Laboratoire d'électrotechnique
Science et génie des matériaux
Bachelor semestre 2
2025

Noms : ....
Prénoms : ....
SCIPER : ....
Date : ....

4ème séance

CONDENSATEUR ET INDUCTANCE SOUS TENSION RECTANGULAIRE

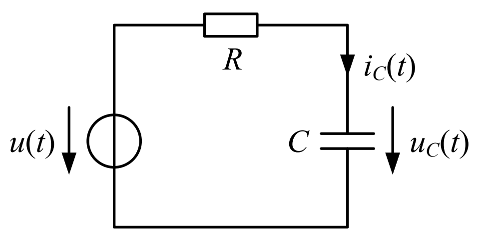
A. OBJECTIFS

- Étude de la charge et de la décharge du condensateur sous tension rectangulaire
- Étude de la charge et de la décharge de l'inductance sous tension rectangulaire

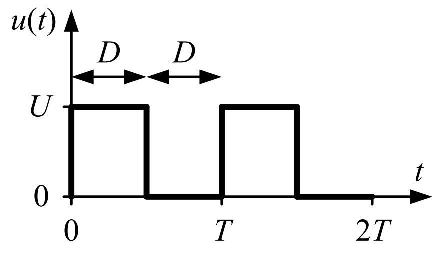
B. LABORATOIRE

1. Charge et décharge du condensateur sous tension rectangulaire

Le schéma de principe est le suivant :



La tension $u(t)$ fournie par le générateur de fonctions est un signal rectangulaire de fréquence f et d'amplitude U :



Pendant la demi-période positive, le condensateur et la résistance sont soumis à une tension continue $u(t)=U$.

Le condensateur stocke de l'énergie électrostatique. Des charges provenant du générateur circulent à travers la résistance R pour être stockées dans le condensateur C jusqu'à la tension $u_C(t)$ à ses bornes soit égale à la tension $u(t)=U$ de la source. Le courant $i_C(t)$ cesse dès lors de circuler.

La rapidité avec laquelle le condensateur se charge dépend de sa capacité C et du courant $i_C(t)$ qui circule et donc de R. On peut donc en déduire raisonnablement que la charge sera d'autant plus rapide que R est petite (le courant sera plus grand) et C plus petite aussi (moins de charges à accumuler pour "remplir" le condensateur).

Un autre facteur limitant de la charge est la durée pendant laquelle la tension d'alimentation est positive, c'est à dire la durée du créneau positif. La charge complète ou incomplète du condensateur dépend donc aussi de la fréquence f du signal d'excitation.

Pendant la demi-période suivante, le condensateur est soumis à une tension $u(t)=0$.

Le condensateur se décharge à travers la résistance R et un courant $i_C(t)$ circule jusqu'à la tension à ses bornes soit égale à la tension $u(t)=0$ de la source. Le courant $i_C(t)$ cesse dès lors de circuler.

1.1. Équations et Constante de temps du circuit

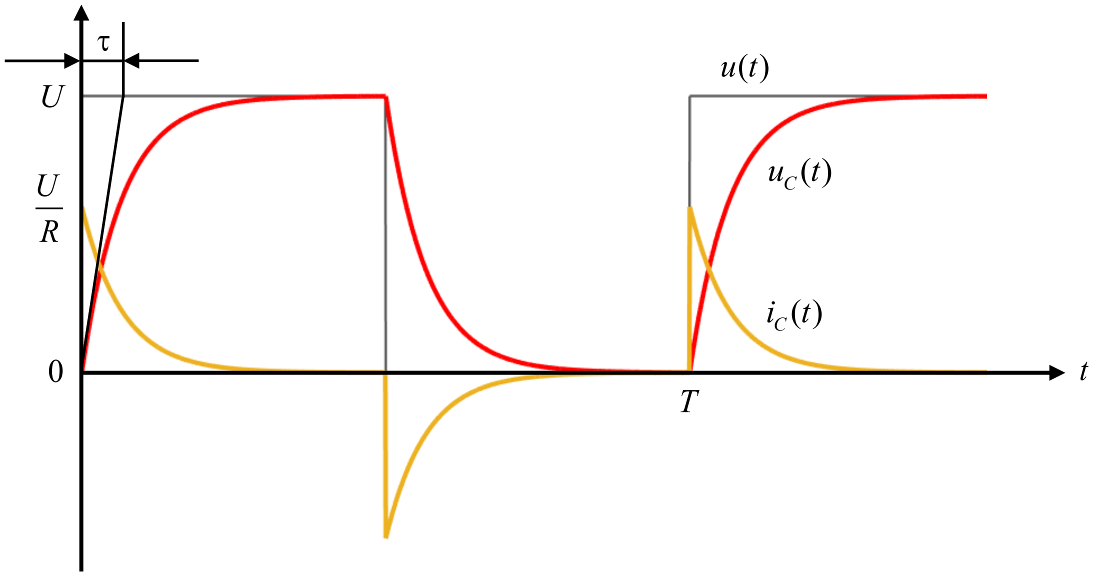
Les équations qui décrivent le comportement de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur C et du courant $i_C(t)$ qui le traverse, sont données par (voir annexes A.1 et A.2)

Charge :	$u_C(t)=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})=U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$	$i_C(t)=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
Décharge :	$u_C(t)=U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$i_C(t)=-\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=-\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

Il s'agit d'exponentielles dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$\tau=RC$ (en secondes)

La figure suivante illustre le comportement de la tension $u_C(t)$ et du courant $i_C(t)$



Le rapport

$$\frac{u_C(t)}{U}\cdot 100=(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot 100$$

Permet de calculer, en fonction du temps t et avec la constante de temps τ comme paramètre, la valeur en pourcent (%) de la charge du condensateur par rapport à la tension U.

Calculer les valeurs suivantes (sans les valeurs décimales) :

t [s]	$\frac{u_C(t)}{U}\cdot 100=(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot 100$ [%]
0	
τ	
2τ	
3τ	
4τ	
5τ	
10τ	

1.2. Application numérique

Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$f = \frac{1}{T} = 500 \text{ Hz}$$

$$R = 10 \text{ k}\Omega$$

$$C = 10 \text{ nF}$$

Calculer la valeur de la constante de temps τ :

$\tau =$ ....

Calculer la valeur en secondes de la demi-période de la tension $u(t)$:

$\frac{T}{2} =$ ....

Exprimer cette valeur par rapport à la constante de temps τ :

$\frac{T}{2} =$ ....

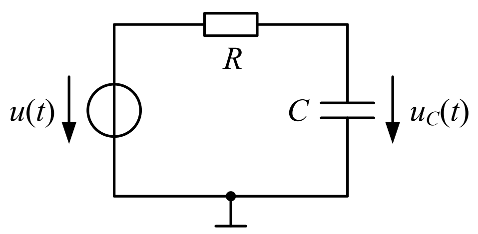
En fonction des valeurs ci-dessus et du tableau de la page 3, peut-on affirmer que la période de la tension $u(t)$ permet de charger et décharger complètement le condensateur C ?

☐ Oui

☐ Non

1.3. Observation des tensions $u(t)$ et $u_C(t)$

Schéma de montage :

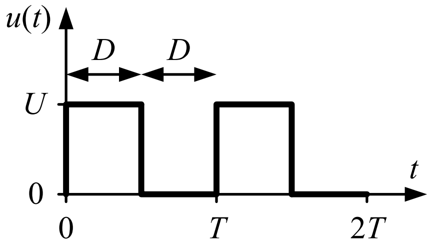


$u(t)$: Générateur de fonctions HMF2525

$R = 10 \text{ k}\Omega$

$C = 10 \text{ nF}$

La tension $u(t)$ fournie par le générateur de fonctions **HMF2525** est un signal rectangulaire de fréquence $f = 500\ \text{Hz}$ et d'amplitude $U = 1\ \text{V}$:



$$f = \frac{1}{T} = 500\ \text{Hz}$$

$$U = 1\ \text{V}$$

Pour obtenir la tension $u(t)$ ci-dessus, le générateur de fonctions **HMF2525** va effectuer la somme des deux signaux suivants :

- un signal rectangulaire qui varie autour de la valeur $0\ \text{V}$
- une tension continue (OFFSET)

Utiliser les paramètres ci-dessous pour configurer le générateur de fonctions **HMF2525**.

Attention au choix de la fonction !

Fonction	
Frequency	500 Hz

En tenant compte des caractéristiques du générateur de fonctions **HMF2525**, quelles valeurs doit-on choisir avec les menus **AMPLITUDE** et **OFFSET** ?

AMPLITUDE = ...

OFFSET = ...

Quelles touches faut-il activer pour délivrer correctement le signal (plusieurs réponses possibles) ?

- ☐ **OFFSET**
- ☐ **INVERT**
- ☐ **OUTPUT**
- ☐ **Aucune**

Visualiser les tensions $u(t)$ et $u_C(t)$ à l'oscilloscope.

Utiliser la configuration suivante pour l'oscilloscope :

Canal 1 (CH1)	$u(t)$		
Canal 2 (CH2)	$u_C(t)$		
Base de temps	$200\ \mu s$		
Trigger	SOURCE : $u(t)$ (Canal 1)	LEVEL : $500\ mV$	SLOPE : Flanc Montant

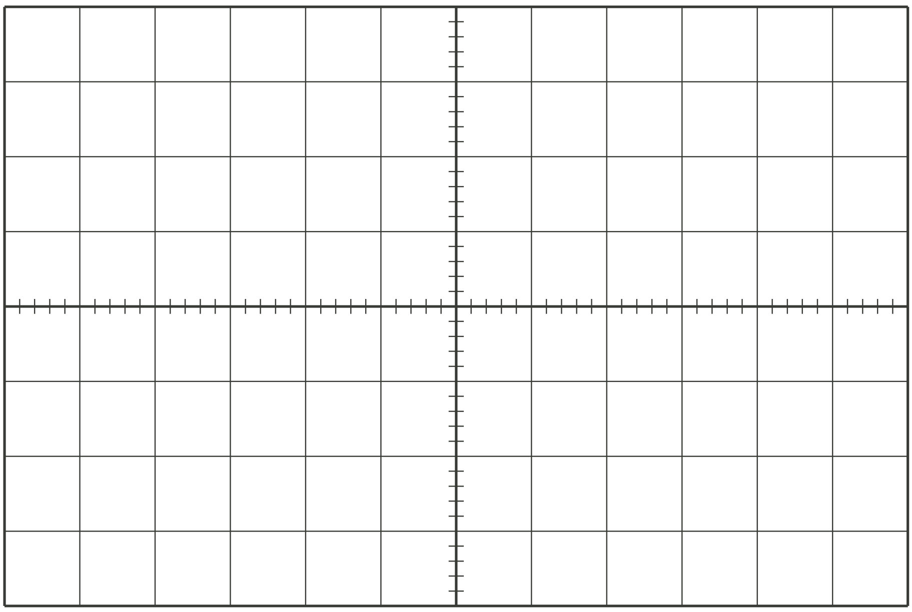
Quel couplage faut-t-il utiliser pour les **deux** canaux afin de visualiser les deux courbes correctement ?

- ☐ AC
- ☐ DC
- ☐ AC ou DC

Superposer le **GND** des deux courbes.

⚠ Choisir la position des deux courbes et leurs calibres en tension afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.

Reproduire les signaux observés sur le graphique ci-dessous.



1.4. Vérification de la constante de temps τ

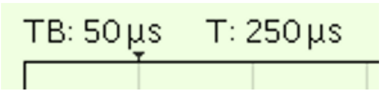
Calculer la valeur de la tension $u_C(t)$ pour $t = \tau$ et $U = 1\ \mathrm{V}$:

$$u_C(t) = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = \dots\dots\dots\dots \qquad (1)$$

Configuration pour vérifier à l'oscilloscope la valeur de la constante de temps τ :

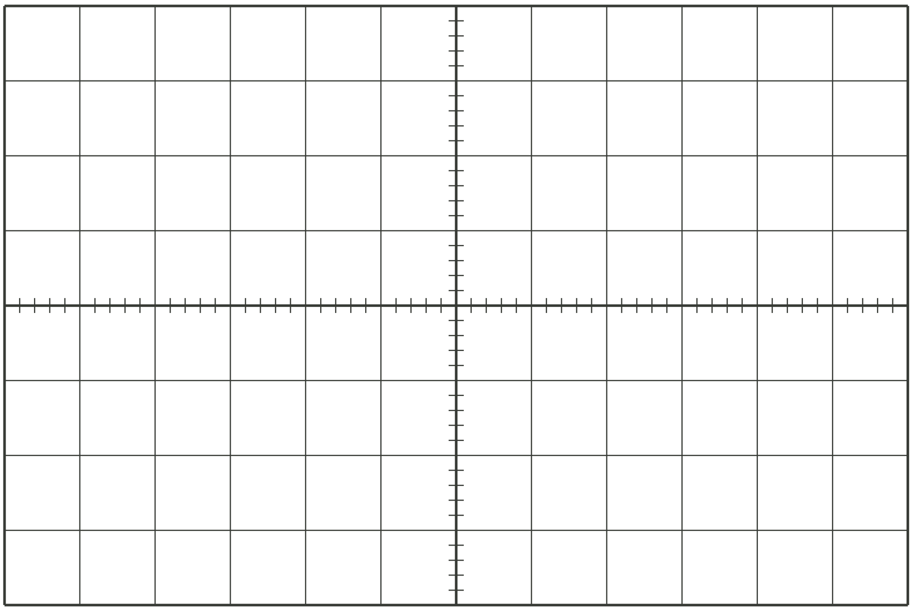
- Choisir **50 µs** pour le calibre de la base de temps
- Décaler les courbes observées vers la gauche.

  À l'écran de l'oscilloscope on visualise **T : 250 µs**

-  Le marquer du trigger  doit être toujours visible pour $u(t)$ (Canal 1)

Reproduire les signaux observés sur le graphique ci-dessous.



Effectuer les mesures à l'aide de l'outil **CURSOR MEASURE** de l'oscilloscope :

- L'outil permet d'utiliser deux points de mesure identifiés par deux lignes verticales
- On sélectionne le point de mesure (1, 2 ou les deux) en cliquant sur le bouton rotatif
- On déplace le point de mesure sélectionné en tournant le bouton rotatif
- Le type de mesure est choisi à l'aide du menu **CURSEUR (CURSOR)**

Mesures

1. Configurer le menu **CURSEUR (CURSOR)** :

TYPE MESURE (MEASURE TYPE)	Temps (Time)
SOURCE	CH2

2. Sélectionner le point de mesure $\boxed{\mathbf{1}}$ et le déplacer pour obtenir à l'écran de l'oscilloscope **t1 : 0 s**

3. Configurer le menu **CURSEUR (CURSOR)** :

TYPE MESURE (MEASURE TYPE)	Marquer–V (V–Marker)
SOURCE	CH2

4. Sélectionner le point de mesure $\boxed{\mathbf{2}}$ et le déplacer pour obtenir à l'écran de l'oscilloscope **V2 : (~ la valeur de la tension $u_C(t)$)** donnée par l'équation (1).

5. La mesure de $t = \tau$ à l'oscilloscope est donnée par la valeur de **Δt**

Indiquer la valeur de $t = \tau$ mesurée à l'oscilloscope :

$t = \tau =$ ....

En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier que la mesure de la constante de temps τ correspond à la valeur calculée.

1.5. Influence de l'amplitude U de la tension $u(t)$ sur la constante de temps τ

Pour étudier l'influence de l'amplitude de la tension $u(t)$ sur la constante de temps τ, on va utiliser la séquence suivante pour U :

1 V	2 V	5 V	10 V

⚠	**Garder le même schéma de montage et la même configuration de l'oscilloscope utilisés au paragraphe précédent.** **Vérifier qu'à l'écran de l'oscilloscope on visualise T : 250 µs et t1 : 0 s**

Configurer le menu **CURSEUR (CURSOR)** :

TYPE MESURE (MEASURE TYPE)	Marquer–V (V–Marker)
SOURCE	CH2

Pour chaque valeur de U :

1. À l'aide de l'équation (1), calculer l'amplitude de tension $u_C(t)$ pour $t = \tau$.

   Noter cette valeur dans le tableau du point 6 ci-dessous.

2. Modifier l'AMPLITUDE et l'OFFSET du générateur de fonctions **HMF2525**

3. Choisir les calibres en tension des deux courbes afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.

4. Sélectionner le point de mesure $\boxed{\mathbf{2}}$ et le déplacer pour obtenir à l'écran de l'oscilloscope **V2 : ~ Valeur de la tension $u_C(t)$ calculée au point 1 ci-dessus**.

5. La mesure de $t = \tau$ à l'oscilloscope est donnée par la valeur de **Δt**

6. Remplir le tableau suivant

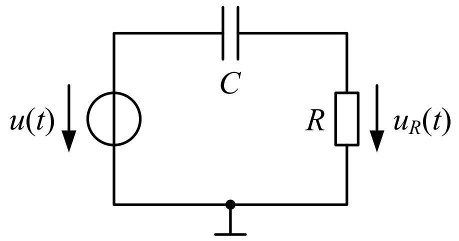
U [V]	$u_C(t) = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$ [V]	τ [µs] mesurée
1		
2		
5		
10		

L'amplitude U de la tension $u(t)$, influence-t-elle la constante de temps τ ?

- ☐ Oui
- ☐ Non

1.6. Observation des tensions $u(t)$ et $u_R(t)$

Schéma de montage :



$u(t)$: Générateur de fonctions HMF2525

$f = 500$ Hz

$U = 1$ V

$R = 10$ kΩ

$C = 10$ nF

Visualiser les tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ à l'oscilloscope.

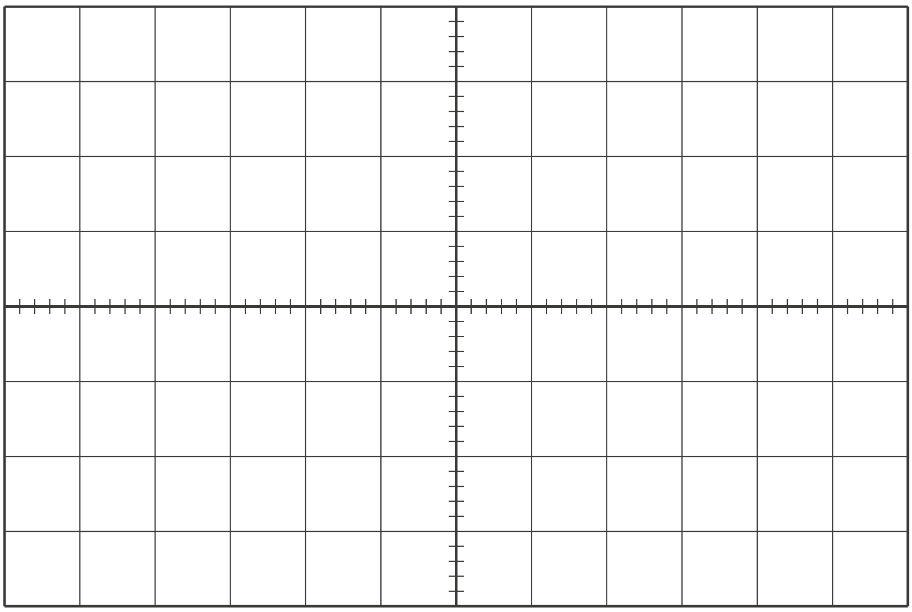
Utiliser la configuration suivante pour l'oscilloscope :

Canal 1 (CH1)	$u(t)$	Couplage : DC	
Canal 2 (CH2)	$u_R(t)$	Couplage : DC	
Base de temps	200 µs		
Trigger	SOURCE : $u(t)$ (Canal 1)	LEVEL : 500 mV	SLOPE : Flanc Montant

Superposer le **GND** des deux courbes.

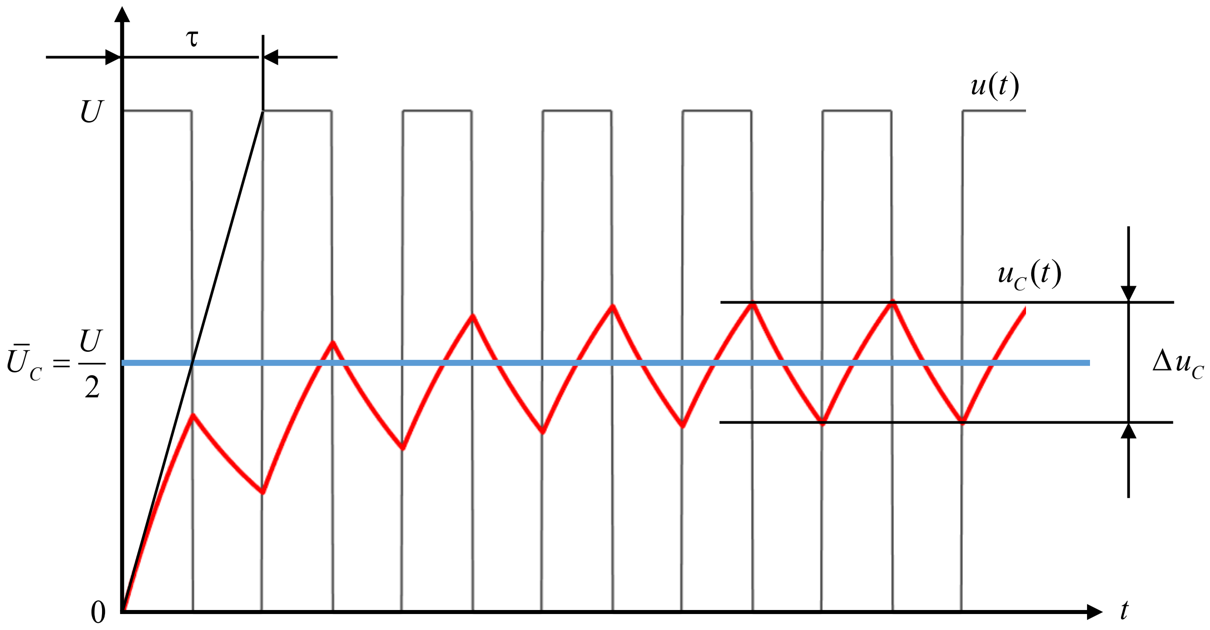
⚠ Choisir la position des deux courbes et leurs calibres en tension afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.

Reproduire les signaux observés sur le graphique ci-dessous.



1.7. Influence de la fréquence du signal d'excitation $u(t)$

La diminution de la période T du signal d'excitation $u(t)$ au-delà d'une certaine valeur, rend incomplète la charge et la décharge du condensateur. La tension $u_C(t)$ traverse un régime transitoire avant de se stabiliser à son régime d'équilibre, comme illustré sur la figure suivante



La tension $u_C(t)$ est en forme de dent de scie.

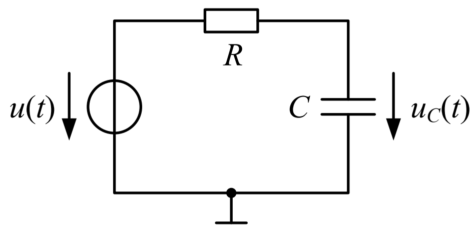
Elle est caractérisée par une ondulation Δu_C autour de la valeur moyenne $\bar{U}_C$.

Quelle que soit la valeur de la constante de temps τ par rapport à la période T, cette moyenne vaut toujours

$$\bar{U}_C = \frac{U}{2}$$

Travail à effectuer :

Schéma de montage :



$u(t)$: Générateur de fonctions HMF2525

$U = 1\ \mathrm{V}$

$R = 10\ \mathrm{k\Omega}$

$C = 10\ \mathrm{nF}$

Visualiser les tensions $u(t)$ et $u_C(t)$ à l'oscilloscope.

Utiliser la configuration suivante pour l'oscilloscope :

Canal 1 (CH1)	$u(t)$	Couplage : DC		
Canal 2 (CH2)	$u_C(t)$	Couplage : DC		
Trigger	SOURCE : $u(t)$ (Canal 1)	LEVEL : $500\ \mathrm{mV}$	SLOPE : Flanc Montant	

	Choisir pour le calibre de la base de temps, des valeurs qui évitent de visualiser sur l'écran de l'oscilloscope des impulsions parasites pour la tension $u_C(t)$. Leur absence permet d'assurer une mesure correcte.

Faire varier la fréquence f de la tension $u(t)$ et étudier la valeur moyenne $\bar{U}_C$ et l'ondulation Δu_C de la tension $u_C(t)$ à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.

Noter la configuration choisie pour la mesure de la valeur moyenne $\bar{U}_C$ dans le tableau suivant :

PLACE MESURE (MEAS. PLACE)	
MESURE 1 (MEASURE 1)	
TYPE	
SOURCE	

Noter la configuration choisie pour la mesure de l'ondulation Δu_C dans le tableau suivant :

PLACE MESURE (MEAS. PLACE)	
MESURE 2 (MEASURE 2)	
TYPE	
SOURCE	

Utiliser la séquence :

500 Hz	1 kHz	2 kHz	5 kHz	10 kHz	20 kHz

Pour chaque fréquence :

1. Vérifier l'absence d'impulsions parasites pour la tension $u_C(t)$
2. Mesurer la valeur moyenne $\bar{U}_C$ à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.
3. Mesurer l'ondulation Δu_C à l'aide du menu **AUTO MEASURE** de l'oscilloscope.

Reporter les valeurs dans le tableau ci-dessous.

f [Hz]	$\bar{U}_C$ [V]	Δu_C [V]
500		
1 k		
2 k		
5 k		
10 k		
20 k		

Calculer la valeur théorique de la valeur moyenne $\bar{U}_C$:

$\bar{U}_C =$ ....

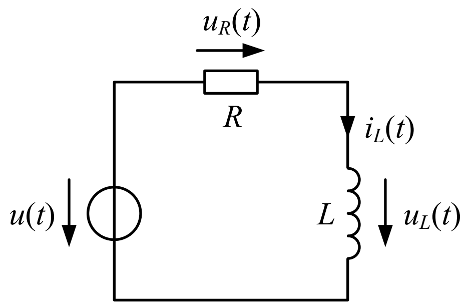
En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier que les mesures de la valeur moyenne $\bar{U}_C$ correspondent à la valeur calculée.

Quelle affirmation est-elle correcte ?

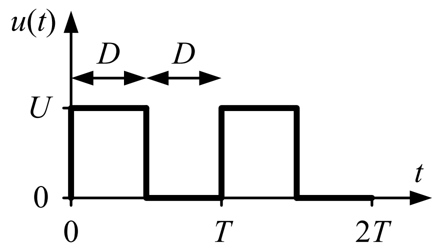
- ☐ La période T de $u(t)$ n'a aucune influence sur l'ondulation Δu_C
- ☐ Si la période T de $u(t)$ diminue, l'ondulation Δu_C augmente
- ☐ Si la période T de $u(t)$ diminue, l'ondulation Δu_C diminue

2. Charge et décharge de l'inductance sous tension rectangulaire

Le schéma de principe est le suivant :



La tension $u(t)$ fournie par le générateur de fonctions est un signal rectangulaire de fréquence f et d'amplitude U :



Pendant la demi-période positive, l'inductance et la résistance sont soumis à une tension continue $u(t) = U$.

L'inductance stocke l'énergie sous forme magnétique. Ce phénomène n'est pas instantané et l'énergie magnétique augmente en même temps que le courant $i_L(t)$ qui circule à travers l'inductance L et la résistance R. Grâce à la loi d'Ohm, la tension $u_R(t)$ aux bornes de la résistance R augmente jusqu'elle soit égale à la tension $u(t) = U$ de la source. En appliquant la loi de Kirchhoff pour les mailles, si $u_R(t)$ augmente jusque $u(t) = U$, la tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance L diminue jusque $u_L(t) = 0$.

Pendant la demi-période suivante, le circuit est soumis à une tension $u(t) = 0$.

En appliquant la loi de Kirchhoff pour les mailles, on obtient $u_L(t) = -u_R(t)$. Le courant $i_L(t)$ diminue à travers la résistance et l'inductance perd progressivement son énergie magnétique. Ce phénomène n'est pas instantané et il se termine quand $i_L(t) = 0$ et $u_L(t) = -u_R(t) = 0$.

En toute rigueur, une inductance présente aussi une résistance électrique interne en série qui correspond à la résistance du conducteur (bobinage). Sa présence permet d'expliquer des éventuelles différences entre les tensions théoriques et les tensions mesurées.

2.1. Équations et Constante de temps du circuit

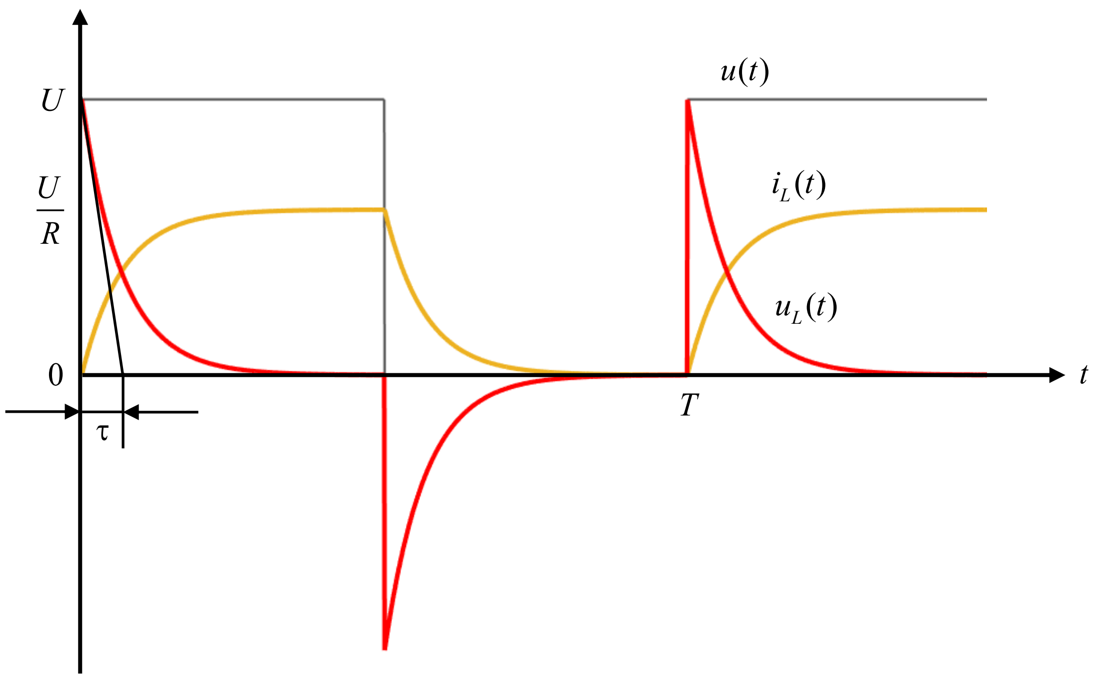
Les équations qui décrivent le comportement de la tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance L et du courant $i_L(t)$ sont données par (voir annexes A.3 et A.4)

Charge :	$u_L(t) = U\,\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} = U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$i_L(t) = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}}) = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$
Décharge :	$u_L(t) = -U\,\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} = -U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	$i_L(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

Il s'agit d'exponentielles dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{(en secondes)}$$

La figure suivante illustre le comportement de la tension $u_L(t)$ et du courant $i_L(t)$



Le rapport

$$\frac{u_L(t)}{U} \cdot 100 = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 100$$

Permet de calculer, en fonction du temps t et avec la constante de temps τ comme paramètre, la valeur en pourcent (%) de l'évolution de la tension $u_L(t)$ par rapport à la tension U.

Calculer les valeurs suivantes (sans les valeurs décimales) :

t [s]	$\frac{u_L(t)}{U} \cdot 100 = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 100$ [%]
0	
τ	
2τ	
3τ	
4τ	
5τ	
10τ	

2.2. Application numérique

Les valeurs numériques sont les suivantes :

$f = \frac{1}{T} = 5\ \mathrm{kHz}$

$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$

$L = 10\ \mathrm{mH}$

Calculer la valeur de la constante de temps τ :

$\tau =$ ....

Calculer la valeur en secondes de la demi-période de la tension $u(t)$:

$\frac{T}{2} =$ ....

Exprimer cette valeur par rapport à la constante de temps τ :

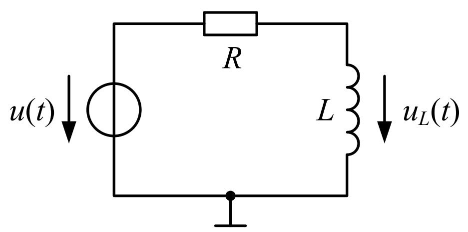
$\frac{T}{2} =$ ....

En fonction des valeurs ci-dessus et du tableau de la page 16, peut-on affirmer que la période de la tension $u(t)$ permet d'observer intégralement la variation de la tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance L ?

- ☐ Oui
- ☐ Non

2.3. Observation des tensions $u(t)$ et $u_L(t)$

Schéma de montage :

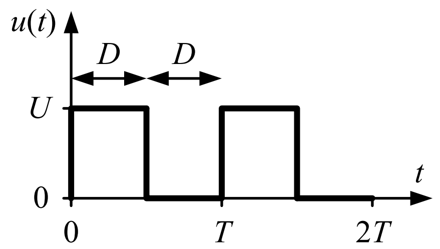


$u(t)$: Générateur de fonctions HMF2525

$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$

$L = 10\ \mathrm{mH}$

La tension $u(t)$ fournie par le générateur de fonctions **HMF2525** est un signal rectangulaire de fréquence $f = 5\ \mathrm{kHz}$ et d'amplitude $U = 1\ \mathrm{V}$:



$f = \frac{1}{T} = 5\ \mathrm{kHz}$

$U = 1\ \mathrm{V}$

Utiliser les paramètres ci-dessous pour configurer le générateur de fonctions **HMF2525**.

Attention au choix de la fonction !

Fonction	
Frequency	5 kHz
Amplitude	Voir Paragraphe 1.3
Offset	Voir Paragraphe 1.3

Visualiser les tensions $u(t)$ et $u_L(t)$ à l'oscilloscope.

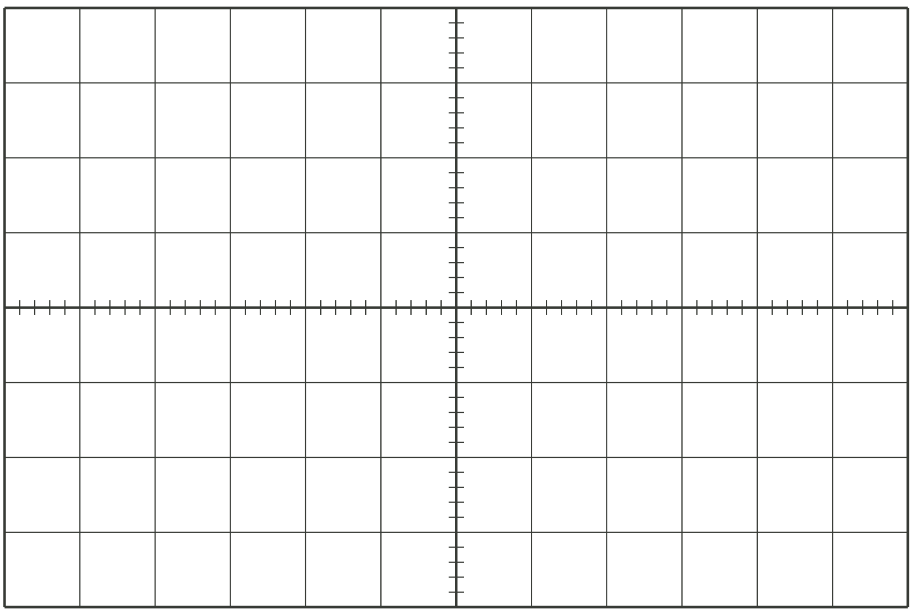
Utiliser la configuration suivante pour l'oscilloscope :

Canal 1 (CH1)	$u(t)$	Couplage : DC	
Canal 2 (CH2)	$u_L(t)$	Couplage : DC	
Base de temps	$20\ \mu s$		
Trigger	SOURCE : $u(t)$ (Canal 1)	LEVEL : $500\ mV$	SLOPE : Flanc Montant

Superposer le **GND** des deux courbes.

Choisir la position des deux courbes et leurs calibres en tension afin d'utiliser au maximum la taille de l'écran de l'oscilloscope et augmenter la précision des calculs.

Reproduire les signaux observés sur le graphique ci-dessous.



2.4. Vérification de la constante de temps τ

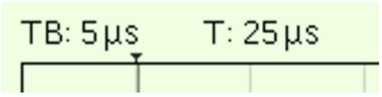
Calculer la valeur de la tension $u_L(t)$ pour $t = \tau$ et $U = 1\ \mathrm{V}$:

$$u_L(t) = U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Configuration pour vérifier à l'oscilloscope la valeur de la constante de temps τ :

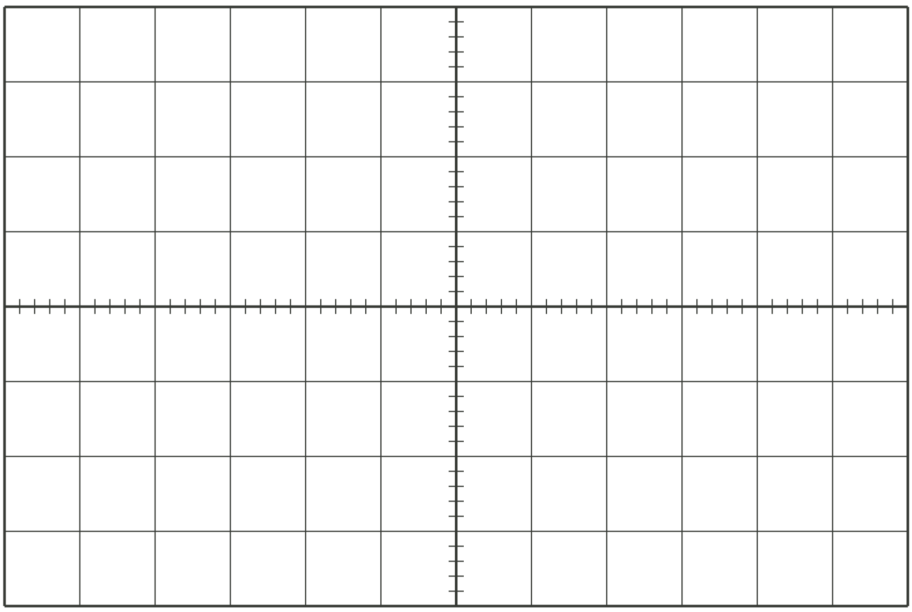
- Choisir $\mathbf{5\ \mu s}$ pour le calibre de la base de temps
- Décaler les courbes observées vers la gauche.

  À l'écran de l'oscilloscope on visualise **T : 25 µs** :

- Le marquer du trigger doit être toujours visible pour $u(t)$ (Canal 1)

Reproduire les signaux observés sur le graphique ci-dessous.



Effectuer les mesures à l'aide de l'outil **CURSOR MEASURE** de l'oscilloscope :

Mesures

1. Configurer le menu **CURSEUR (CURSOR)** :

TYPE MESURE (MEASURE TYPE)	Temps (Time)
SOURCE	CH2

2. Sélectionner le point de mesure $\boxed{\mathbf{1}}$ et le déplacer pour obtenir à l'écran de l'oscilloscope
   t1 : 0 s

3. Configurer le menu **CURSEUR (CURSOR)** :

TYPE MESURE (MEASURE TYPE)	Marquer–V (V–Marker)
SOURCE	CH2

4. Sélectionner le point de mesure $\boxed{\mathbf{2}}$ et le déplacer pour obtenir à l'écran de l'oscilloscope
   V2 : (~ la valeur de la tension $u_C(t)$) donnée par l'équation (2).

5. La mesure de $t = \tau$ à l'oscilloscope est donnée par la valeur de Δ**t**

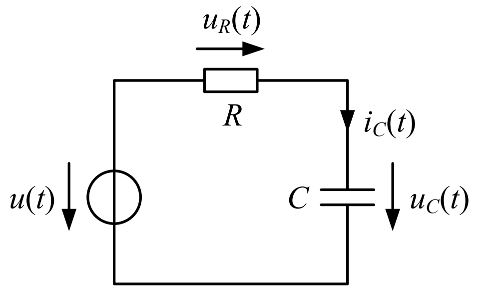
Indiquer la valeur de $t = \tau$ mesurée à l'oscilloscope :

$t = \tau =$ ....

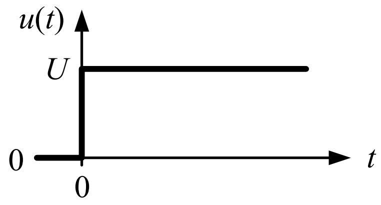
En tenant compte de la précision des appareils de laboratoire, de la tolérance des composants et des imperfections de la plaque "Hirshman", vérifier que la mesure de la constante de temps τ correspond à la valeur calculée.

ANNEXE

A.1 Charge du condensateur



Tension $u(t)$:



Conditions initiales au temps $t = 0$: $u_C(0) = 0$

Équations des éléments simples

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri_C(t) \\ i_C(t) &= C\frac{du_C(t)}{dt} \end{aligned} \tag{1}$$

Équation de Kirchhoff pour les mailles

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri_C(t) + u_C(t) = RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \tag{2}$$

Pour $t > 0$, on a $u(t) = U$. L'équation (2) devient

$$U = RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \tag{3}$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{U}{RC} \tag{4}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = A \tag{5}$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par

1. Un terme ***permanent*** sans aucune variation pour $t \to \infty$

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad ; \quad ax(t) = A \quad ; \quad x(t) = \frac{A}{a} \tag{6}$$

2. Un terme ***transitoire*** avec $A = 0$ qui tend vers 0 pour $t \to \infty$

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \quad ; \quad \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) \quad ; \quad x(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} \tag{7}$$

avec k : constante d'intégration qui dépend des conditions initiales.

La solution de l'équation différentielle (5) est alors donnée par

$$x(t) = \frac{A}{a} + k\,\mathrm{e}^{-at} \tag{8}$$

Dans notre cas, on a :

$$A = \frac{U}{RC} \quad ; \quad a = \frac{1}{RC}$$
$$u_C(t) = U + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9}$$

Il s'agit d'une exponentielle dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$$\tau = RC \quad \text{(en secondes)} \tag{10}$$

Calcul de la constante d'intégration k à l'aide des conditions initiales au temps $t = 0$: $u_C(0) = 0$

$$u_C(0) = 0 = U + k\,\mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}} = U + k \quad ; \quad k = -U \tag{11}$$

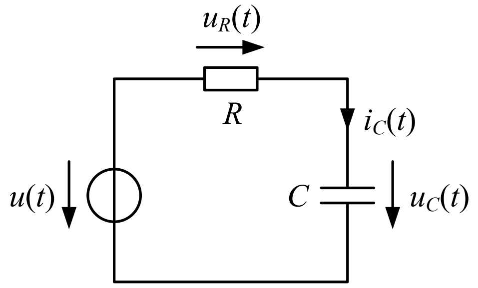
On a enfin

$$u_C(t) = U + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = U - U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{12}$$

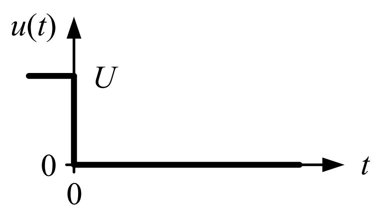
Le courant $i_C(t)$ est donné par

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}(U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})) = \frac{CU}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{CU}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{13}$$

A.2 Décharge du condensateur



Tension $u(t)$:



Conditions initiales au temps $t=0$: $u_C(0)=U$

Pour $t>0$, on a $u(t)=0$. L'équation (2) devient

$$0=RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t) \tag{14}$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_C(t)=0 \tag{15}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=A \tag{16}$$

La solution est alors donnée par

$$x(t)=\frac{A}{a}+k\,\mathrm{e}^{-at} \tag{17}$$

Dans notre cas, on a :

$$\begin{aligned} &A=0 \quad ; \quad a=\frac{1}{RC} \\ &u_C(t)=k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \tag{18}$$

Il s'agit d'une exponentielle dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$$\tau=RC \quad \text{(en secondes)} \tag{19}$$

Calcul de la constante d'intégration *k* à l'aide des conditions initiales au temps $t=0$: $u_C(0)=U$

$$u_C(0)=U=k\,\mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}}=k \quad ; \quad k=U \tag{20}$$

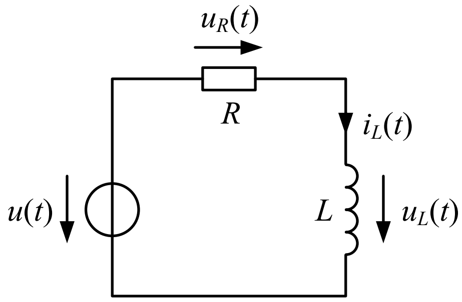
On a enfin

$$u_C(t)=k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{21}$$

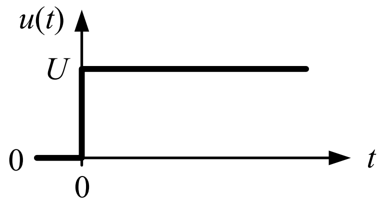
Le courant $i_C(t)$ est donné par

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=C\frac{d}{dt}(U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=-\frac{CU}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{CU}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{22}$$

A.3 Charge de l'inductance



Tension $u(t)$:



Conditions initiales au temps $t = 0$: $i_L(0) = 0$

Équations des éléments simples

$$u_R(t) = Ri_L(t)$$
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{23}$$

Équation de Kirchhoff pour les mailles

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{24}$$

Pour $t > 0$, on a $u(t) = U$. L'équation (24) devient

$$U = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{25}$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{U}{L} \tag{26}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = A \tag{27}$$

La solution est alors donnée par

$$x(t) = \frac{A}{a} + k\,\mathrm{e}^{-at} \tag{28}$$

Dans notre cas, on a :

$$A = \frac{U}{L} \quad ; \quad a = \frac{R}{L}$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} = \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{29}$$

Il s'agit d'une exponentielle dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{(en secondes)} \tag{30}$$

Calcul de la constante d'intégration k à l'aide des conditions initiales au temps $t = 0$: $i_L(0) = 0$

$$i_L(0) = 0 = \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-0\frac{R}{L}} = \frac{U}{R} + k \quad ; \quad k = -\frac{U}{R} \tag{31}$$

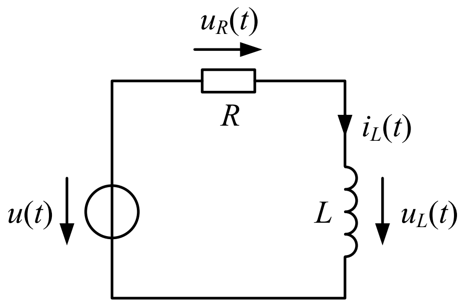
On a enfin

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{32}$$

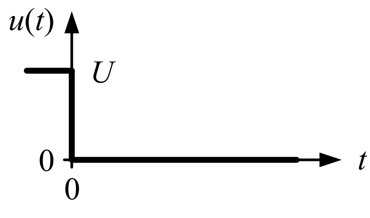
La tension $u_L(t)$ est donnée par

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}(\frac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})) = \frac{UL}{R\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{33}$$

A.4 Décharge de l'inductance



Tension $u(t)$:



Conditions initiales au temps $t = 0$: $i_L(0) = \frac{U}{R}$

Pour $t > 0$, on a $u(t) = 0$. L'équation ci-dessus devient

$$0 = Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{34}$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = 0 \tag{35}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = A \tag{36}$$

La solution est alors donnée par

$$x(t) = \frac{A}{a} + k\,\mathrm{e}^{-at} \tag{37}$$

Dans notre cas, on a :

$$A = 0 \quad ; \quad a = \frac{R}{L}$$
$$i_L(t) = k\,\mathrm{e}^{-t\frac{R}{L}} = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{38}$$

Il s'agit d'une exponentielle dont l'évolution est caractérisée par la constante de temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \text{(en secondes)} \tag{39}$$

Calcul de la constante d'intégration k à l'aide des conditions initiales au temps $t = 0$: $i_L(0) = \frac{U}{R}$

$$i_L(0) = \frac{U}{R} = k\,\mathrm{e}^{-0\frac{R}{L}} = k \quad ; \quad k = \frac{U}{R} \tag{40}$$

On a enfin

$$i_L(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{41}$$

La tension $u_L(t)$ est donnée par

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{UL}{R\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{42}$$