EPFL

Cours 11: Diagramme de Bode, puissance

EE 106 – Sciences et technologies de l'électricité

Automne 2024

R. Dufy, Musée d'art moderne, Paris

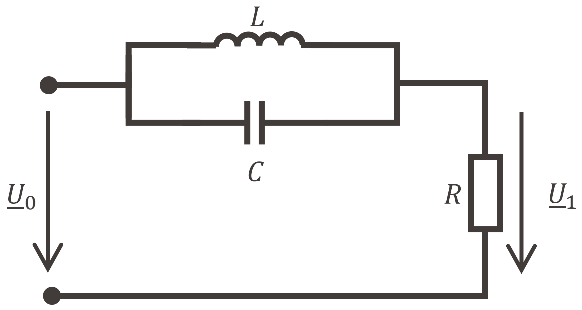
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Dr. Christian Lafforgue – christian.lafforgue@epfl.ch

Rappels

-Rappel- Les filtres

- Les grandeurs dans le circuit dépendent de la fréquence



$$\underline{U}_1 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R + jL\omega - RLC\omega^2}\underline{U}_0$$

- Cette propriété est utilisée pour réaliser des filtres
  - Systèmes qui permettent de sélectionner/rejeter des signaux en fonction de leur fréquence

-Rappel- Les filtres

$|\underline{H}(\omega)| \sim 1$: passant

$|\underline{H}(\omega)| \sim 0$: bloquant

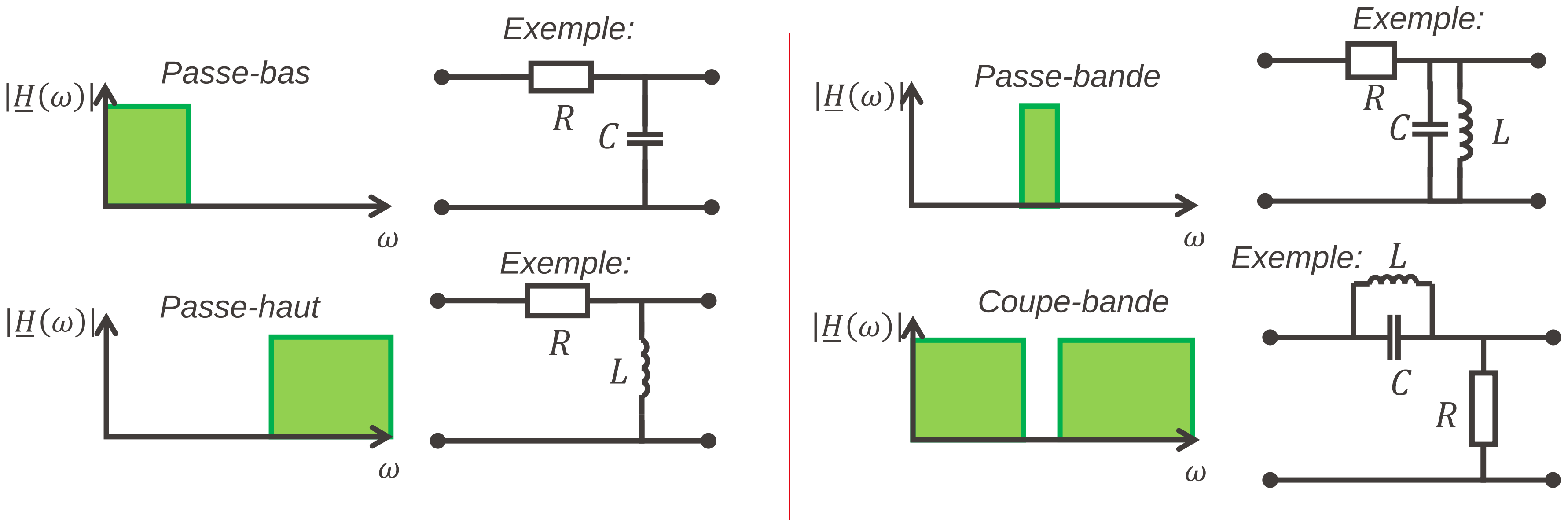
- L'étude des filtres consiste en:
  - Définir sa fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{sortie}}(\omega)}{\underline{U}_{\text{entrée}}(\omega)}$$

  - Etudier et tracer l'évolution de $|\underline{H}(\omega)|$ et $\arg\left(\underline{H}(\omega)\right)$ en fonction de la fréquence du signal d'entrée

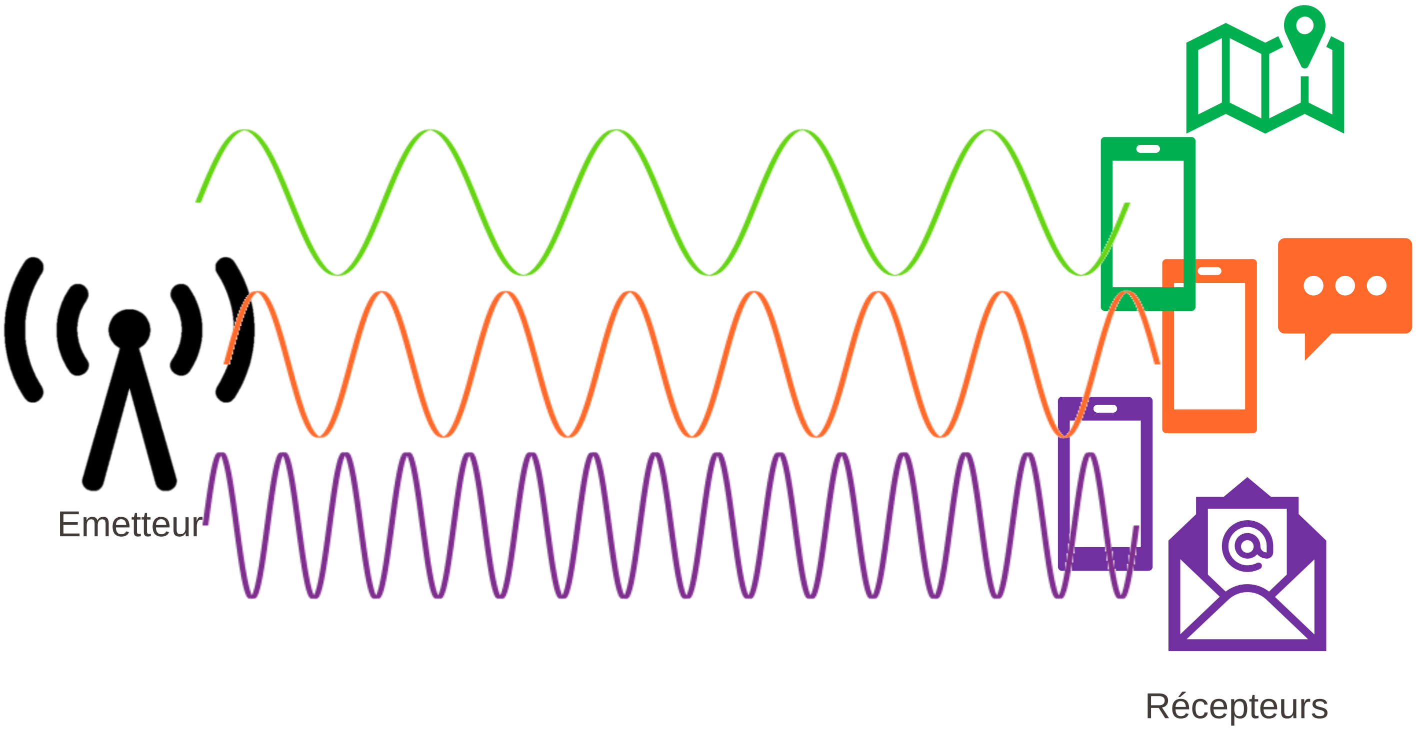
-Rappel- Les filtres

- On a vu 4 familles de filtres:

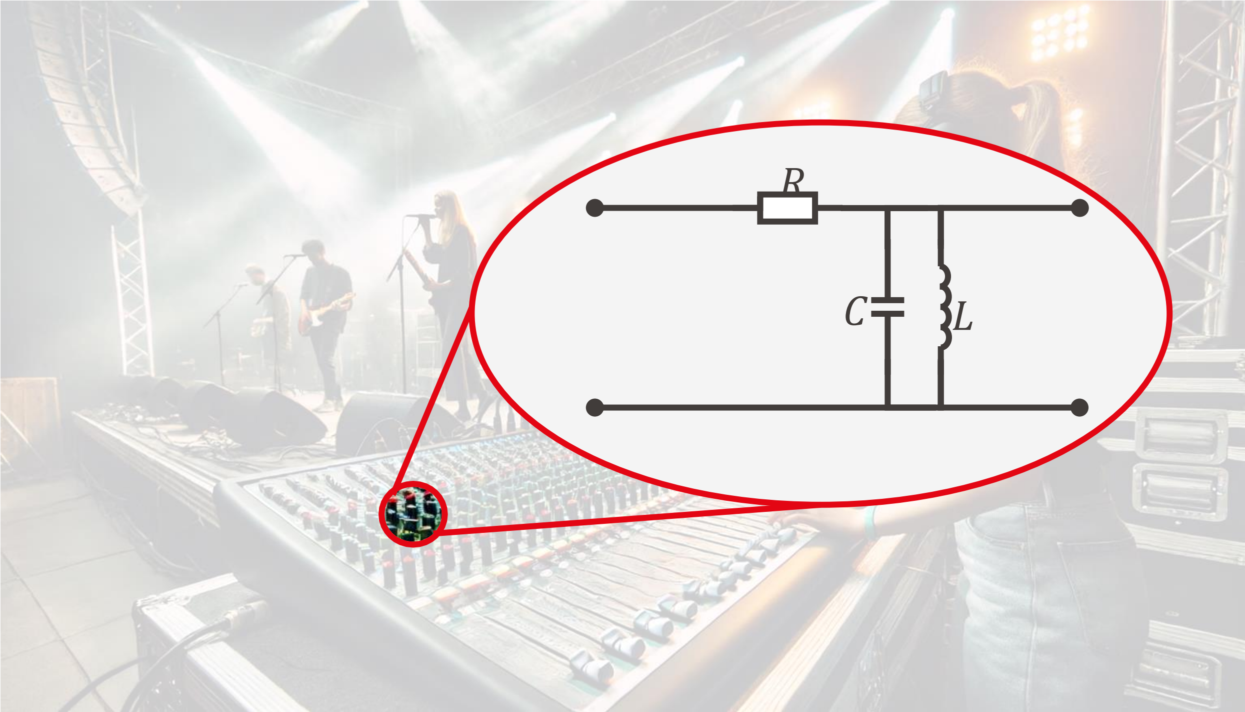


Exemple: communications

C. Lafforgue

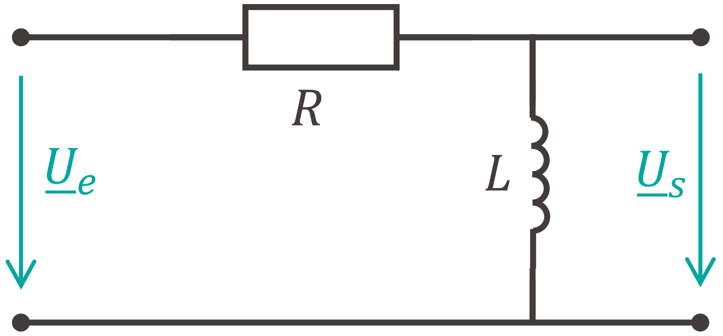


Exemple: ingénierie du son

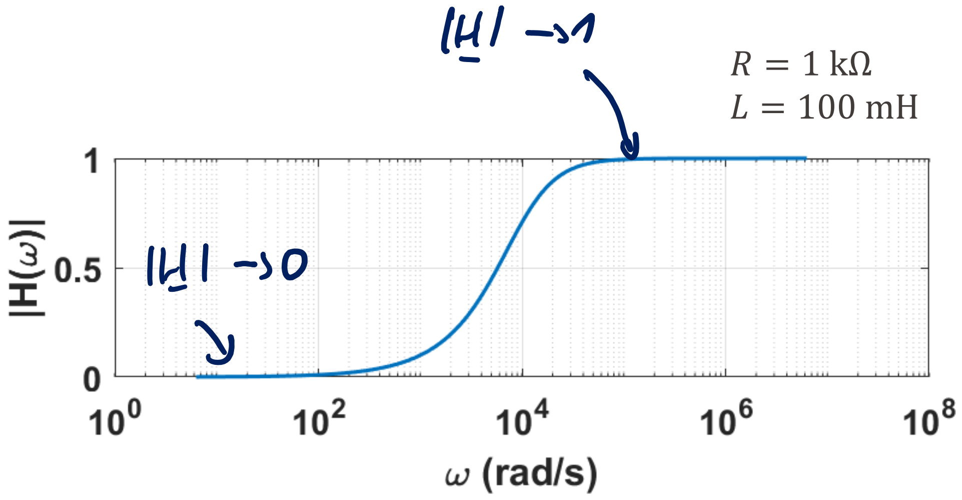


C. Lafforgue

Circuit RL



$R = 1\ \mathrm{k}\Omega$
$L = 100\ \mathrm{mH}$



$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{\frac{L}{R}\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}} \\ \phi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L}{R}\omega\right) \end{cases}$$

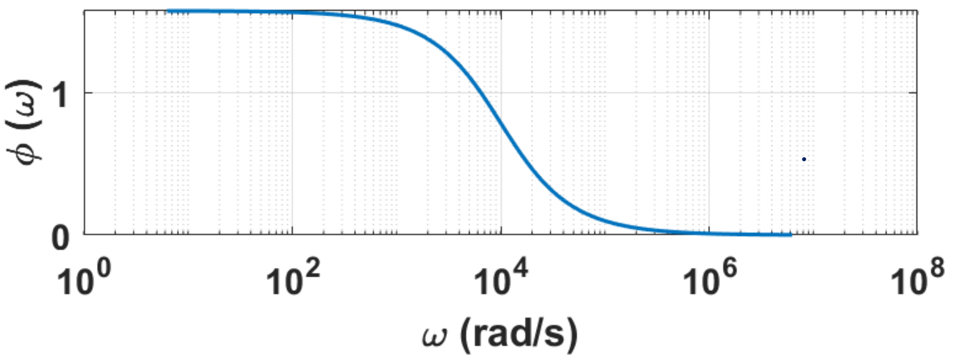


Diagramme de Bode

$$\underline{H}(\omega) = \frac{0.56(1 + j723\omega)^2(52.7 + j63\omega)(13 + j563\omega)}{(1 + j85.5\omega)(-78.6 - j41\omega)(j\omega)^4}$$

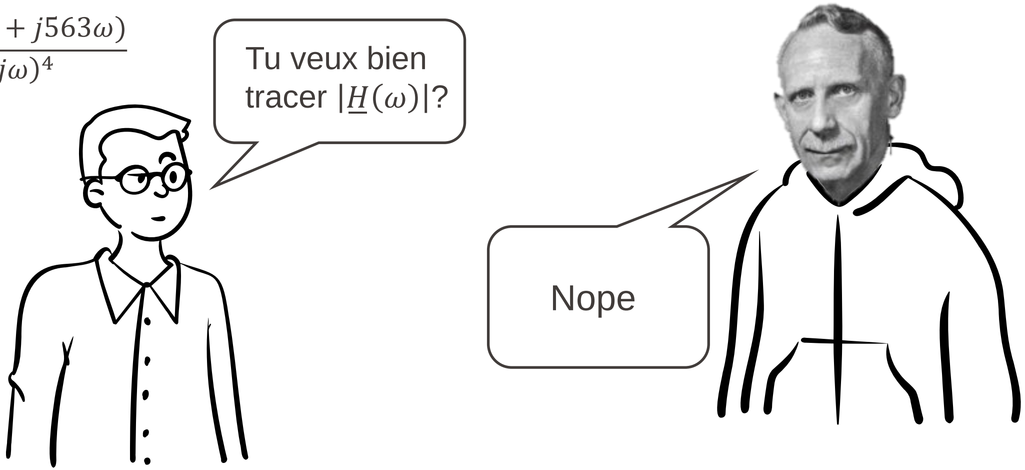


Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d’un système
  - Il permet une résolution graphique simplifiée
  - Il sert à visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence
  - Il se trace en échelle logarithmique

Hendrick Wade Bode
1905-1982
Ingénieur américain

Diagramme de Bode

C. Lafforgue

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega}{1 + j2\omega}$$

- Résolution « classique »

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{|j\omega|}{|1+j2\omega|} = \frac{\omega}{\sqrt{1^2+(2\omega)^2}}$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

- Résolution en logarithme

$$G(\omega) = \ln(|\underline{H}(\omega)|)$$

$$= \ln\left(\frac{\omega}{\sqrt{1+4\omega^2}}\right)$$

$$= \ln(\omega) - \ln(\sqrt{1+4\omega^2})$$

$$G(\omega) = \ln(\omega) - \frac{1}{2}\ln(1+4\omega^2)$$

C. Lafforgue

Rappels sur les logarithmes:

- $\log_k(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(k)}$

$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \Rightarrow \log_{10}(10^n) = n$

- $\log_k(a \cdot b) = \log_k(a) + \log_k(b)$

$\log_{10}(1000) = 3$

- $\log_k(a^n) = n \cdot \log_k(a)$
- $\log_k\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_k(x)$
- $\log_k(1) = 0$
- $\log_k(k) = 1$

Diagramme de Bode

- Les fonctions de transfert peuvent rapidement être compliquées

- Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique
  - On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)
  - Il est défini sur le gain: $\boxed{G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(\omega)|)}$

Diagramme de Bode – Tracé en échelle logarithmique

$\underline{H}(\omega) = j\omega$

$G_{dB}(\omega) = 20\underbrace{\log_{10}(\omega)}_{= w}$

$G_{dB}(w) = 20\,w$

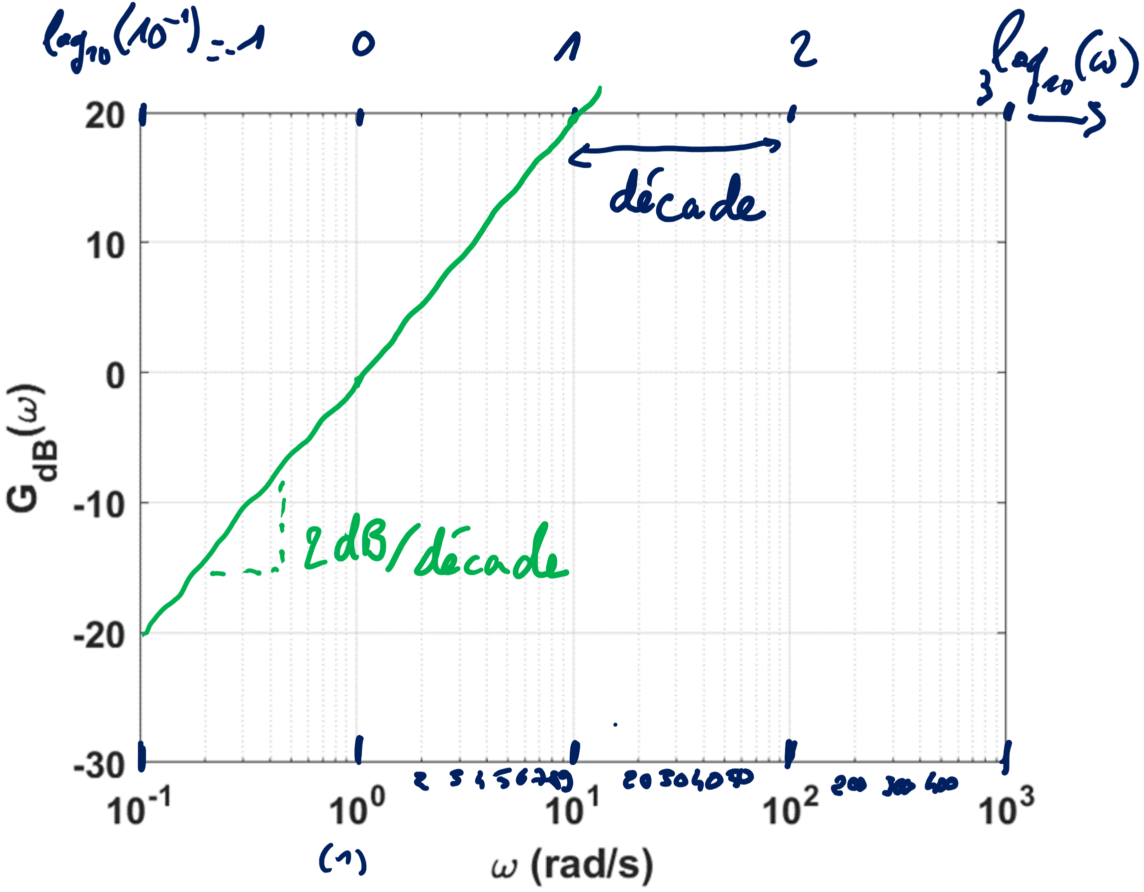
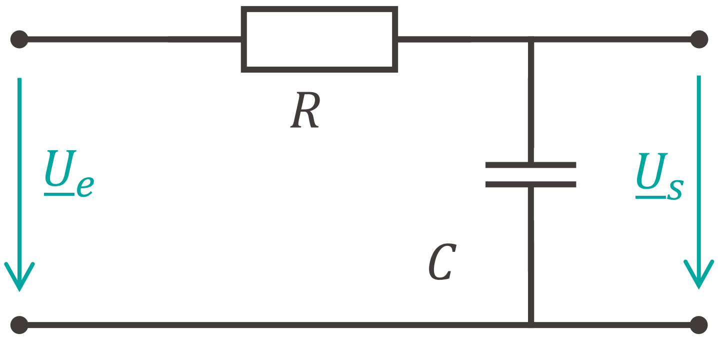


Diagramme de Bode - Exemple

C. Lafforgue



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

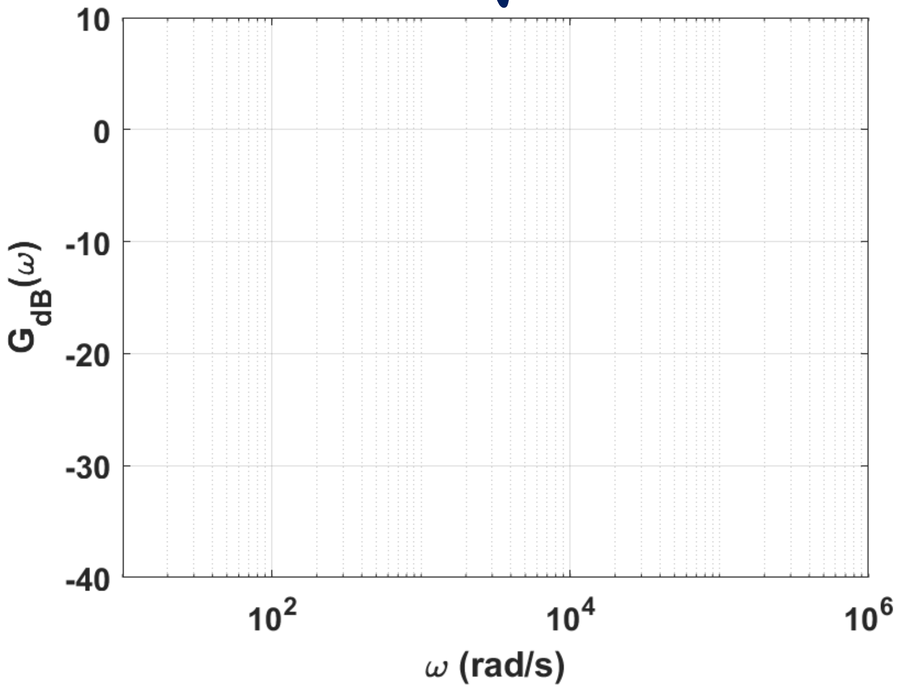
Diagramme de Bode - Exemple

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(1) - 20\log_{10}\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right)$$

- Cas limites:
  - $\omega \to 0$
  - $\omega \to +\infty$

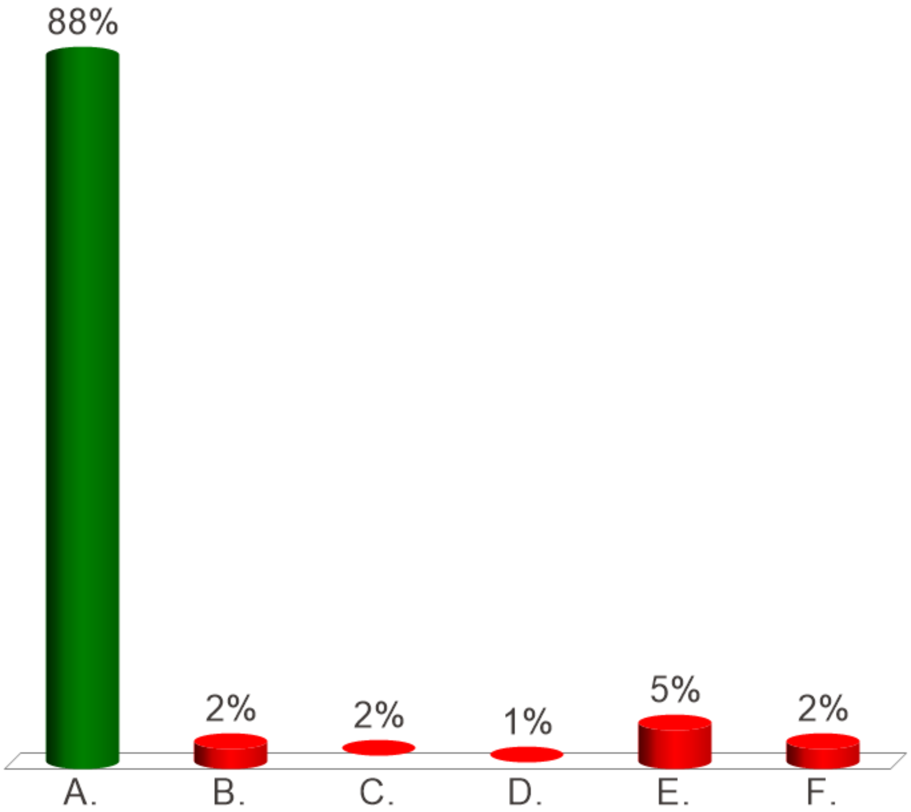


C. Lafforgue

Que vaut la limite pour $\omega \to 0$?

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right)$$

- ✓ A. 0 dB
- B. 1 dB
- C. $+\infty$ dB
- D. $-\infty$ dB
- E. 20 dB
- F. -20 dB



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Diagramme de Bode - Exemple

C. Lafforgue

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

$R = 1\ \text{k}\Omega$
$C = 100\ \text{nF}$

- Cas limites:
  - $\omega \to 0$

$G_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right)$

$\omega = 0 \Rightarrow G_{dB}(0) = -20\log_{10}(1) = 0\,dB$

  - $\omega \to +\infty$

$1 + (RC\omega)^2 \underset{\omega \to +\infty}{\simeq} (RC\omega)^2 \quad \Big| \quad \sqrt{1+(RC\omega)^2} \underset{\omega \to +\infty}{\simeq} RC\omega$

$G_{dB}(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\simeq} -20\log_{10}(RC\omega) = -20\log_{10}(RC) - 20\log_{10}(\omega)$

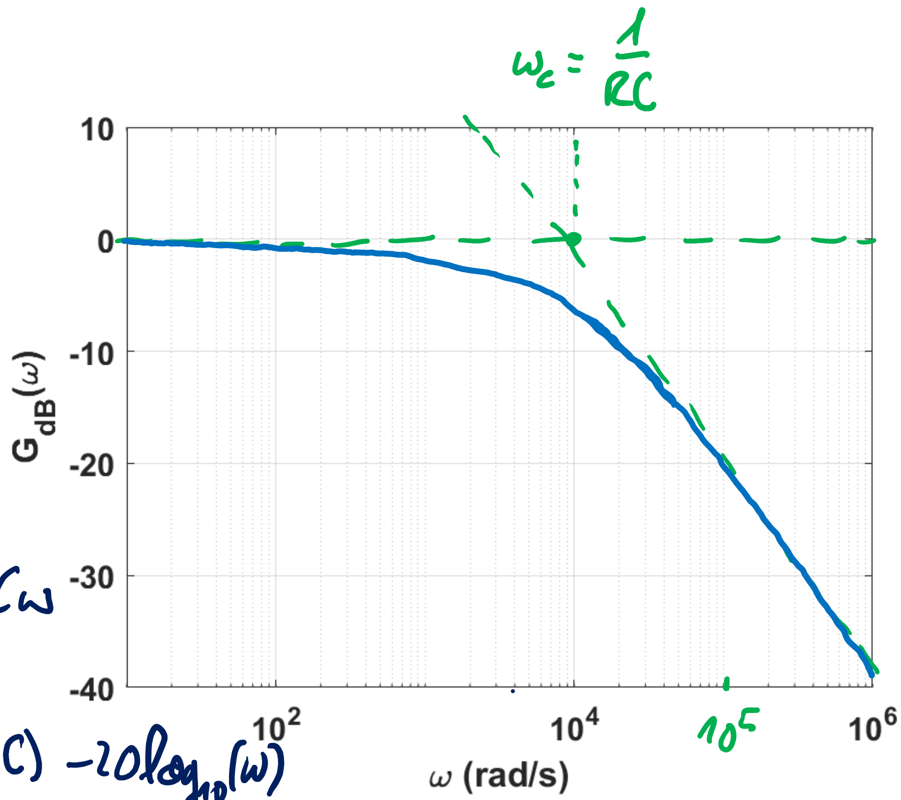


Diagramme de Bode - Exemple

rappel : coupure

$|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq -3\ \mathrm{dB}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \\ \phi(\omega) = -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

Diagramme réel

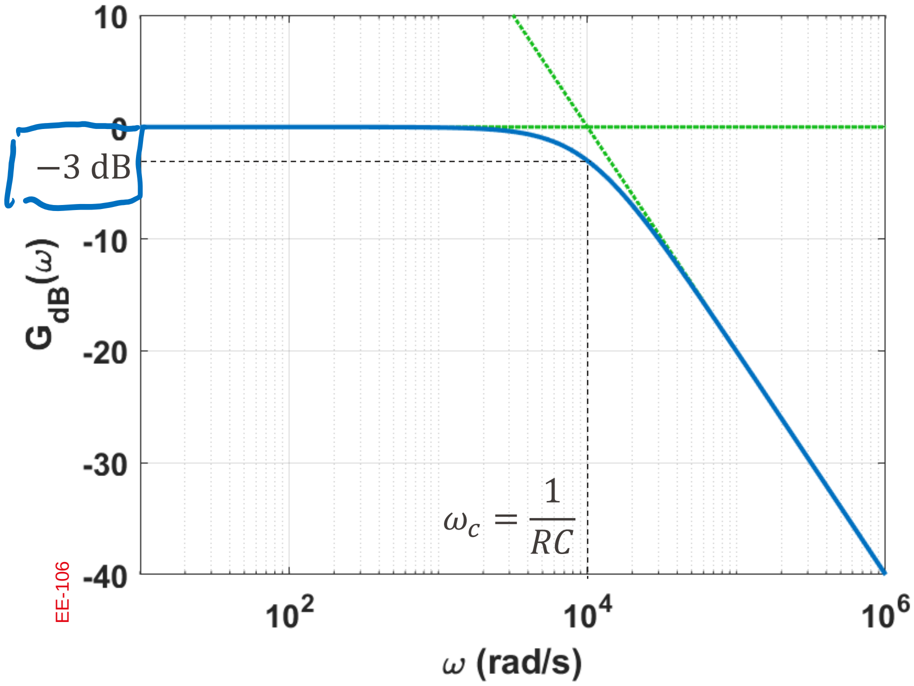
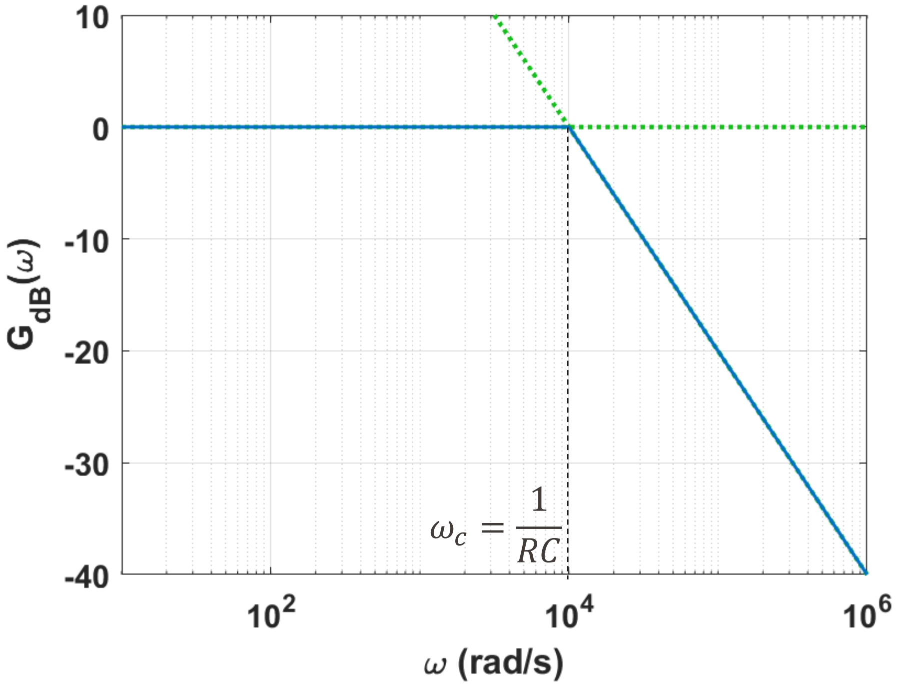


Diagramme asymptotique



C. Lafforgue

Diagramme de Bode

- On s'intéresse ici aux fonctions de transfert de la forme:

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\ldots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^L\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}\right)\ldots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

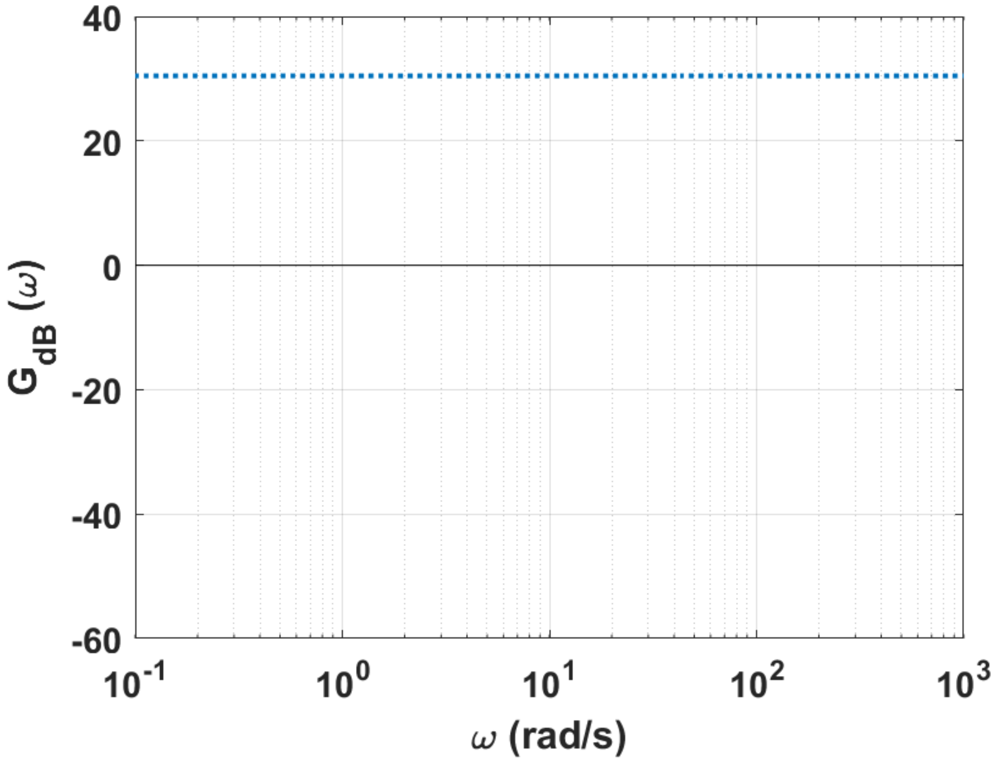
- Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaitre quelques formes simples:

$$K \; ; \frac{1}{(j\omega)^L} \; ; \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \; ; \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Diagramme de Bode – Constante K

$|\underline{H}(\omega)| = K$

$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(K)$



EPFL

Diagramme de Bode – Terme $\dfrac{1}{(j\omega)^L}$ avec $L > 0$

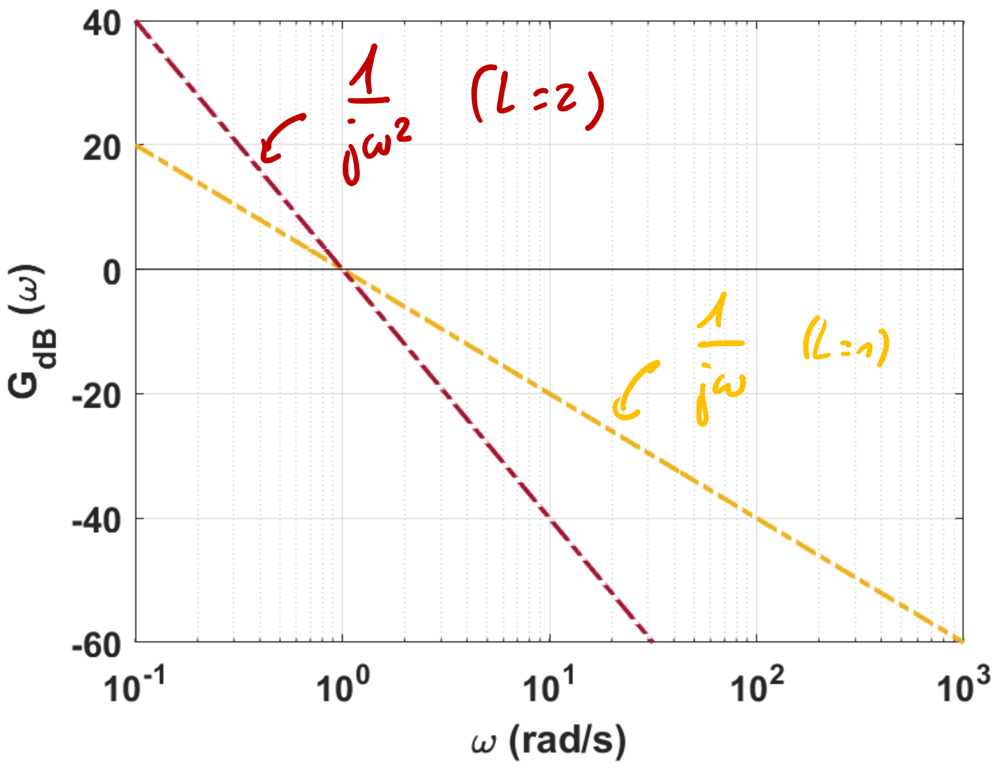
$L \in \mathbb{Z}$

C. Lafforgue

$|\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\omega^L}$

$\Rightarrow G_{dB}(\omega) = -20\log_{10}(\omega^L)$

$G_{dB}(\omega) = -20 \cdot L \cdot \underbrace{\log_{10}(\omega)}$

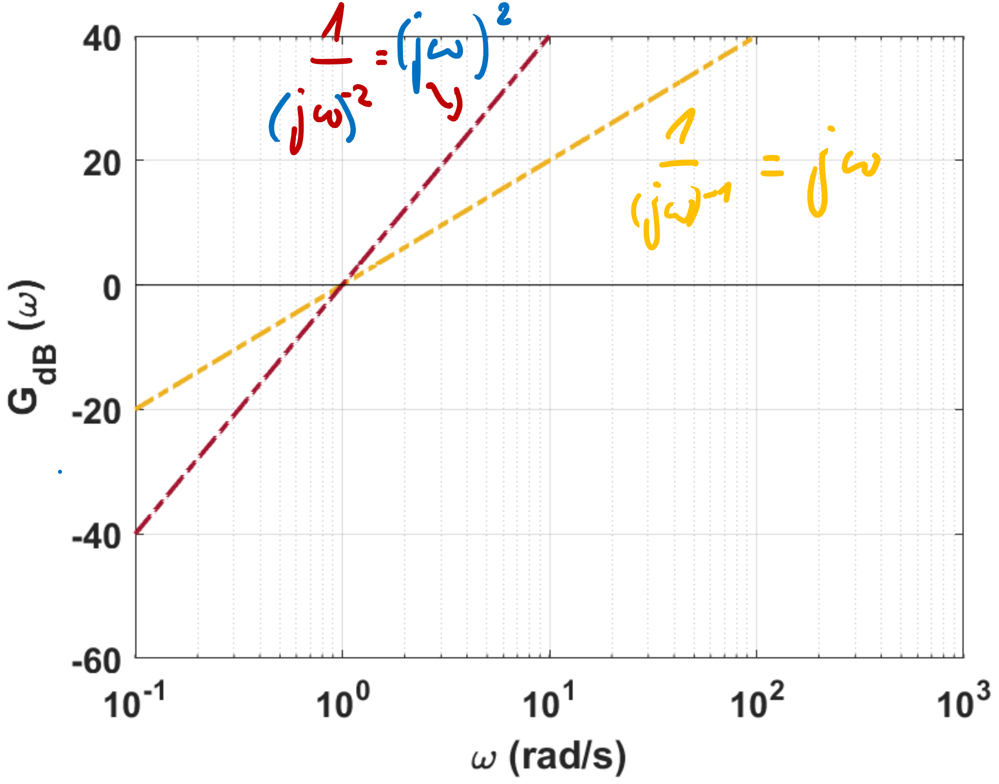


EPFL

Diagramme de Bode – Terme $\dfrac{1}{(j\omega)^L}$ avec $L < 0$

$|\underline{H}(\omega)| = \dfrac{1}{\omega^L}$

$\Rightarrow G_{dB}(\omega) = -20 \cdot L \cdot \log_{10}(\omega)$



C. Lafforgue

EPFL

Diagramme de Bode – Terme $1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}$

C. Lafforgue

$$|\underline{H}(\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$\omega \to 0$; $G_{dB}(\omega) \simeq 0\,dB$

$\omega \to +\infty$; $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \simeq \frac{\omega}{\omega_0}$

$$G_{dB}(\omega) \simeq 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

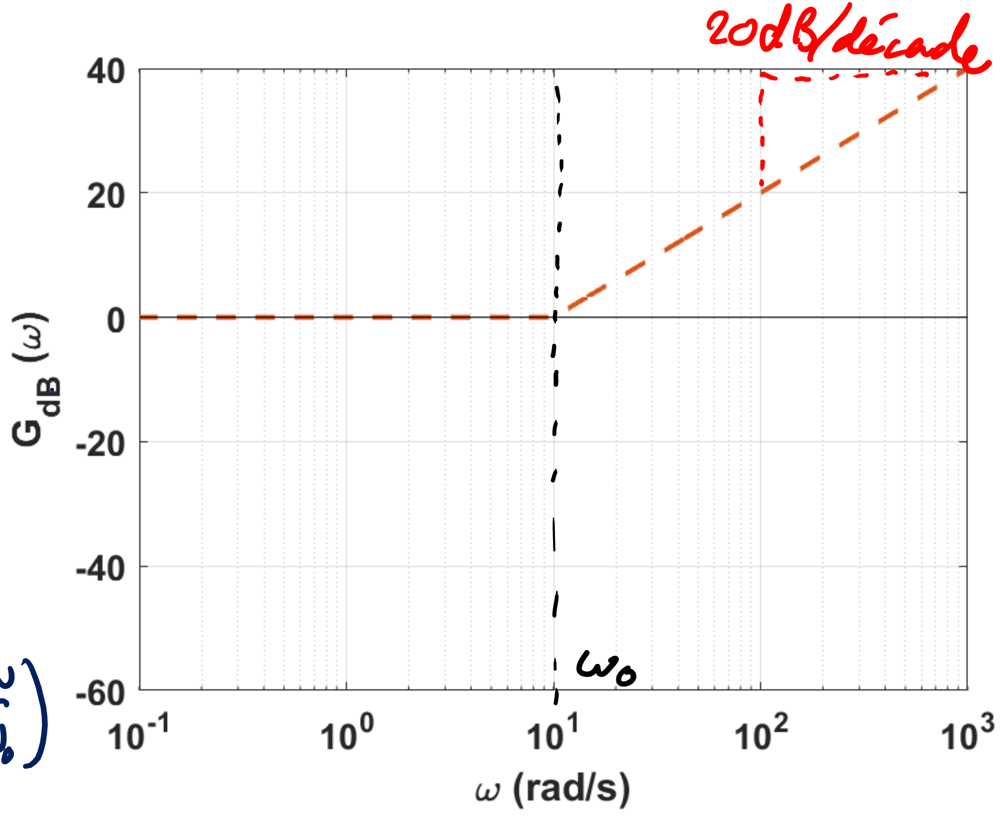


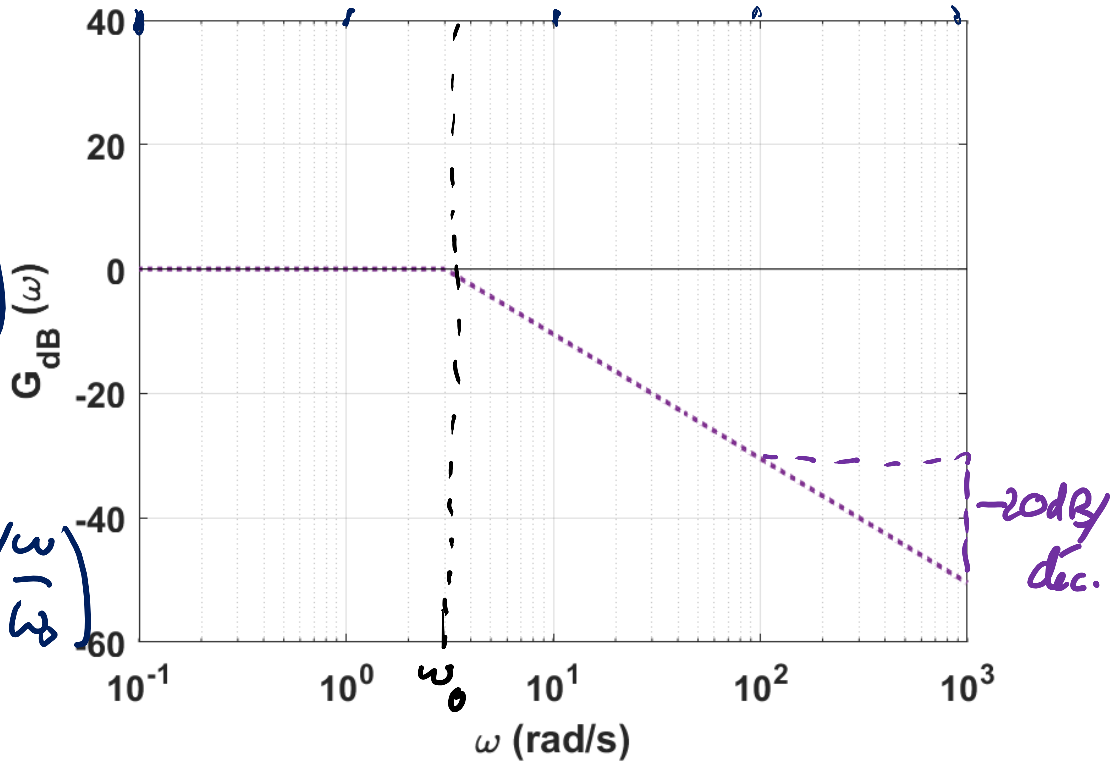
Diagramme de Bode – Terme $\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

C. Lafforgue

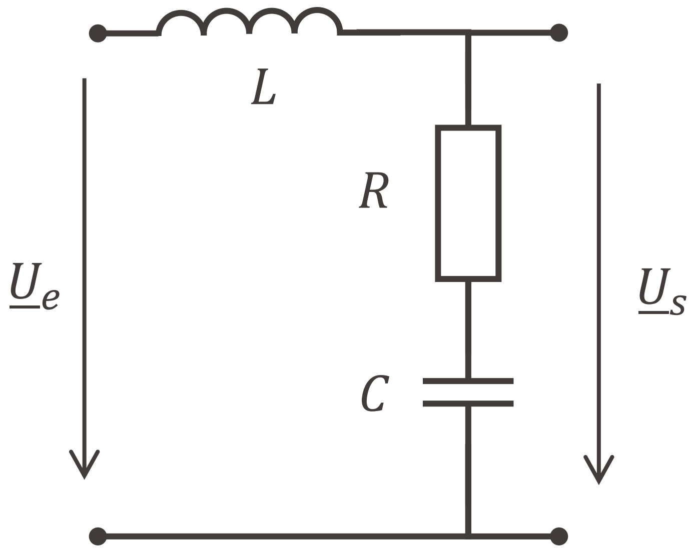
$$|\underline{H}(\omega)| : \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{dB}(\omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\omega \to +\infty \ ; \ G_{dB}(\omega) \simeq -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$



Exemple



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$R = 10\ \Omega$
$C = 100\ \mathrm{mF}$
$L = 200\ \mathrm{mH}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega - 0.02\omega^2}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{1}}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\frac{\omega}{1}\right|\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{5}\right|}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$

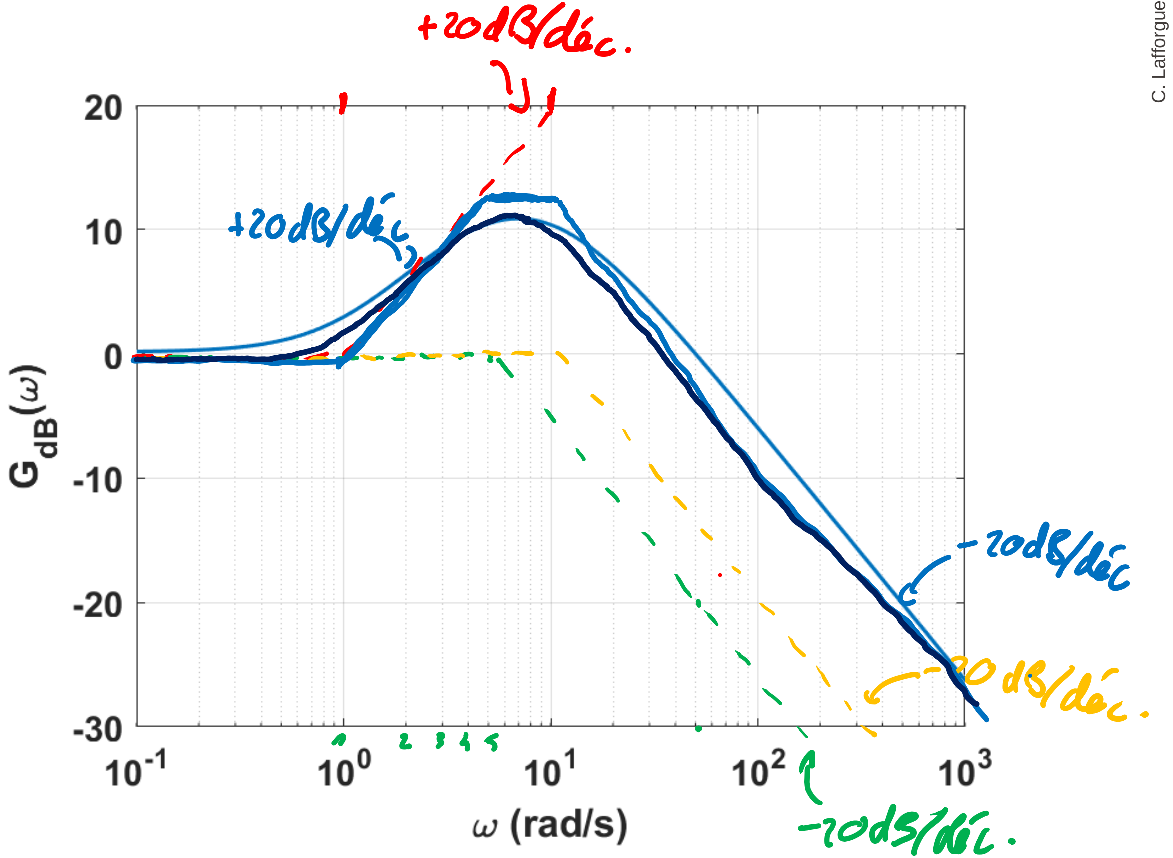
Exemple

C. Lafforgue

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left(\left|1 + j\frac{\omega}{1}\right|\right)$$

$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{5}\right|}\right)$$

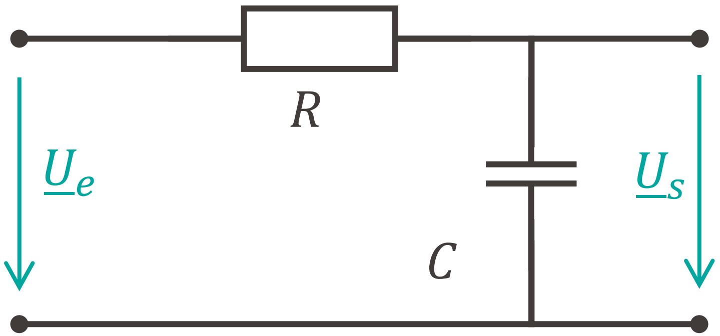
$$+20\log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|}\right)$$

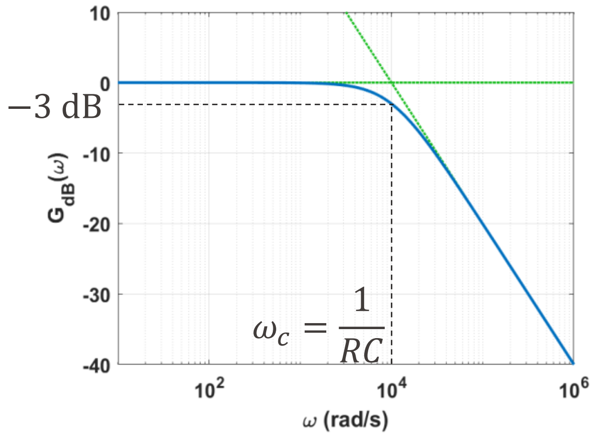


C. Lafforgue

Points clés

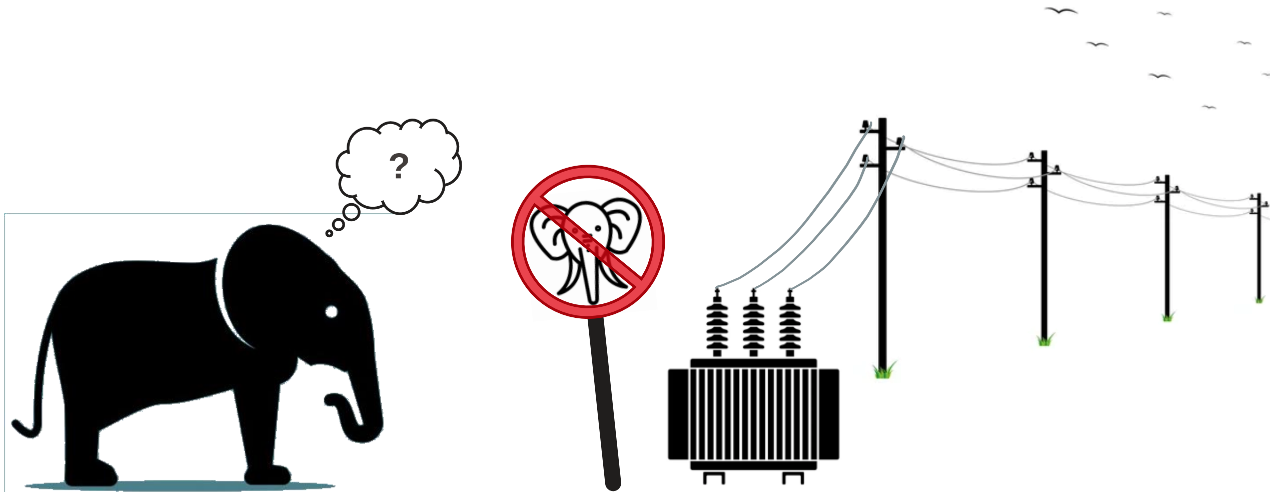
- Le diagramme de Bode est un outil graphique pour étudier un système en régime permanent sinusoïdal
  - On trace la gain et la phase en échelle logarithmique
- On peut facilement tracer un diagramme asymptotique
  - Uniquement en traçant des droites
- On définit une nouvelle unité: le décibel (dB)





C. Lafforgue

Puissance en régime permanent sinusoïdal



Puissance instantanée

$\cos(a)\cos(b)$
$= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

$a = \omega t + \alpha$; $b = \omega t + \beta$

$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$; $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow UI = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}$

- En régime statique, on a vu: $P = UI$
- On définit la puissance instantanée: $p(t) = u(t)i(t)$
- Avec $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$ et $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta)$:

$$p(t) = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$$

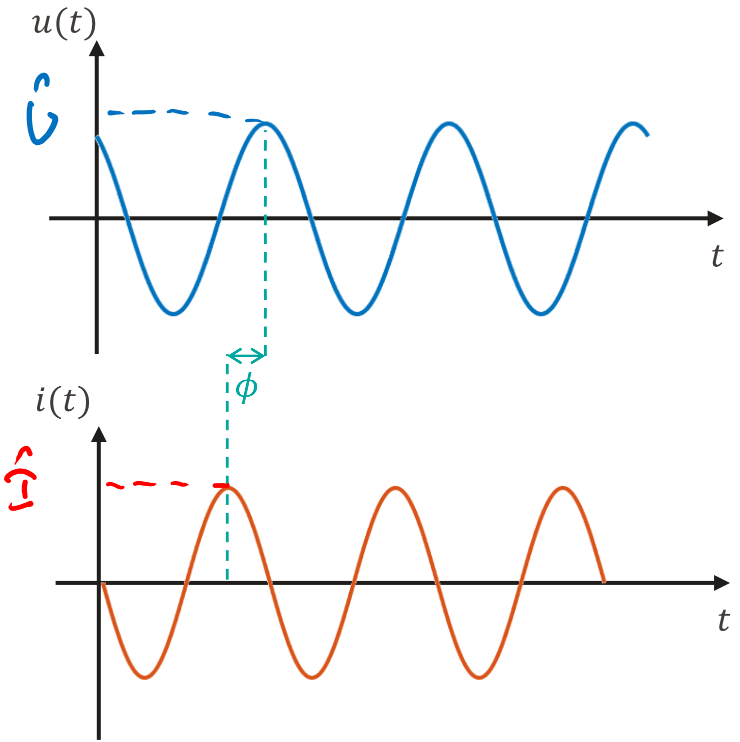
$$p(t) = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(\overbrace{\alpha - \beta}^{\phi}) + \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

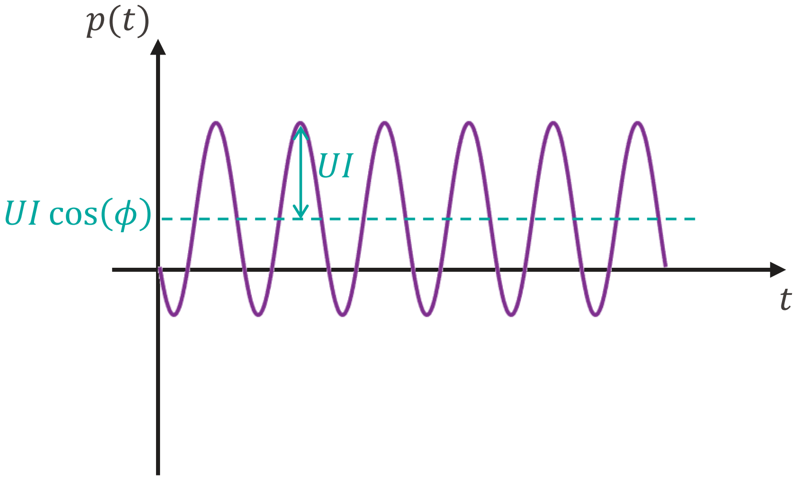
Constante **Sinusoïde de fréquence 2ω**

$$p(t) = UI\cos(\phi) + UI\cos(2\omega t + 2\alpha - \phi)$$

Puissance instantanée

C. Lafforgue





Puissance instantanée

- La puissance moyenne dépend du déphasage

- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI

Puissance instantanée

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$a = 2\omega t + 2\alpha \; ; \; b = \phi$

- La puissance moyenne dépend du déphasage
- La puissance instantanée oscille avec une amplitude UI
- On peut décomposer la puissance instantanée en deux parties:
  - Une partie toujours positive (puissance consommée)
  - Une partie alternative (à valeur moyenne nulle)

$$p(t) = UI\cos(\phi) + UI\cos(2\omega t + 2\alpha - \phi) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = UI\cos(\phi) + UI[\cos(2\omega t + 2\alpha)\cos(\phi) + \sin(2\omega t + 2\alpha)\sin(\phi)] \qquad (2)$$

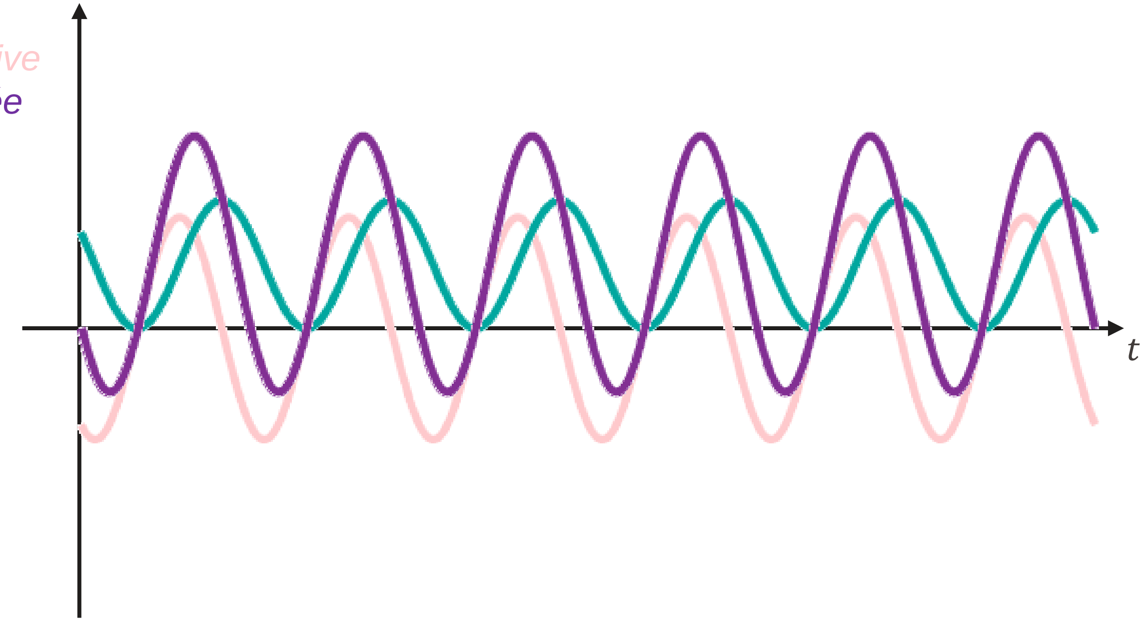
$$\Leftrightarrow p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{>0} + UI\sin(\phi)\sin(2\omega t + 2\alpha)$$

Composante pulsée — Composante alternative

C. Lafforgue

Puissance instantanée

$$p(t) = UI\cos(\phi)[1+\cos(2\omega t+2\alpha)] + UI\sin(\phi)\sin(2\omega t+2\alpha)$$



Puissance active

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t+2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance active P** la valeur moyenne de la puissance instantanée

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$P = UI\cos(\phi)$$

- L'unité est le watt (W)

- Elle correspond à l'énergie convertible en travail ou en chaleur
  - Elle est maximale pour $\phi = 0$
  - Elle est nulle pour $\phi = \pm\pi/2$

Puissance réactive

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t+2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance réactive *Q*** l'amplitude de composante alternative

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$Q = \underset{[V]}{U}\,\underset{[A]}{I}\sin(\phi)$$

- L'unité est le volt-ampère réactif (VAr)

- Elle correspond une énergie non convertible
  - Elle est maximale pour $\phi = \pm\pi/2$
  - Elle est nulle pour $\phi = 0$

Puissance apparente

$$p(t) = \underbrace{UI\cos(\phi)[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]}_{\text{Composante pulsée}} + \underbrace{UI\sin(\phi)\sin(2\omega t+2\alpha)}_{\text{Composante alternative}}$$

- On appelle **puissance apparente *S*** l'amplitude de des fluctuations de la puissance instantanée par rapport à sa valeur moyenne

- En régime sinusoïdal, on a donc:

$$S = UI$$

[V] [A]

- L'unité est le volt-ampère (VA)

- Elle est liée à P et Q par:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$P = UI\cos\phi$

$Q = UI\sin\phi$

$P^2 + Q^2 = (UI)^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$

$= (UI)^2$

$= S$

C. Lafforgue

Puissance complexe

- On définit la puissance complexe par:

$P = UI\cos\phi$

$Q = UI\sin\phi$

$$\underline{S} = P + jQ$$

- On peut aussi écrire:

$$\underline{S} = UI\cos(\phi) + jUI\sin(\phi) = UIe^{j\phi}$$

- Cette grandeur contient toutes les informations sur la puissance instantanée:
  - $\mathrm{Re}(\underline{S}) = P$; $\mathrm{Im}(\underline{S}) = Q$
  - $|\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$
  - $\arg(\underline{S}) = \phi$

Puissance complexe

- Enfin, on a aussi:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$$

- Pour une impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{S} = \underline{Z}\ I^2 = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

- En posant $\underline{Z} = R + jX$:

$$\underline{S} = \underbrace{RI^2}_{\text{effet Joule}} + jXI^2$$

$$P = UI\cos(\alpha - \beta)$$

$$\underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j\alpha}e^{-j\beta}$$

$$= UIe^{j(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\underline{U}\underline{I}^*) = UI\cos(\alpha - \beta)$$

Que vaut la puissance apparente?

$\hat{U} = 20\ V$

$S = UI = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} = \frac{20 \times 12}{2} = 120\ VA$

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\hat{I} = 12\ A$

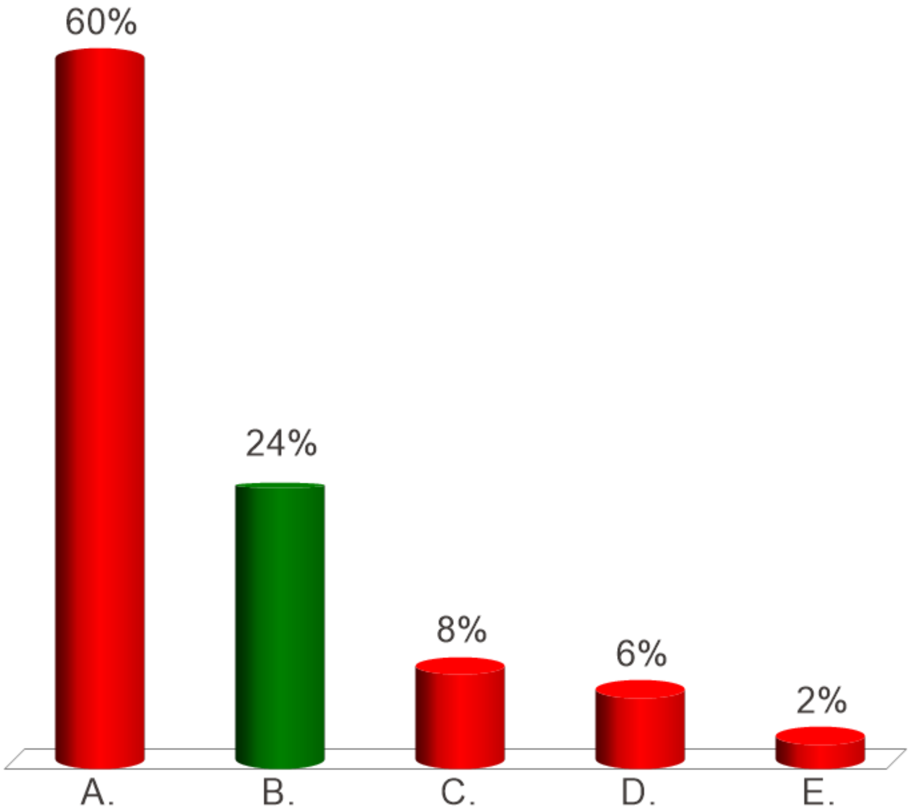
A. $S = 240\ VA$

B. $S = 120\ VA$

C. $S = 207.8\ VA$

D. $S = 103.9\ VA$

E. $S = 60\ VA$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

Que vaut la puissance active?

C. Lafforgue

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\hat{U}$, α, $\hat{I}$, β

$P = UI\cos(\phi) = UI\cos(\alpha - \beta)$

$\phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$: $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P = \frac{20 \times 12}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

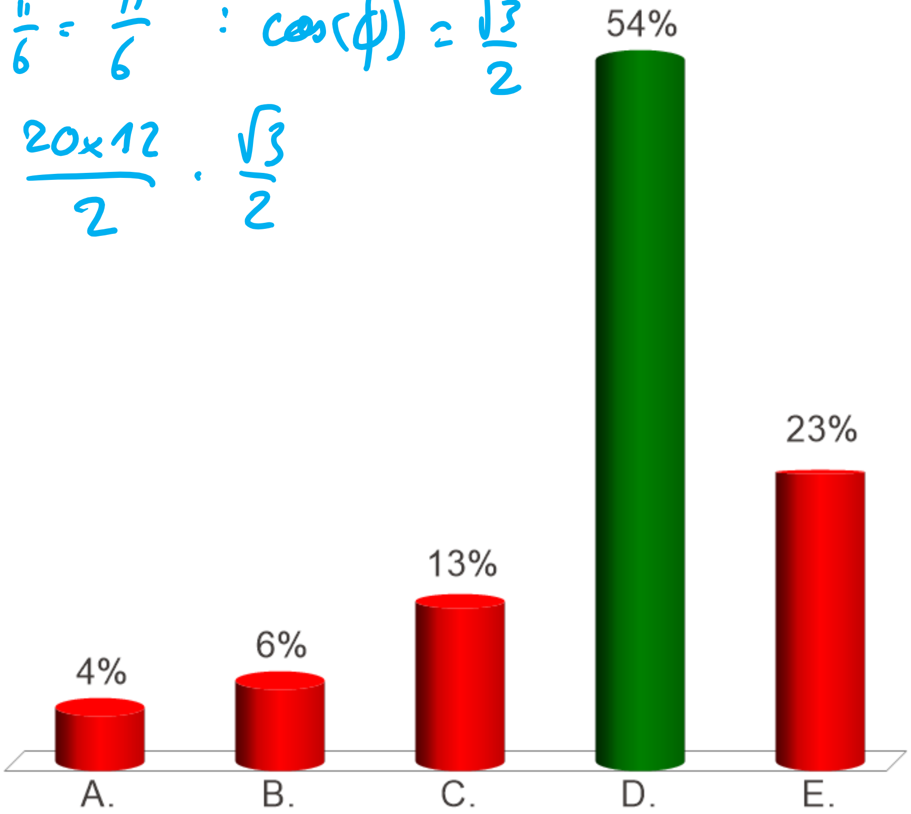
A. $P = 240$ W

B. $P = 120$ W

C. $P = 207.8$ W

D. $P = 103.9$ W

E. $P = 60$ W



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

C. Lafforgue

EPFL

Que vaut la puissance réactive?

$$u(t) = 20\cos\left(5000t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$i(t) = 12\cos\left(5000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A. $Q = 240\ \text{VAr}$

B. $Q = 120\ \text{VAr}$

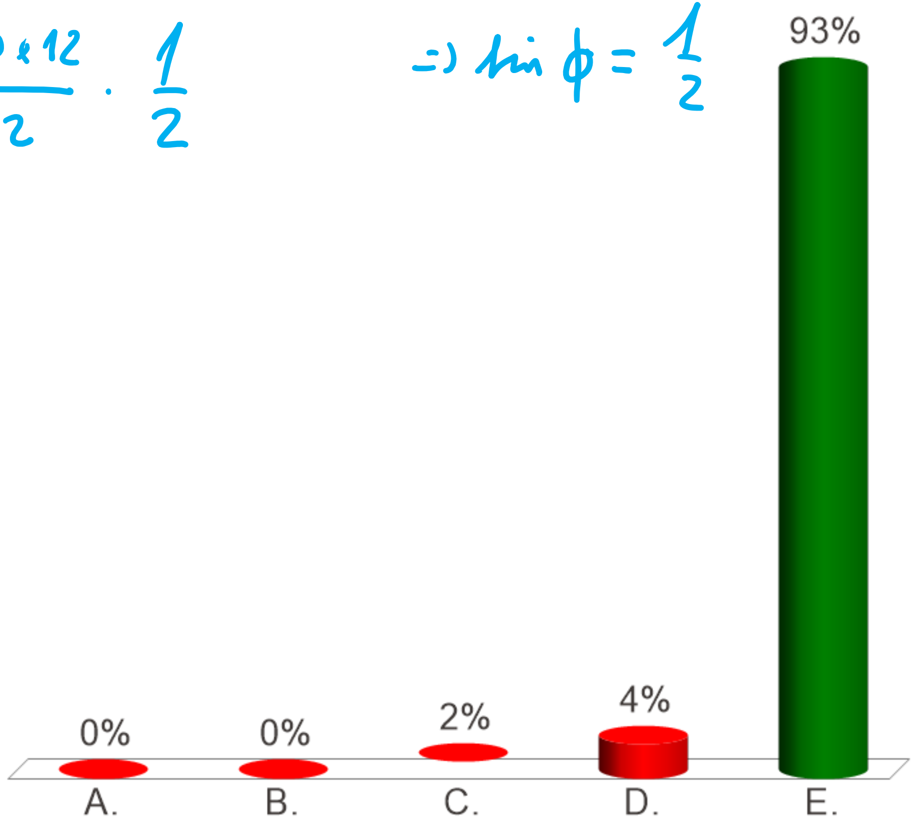
C. $Q = 207.8\ \text{VAr}$

D. $Q = 103.9\ \text{VAr}$

✓ E. $Q = 60\ \text{VAr}$

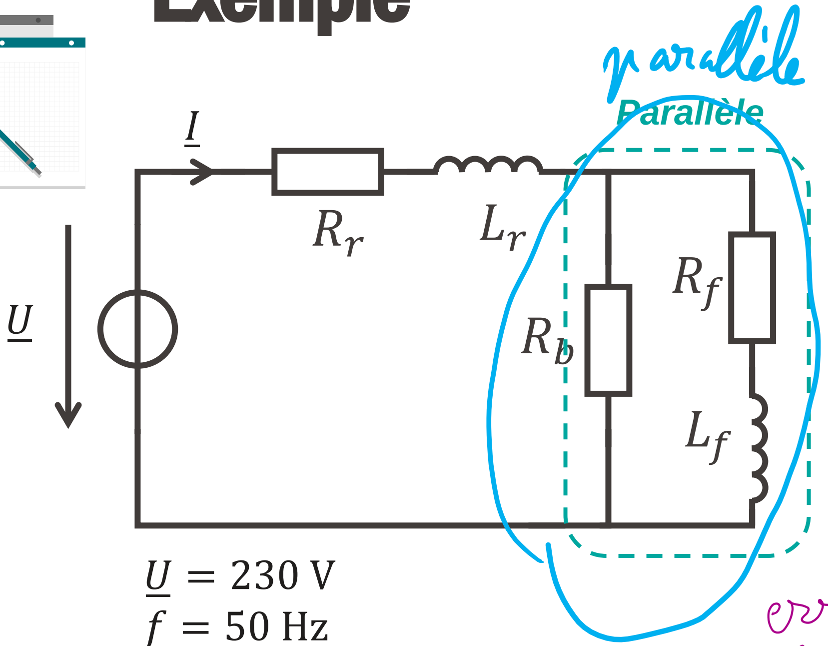
$$Q = UI\sin(\phi) \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$$

$$Q = \frac{20 \times 12}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \sin\phi = \frac{1}{2}$$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Exemple



$\underline{U} = 230$ V
$f = 50$ Hz

$$Z_p = \frac{R_b(R_f + jL_f\omega)}{R_b + R_f + jL_f\omega}$$

$$= \frac{R_b(R_f + jL_f\omega)\times(R_b+R_f - jL_f\omega)}{(R_b+R_f)^2 + (L_f\omega)^2}$$

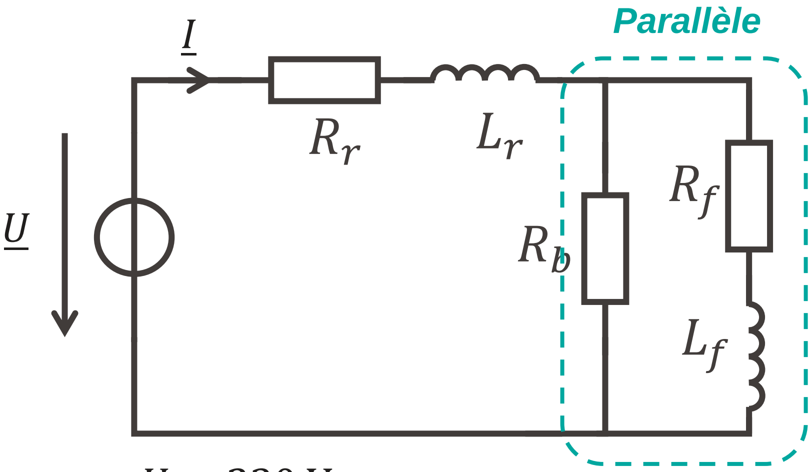
erreur faite à l'oral

$$= \frac{\cancel{R_f}\ R_b}{(R_b+R_f)^2+(L_f\omega)^2}\left[R_f(R_b+R_f) + (L_f\omega)^2 + jL_f\omega(R_b+R_f-R_f)\right]$$

$$= \frac{\cancel{R_f}\ R_b}{(R_b+R_f)^2+(L_f\omega)^2}\left[(R_f(R_b+R_f)+(L_f\omega)^2 + jL_f R_b\omega\right]$$

C. Lafforgue

Exemple



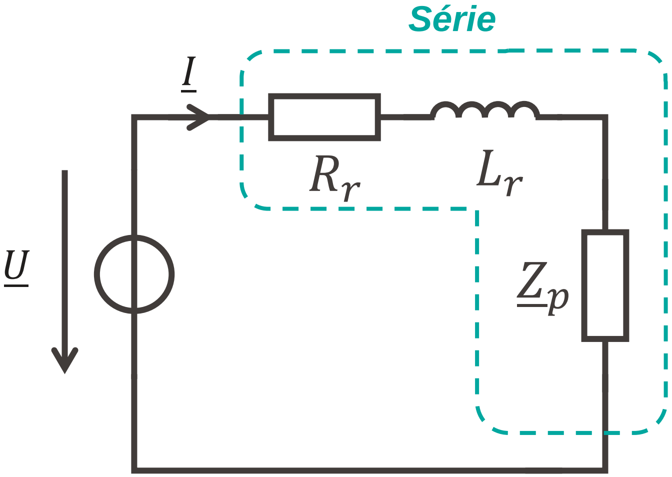
$\underline{U} = 230\ \text{V}$
$f = 50\ \text{Hz}$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left(R_f + jL_f\omega\right)}{R_b + R_f + jL_f\omega}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left(R_f + jL_f\omega\right)\left(R_b + R_f - jL_f\omega\right)}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_b\left[R_f\left(R_b + R_f\right) + \left(L_f\omega\right)^2\right] + jR_b^2 L_f\omega}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}$$

Exemple



$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$$\underline{Z}_s = R_r + jL_r\omega + \underline{Z}_p$$

$$\underline{Z}_s = R_r + jL_r\omega + \frac{R_b\left[R_f\left(R_b + R_f\right) + \left(L_f\omega\right)^2\right] + jR_b^2L_f\omega}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}$$

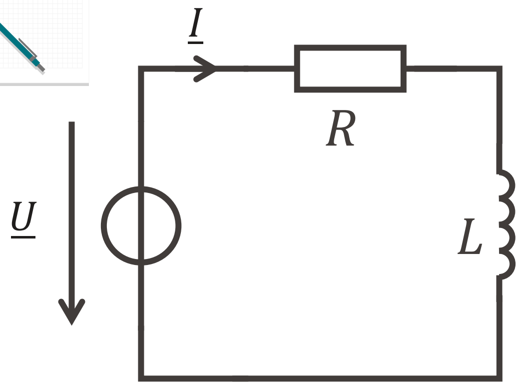
$$\underline{Z}_s = R_r + \left.\frac{R_b\left[R_f\left(R_b + R_f\right) + \left(L_f\omega\right)^2\right]}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}\right\} R$$

$$\left. +j\left(L_r + \frac{R_b^2L_f\omega}{\left(R_b + R_f\right)^2 + \left(L_f\omega\right)^2}\right)\omega \right\} jL\omega$$

C. Lafforgue

EPFL

Exemple



$\underline{U} = 230$ V
$R = 5\ \Omega$
$L = 10$ mH
$f = 50$ Hz

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega} \Rightarrow \underline{S} = \frac{\underline{U} \cdot \underline{U}^*}{R - jL\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{S} = U^2 \cdot \frac{1}{R - jL\omega} = U^2 \cdot \frac{R + jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\underline{S} = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} U^2 + j \cdot \frac{L\omega}{R^2 + (L\omega)^2} U^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{RU^2}{R^2 + (L\omega)^2} \simeq 7{,}6\ \text{kW} \quad ; \quad Q = \frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2} \simeq 4{,}8\ \text{kVAr}$$

Facteur de puissance

- Le facteur de puissance est le rapport de la puissance active et de la puissance apparente:

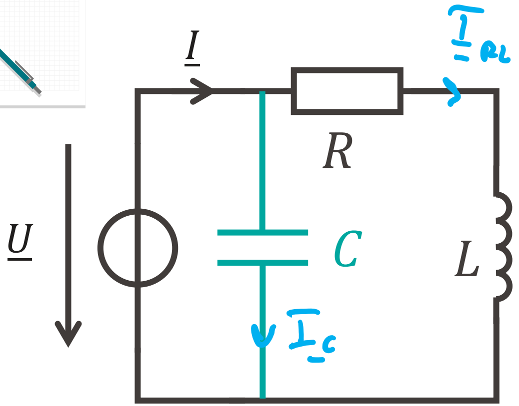
$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

- Pour une charge purement résistive, $\phi = 0$ donc $FP = 1$

- En présence d’une charge réactive, le facteur de puissance diminue

- Cela augmente les pertes au niveau du réseau électrique (et peut alors augmenter les coûts de l’électricité)

Exemple: correction de facteur de puissance



$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$
$R = 5\ \Omega$
$L = 10\ \mathrm{mH}$
$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}(\underline{I}_{RL}^* + \underline{I}_c^*)$$

$$\underline{S} = \underbrace{\underline{U}\,\underline{I}_{RL}^*} + \underline{U}\,\underline{I}_c^*$$

$$\underline{S}_{RL} \simeq 7{,}6\cdot 10^3 + j\,4{,}8\cdot 10^3$$

$$\underline{U}\,\underline{I}_c^* = \underline{U}\cdot(-jC\omega\,\underline{U}^*) = -jC\omega U^2$$

$$\left(\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}\right)$$

$$\underline{Y}_c = jC\omega$$

$$\underline{S} = 7{,}6\cdot 10^3 + j(4{,}8\cdot 10^3 - C\omega U^2)$$

Que doit valoir C pour annuler la puissance réactive?

C. Lafforgue

$$f = 50 \text{ Hz}$$
$$U = 230 \text{ V}$$
$$P = 7.59 \text{ kW}$$
$$Q = 4.77 \text{ kVAr}$$
$$S = 8.96 \text{ kVA}$$

A. $C = 1.8 \text{ mF}$

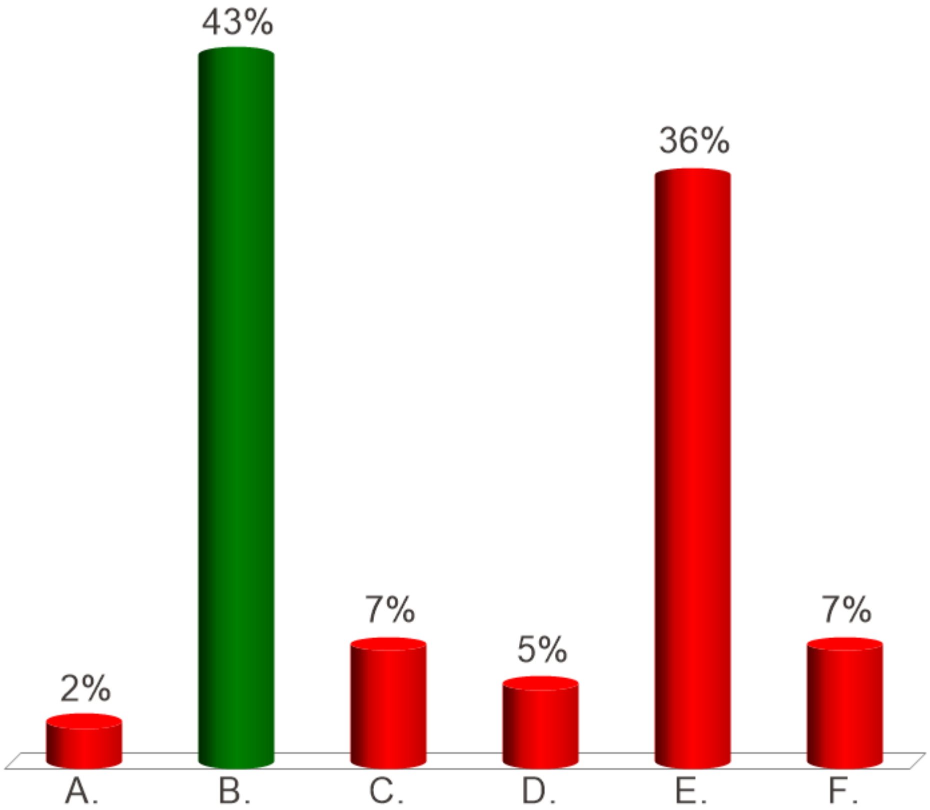
B. $C = 287 \text{ µF}$

C. $C = 3.5 \text{ kF}$

D. $C = 555 \text{ F}$

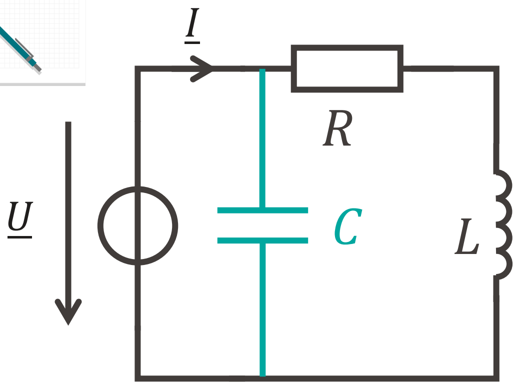
E. $C = 35.3 \text{ mF}$

F. $C = 222 \text{ mF}$



Session ID: **ee106poll**
URL: **ttpoll.eu**

Exemple: correction de facteur de puissance



$$\underline{U} = 230\ \mathrm{V}$$
$$R = 5\ \Omega$$
$$L = 10\ \mathrm{mH}$$
$$f = 50\ \mathrm{Hz}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{RL} - jC\omega U^2 = \overbrace{\frac{RU^2}{R^2 + (L\omega)^2}}^{\sim 1{,}6\,\mathrm{kW}} + j\left(\overbrace{\frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2}}^{\sim 4{,}8\,\mathrm{kVAr}} - C\omega U^2\right)$$

$$Q = 0 \iff C\omega U^2 = \frac{L\omega U^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\iff C = \frac{4{,}8 \cdot 10^3 \;\; Q_{RL}}{\underbrace{2\pi \cdot 50}_{\omega} \cdot \underbrace{230^2}_{U^2}}$$

$$\iff C \simeq 287\ \mu\mathrm{F}$$

Points clés

- En régime permanent sinusoïdal, on définit une puissance complexe:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = P + jQ$$

  - P est la puissance active, en W: puissance convertie
  - Q est la puissance réactive, en VAr: puissance alternative
  - $S = |\underline{S}|$ est la puissance apparente, en VA

- La qualité d’un système électrique peut être quantifiée par le facteur de puissance:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos(\phi)$$

Merci pour votre attention

R. Dufy, « La fée électricité »
Musée d'art moderne, Paris