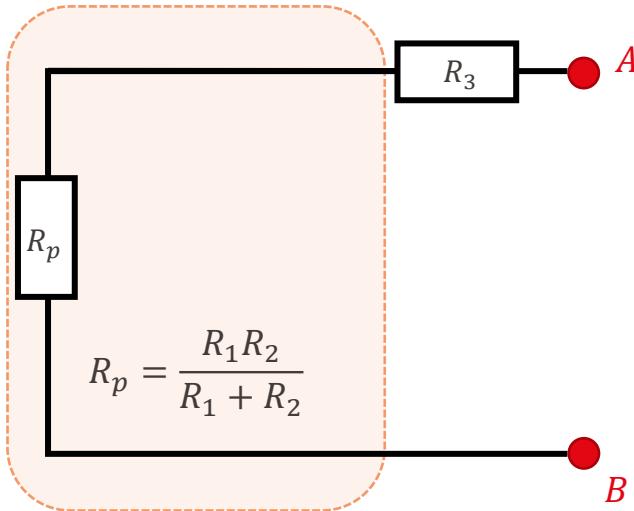


$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 10 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 5 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en parallèle



$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

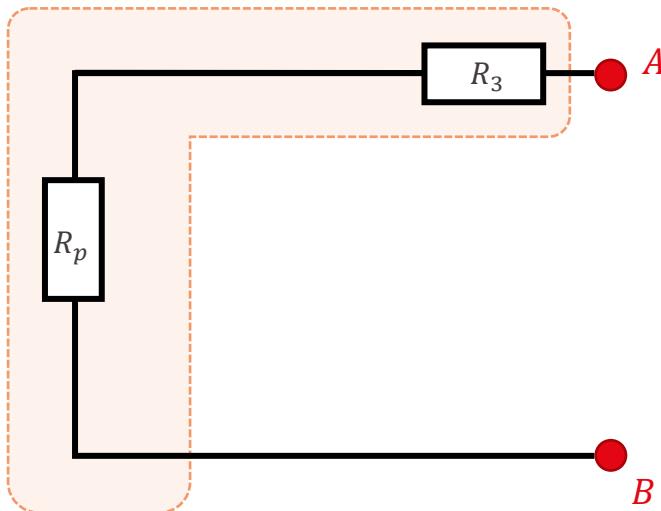
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

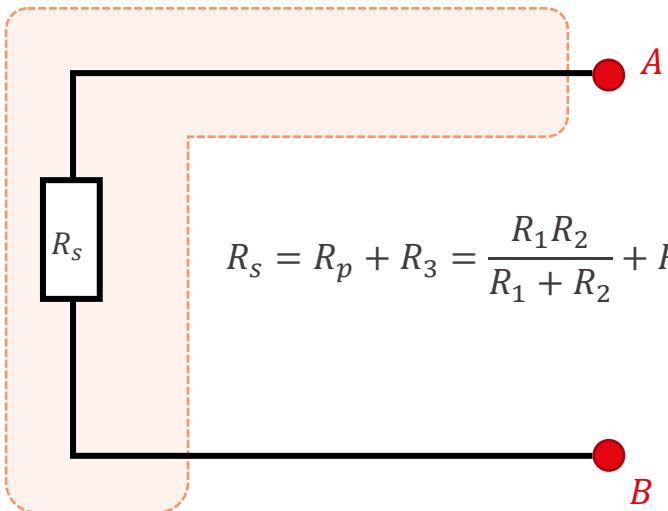
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

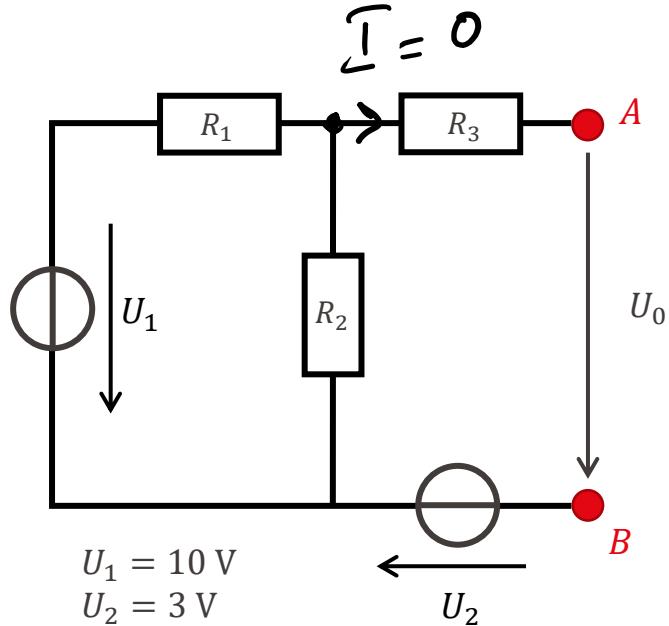
La résistance vue des bornes A et B est  $R_s$

On a donc la résistance interne du circuit équivalent de Thévenin:

$$R_{th} = R_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

Donc  $R_{th} = 10 \text{ k}\Omega$

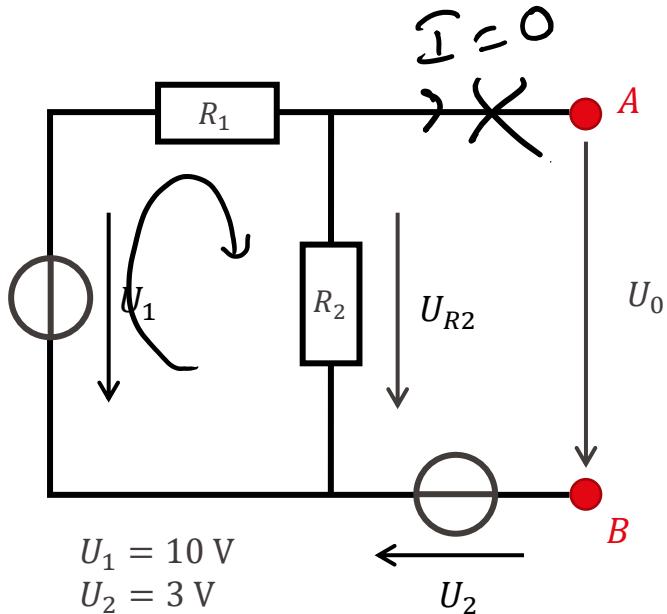
# Théorème de Thévenin - Exemple



Calcul de la tension à vide:

- Pas de courant dans les branches sortantes
- On simplifie le schéma

# Théorème de Thévenin - Exemple



Calcul de la tension à vide:

- Pas de courant dans les branches sortantes
- On simplifie le schéma

Loi des mailles à droite:

$$U_{R2} = U_0 + U_2$$

Diviseur de tension sur  $R_2$ :

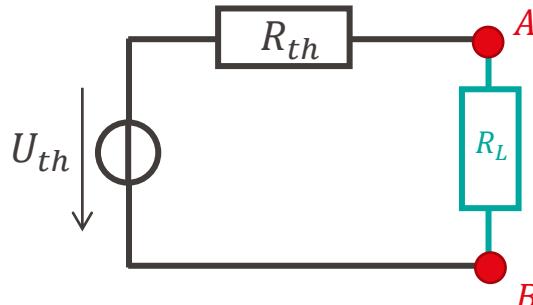
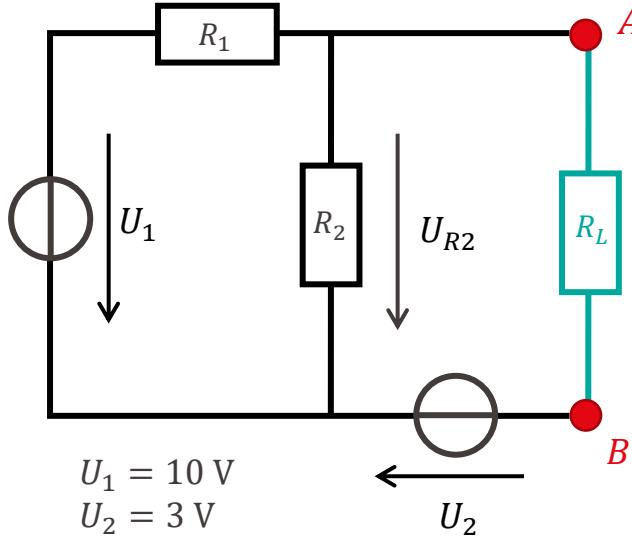
$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$$

On en déduit:

$$U_0 = U_{R2} - U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 - U_2$$

Donc:  $U_0 = 2 \text{ V}$

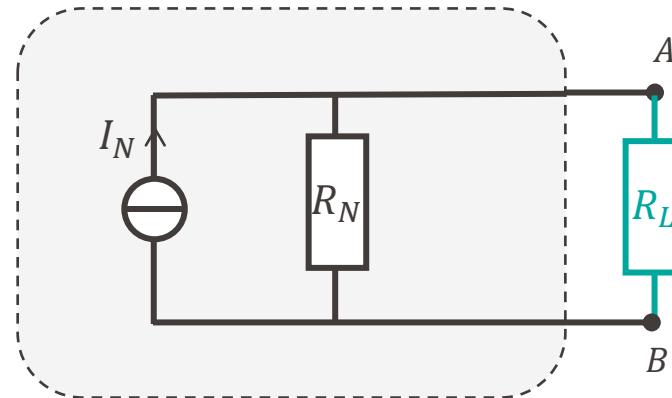
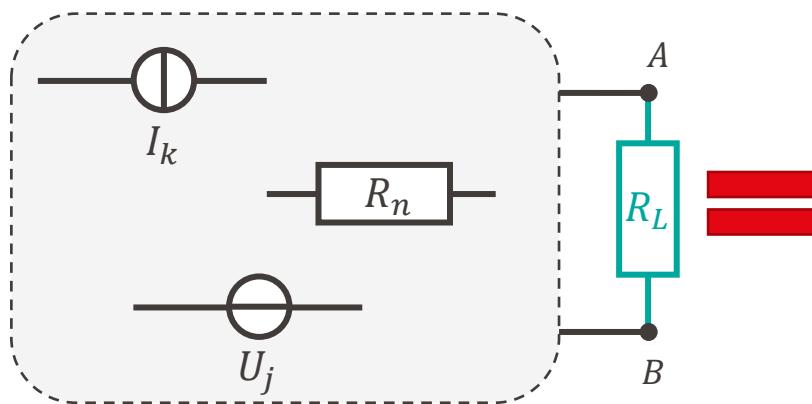
# Théorème de Thévenin - Exemple



$$U_{th} = 2 \text{ V}$$

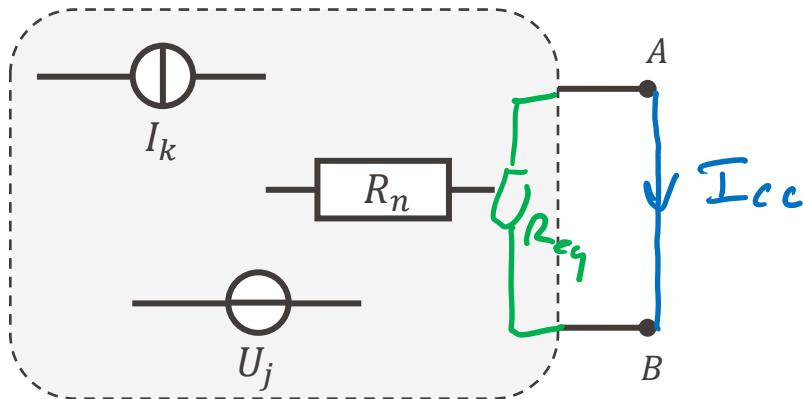
$$R_{th} = 10 \text{ k}\Omega$$

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle





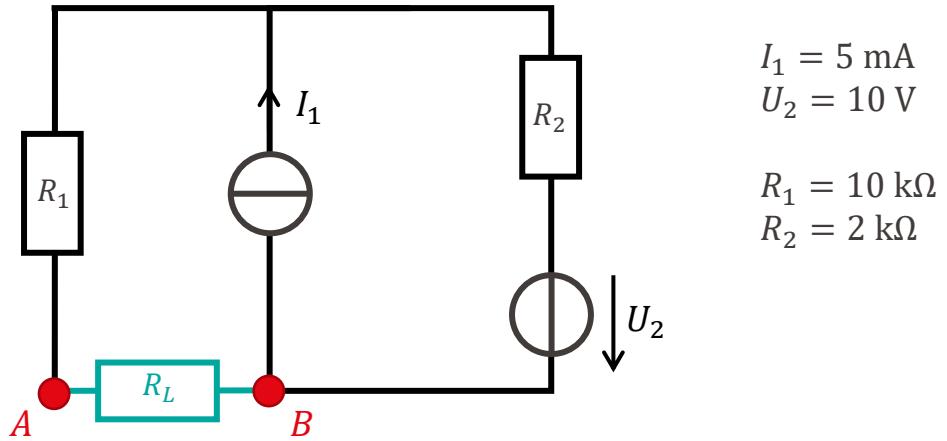
- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle



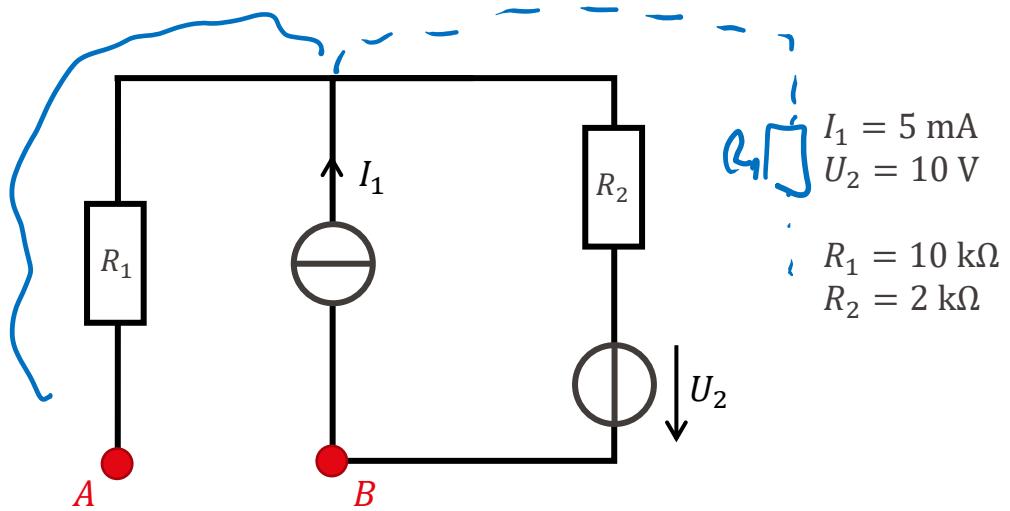
$$I_N = I_{cc}$$
$$R_N = R_{AB}$$

- **Objectif:** Remplacer un circuit complexe par une source de courant et une résistance en parallèle
- **Procédure:**
  - Identifier clairement les bornes de sortie du circuit à remplacer
  - Calculer ou mesurer le **courant de court-circuit** (courant dans la branche AB pour une **charge nulle**)
  - Calculer ou mesurer la résistance **vue par les bornes A et B** (en éteignant toutes les sources)

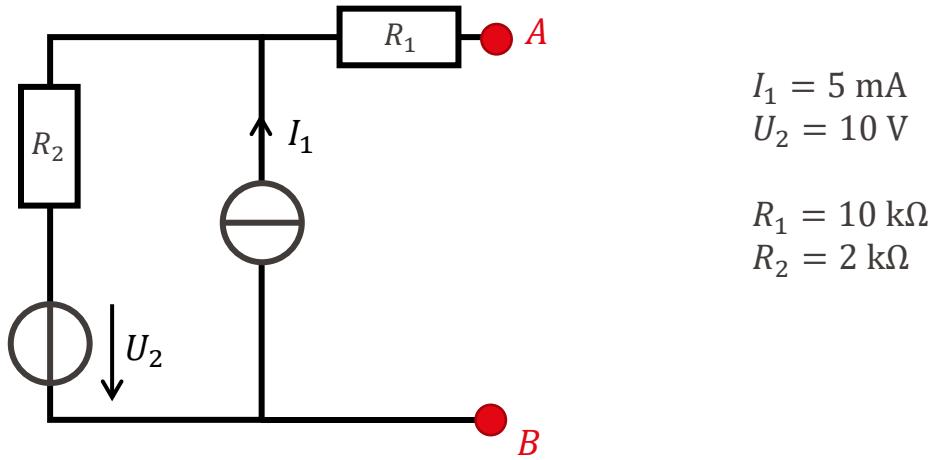
# Théorème de Norton – Exemple



## Théorème de Norton – Exemple



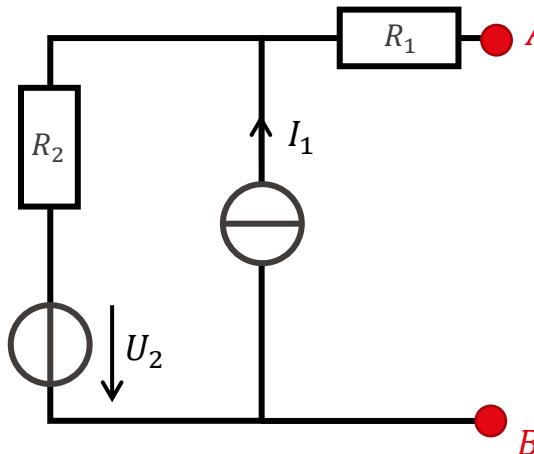
# Théorème de Norton – Exemple





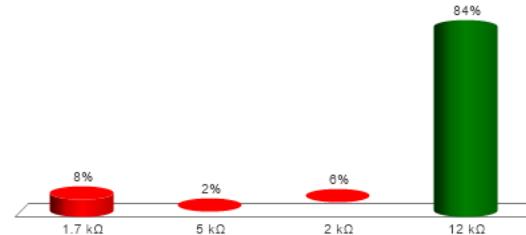
# Théorème de Norton – Exemple

## Que vaut la résistance de Norton?



$$I_1 = 5 \text{ mA}$$
$$U_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$
$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

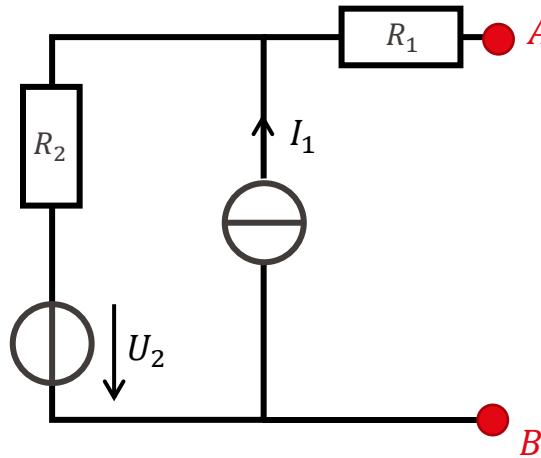


- A.  $1.7 \text{ k}\Omega$
- B.  $5 \text{ k}\Omega$
- C.  $2 \text{ k}\Omega$
- D.  $12 \text{ k}\Omega$

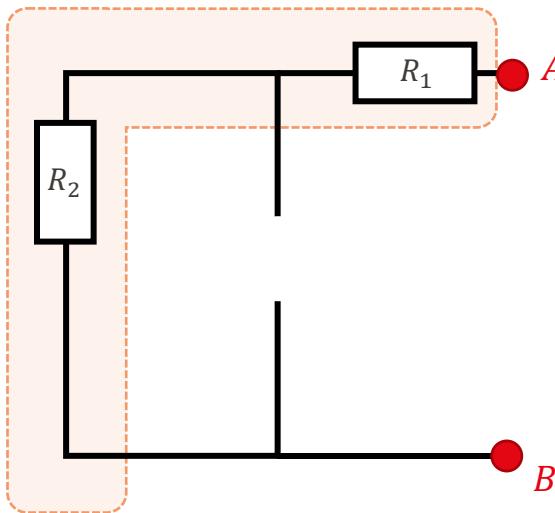


Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma



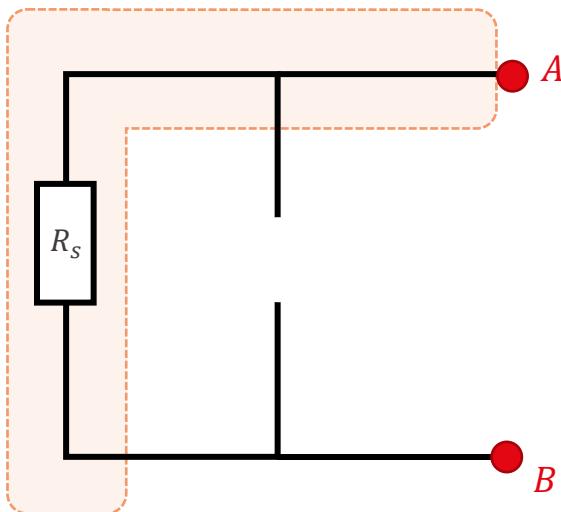
*Agencement en série*



Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

Agencement en série



$$R_s = R_1 + R_2$$

Calcul de la résistance interne:

- On éteint les sources
- On simplifie le schéma

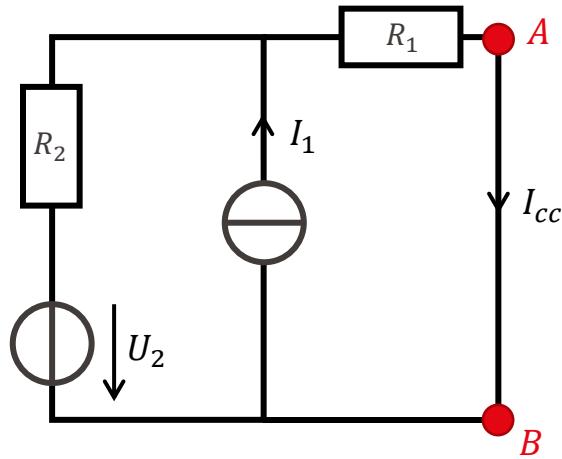
La résistance vue des bornes A et B est  $R_s$

On a donc la résistance interne du circuit équivalent de Norton:

$$R_N = R_s = R_1 + R_2$$

Donc  $R_N = 12 \text{ k}\Omega$

# Théorème de Norton – Exemple

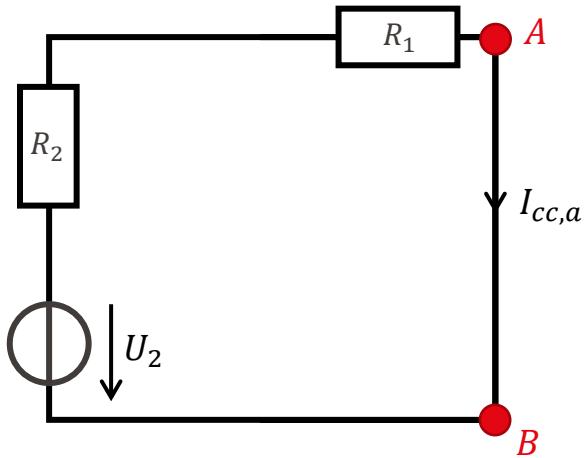


Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

# Théorème de Norton – Exemple



Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

a. On éteint la source de courant

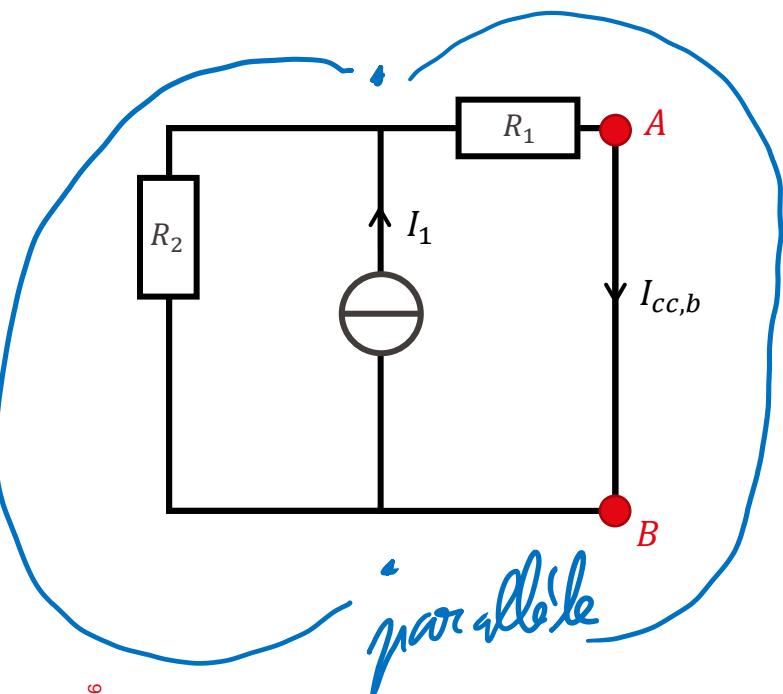
$R_1$  et  $R_2$  sont en série. On en déduit:

$$U_2 = (R_1 + R_2)I_{cc}$$

Donc:

$$I_{cc,a} = \frac{U_2}{R_1 + R_2}$$

# Théorème de Norton – Exemple



Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

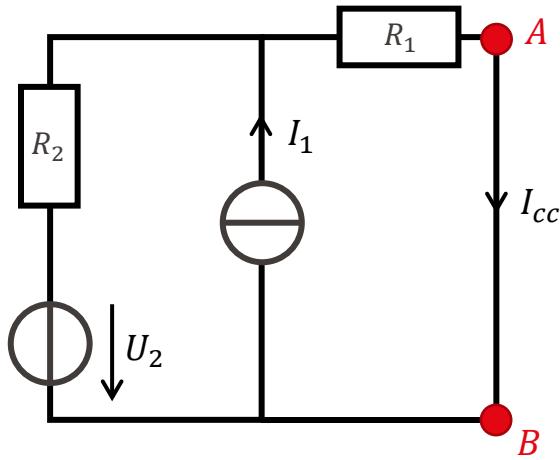
On va utiliser le **principe de superposition**

b. On éteint la source de courant

On applique le diviseur de courant sur  $R_1$ :

$$I_{cc,b} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1$$

# Théorème de Norton – Exemple



$$I_1 = 5 \text{ mA}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

Calcul du courant de court-circuit:

- On met un « fil » entre A et B
- On résout

On va utiliser le **principe de superposition**

c. On additionne les contributions:

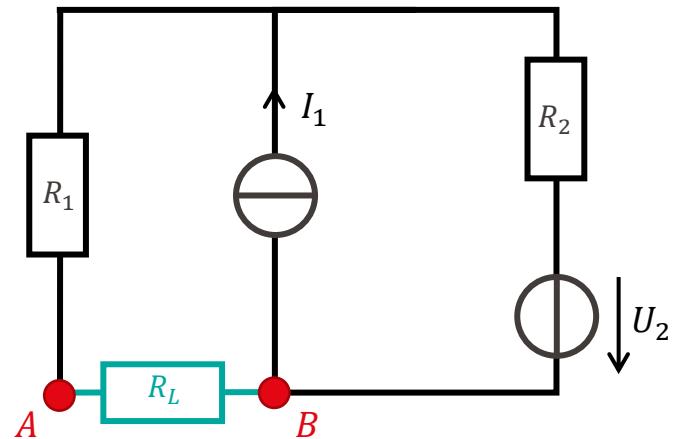
$$I_{cc} = I_{cc,a} + I_{cc,b} = \frac{U_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1$$

On obtient donc finalement:

$$I_{cc} = \frac{U_2 + R_2 I_1}{R_1 + R_2}$$

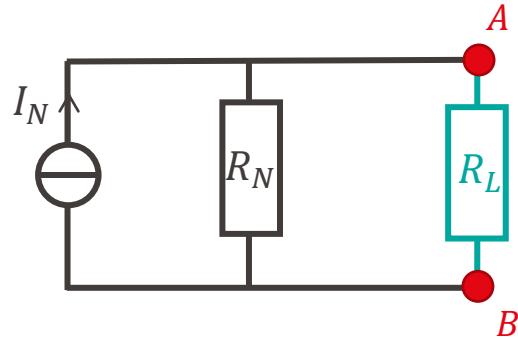
$$I_{cc} \simeq 1.7 \text{ mA}$$

# Théorème de Norton – Exemple



$$I_1 = 5 \text{ mA}$$
$$U_2 = 10 \text{ V}$$

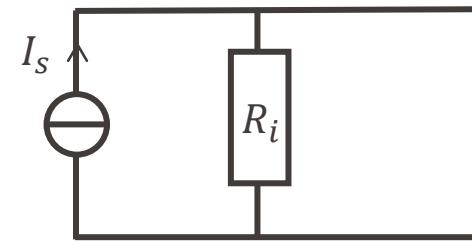
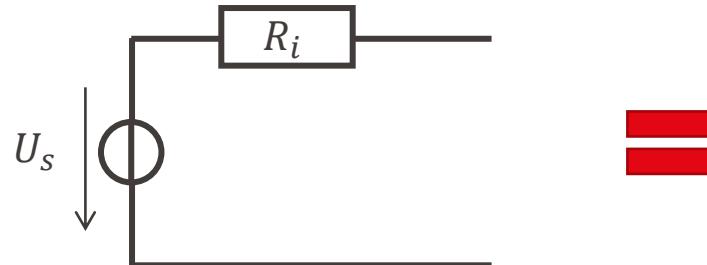
$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$
$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$



$$I_N \simeq 1.7 \text{ mA}$$
$$R_N = 12 \text{ k}\Omega$$

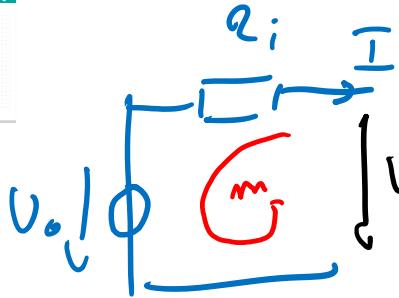
# Équivalence de sources

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
  - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche



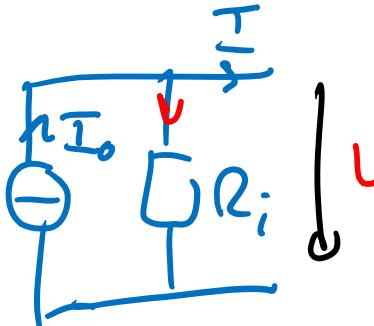
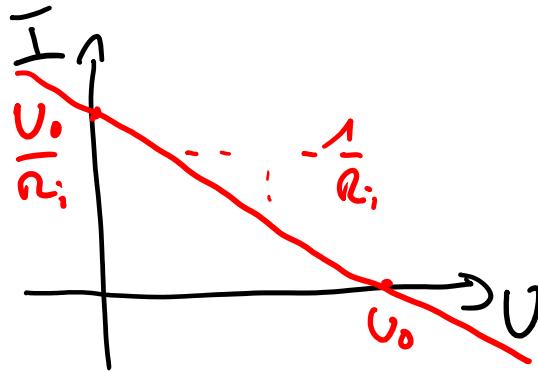
$$I_s = \frac{U_s}{R_i}$$

# Equivalence de sources

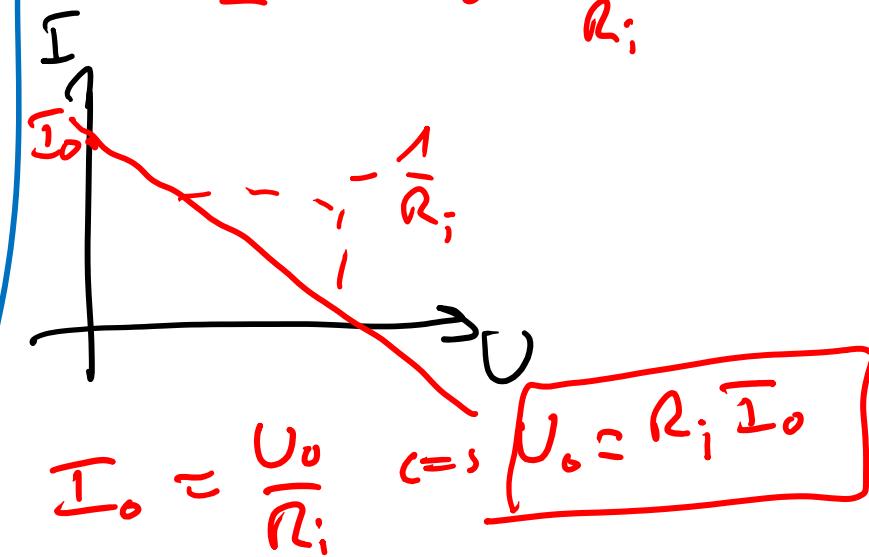


$$U = -R_i I + U_0$$

$$I = \frac{U_0 - U}{R_i}$$

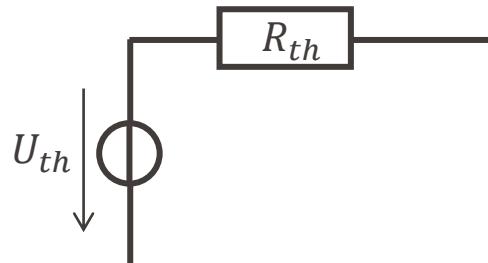


$$I = I_0 - \frac{1}{R_i} U$$

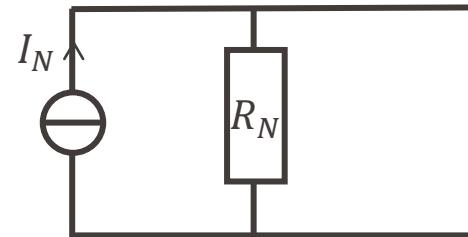


# Equivalence de sources

- Il est possible de modéliser une source de tension réelle par une source de courant réelle équivalente et vice-versa
  - Utile pour modifier un schéma en fonction de ce que l'on cherche
- Conséquence: les circuits équivalents de Thévenin et de Norton sont interchangeables!



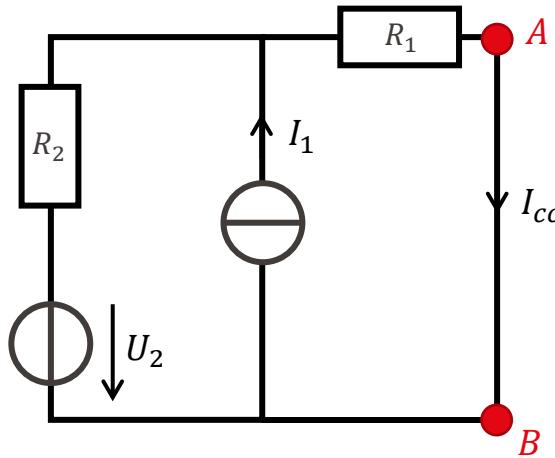
$$I_N = \frac{U_{th}}{R_{th}}$$
$$R_N = R_{th}$$





# Équivalence de sources

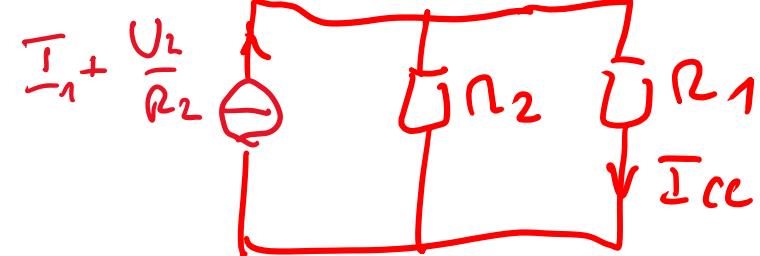
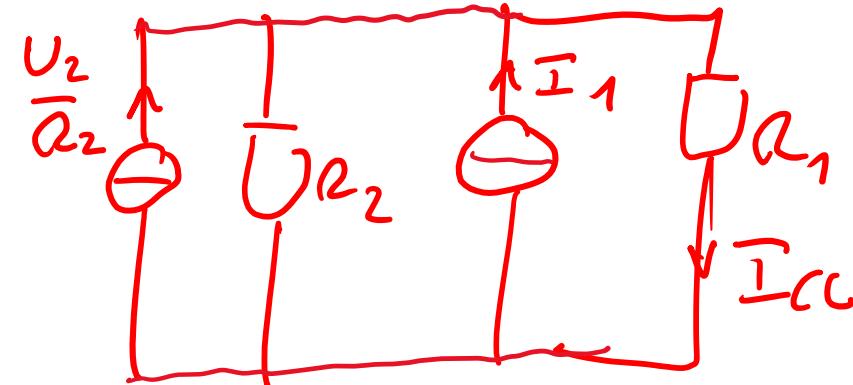
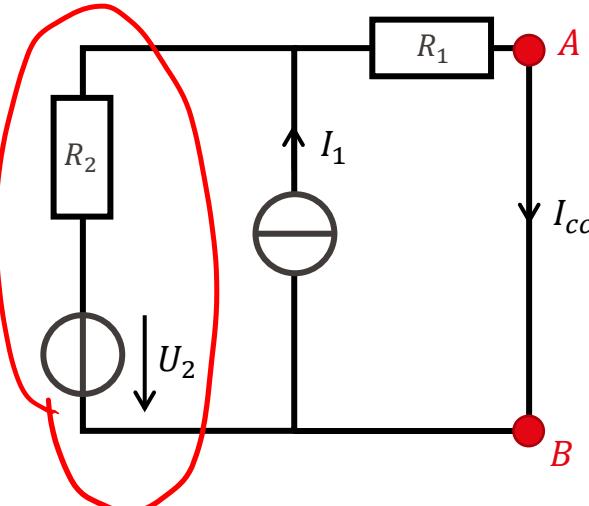
Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:





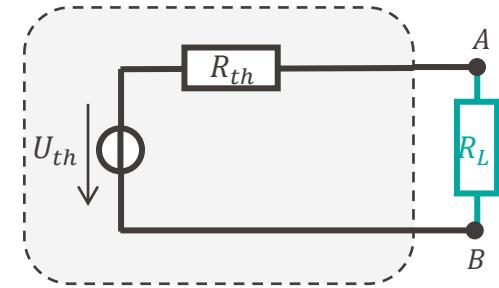
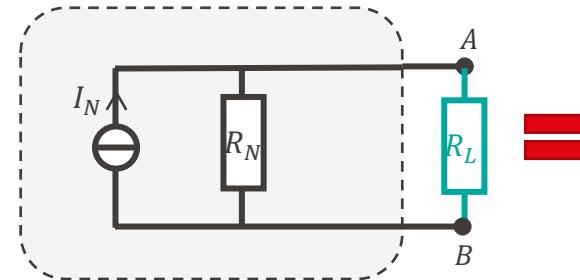
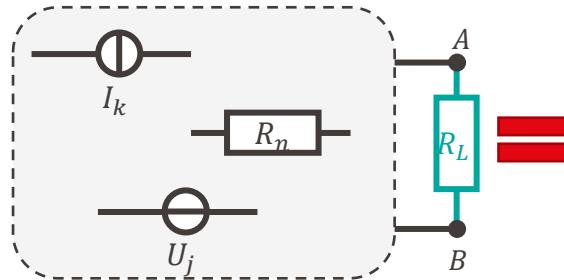
# Équivalence de sources

Retrouvons le résultat du courant de court-circuit de la source équivalente de Norton par transformation de source:



# Points clés

- Les théorèmes de Thévenin et de Norton permettent de transformer des circuits linéaires complexes en sources équivalentes
  - Le théorème de Thévenin donne un e source de tension en série avec une résistance
  - Le théorème de Norton donne une source de courant en parallèle avec une résistance
- Les deux modèles sont interchangeables (équivalence entre les sources de courant et de tension)

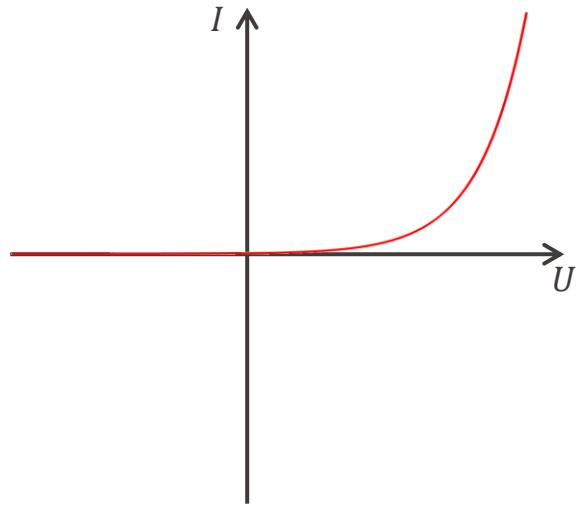
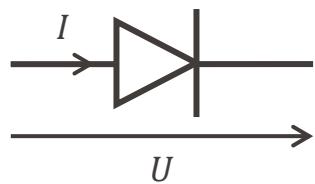


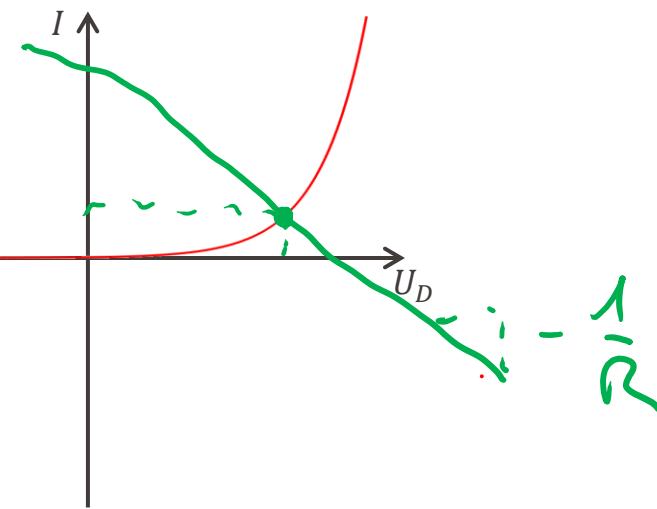
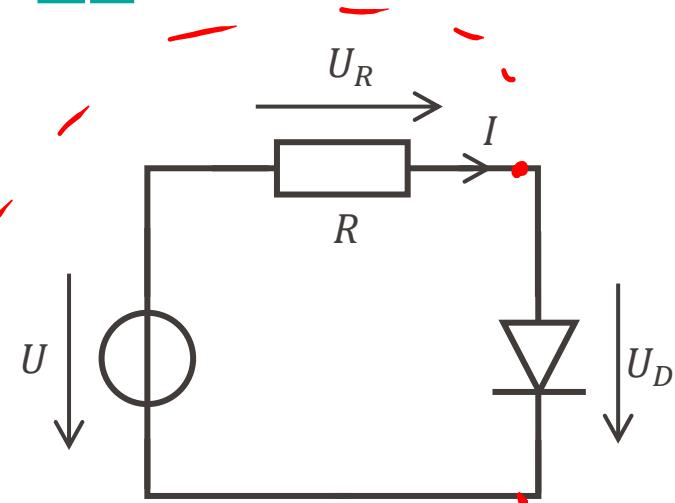


- Pour un circuit avec beaucoup de mailles, il existe une méthode matricielle
- En définissant des courants de mailles fictifs, on peut mettre le problème sous la forme d'une équation matricielle
- Il suffit alors d'inverser la matrice pour trouver les courants inconnus



- Il existe des éléments de circuits non-linéaires
  - Ca veut dire quoi « non-linéaire »?
  - Courant et tension ne sont pas liés par une relation linéaire au sens mathématique
- C'est le cas de diodes
  - Les diodes ne laissent passer le courant que dans un sens
  - Le courant et la tension sont liés par une loi exponentielle
- Dans ce cas, il est difficile d'appliquer les méthodes de résolutions analytiques
  - On peut utiliser des méthodes graphiques





■ EE-106  
R. Dufy, « La fée électricité »  
Musée d'art moderne, Paris



Merci pour votre  
attention

Ampère

Riot