Traitement de l'Information Incertaine

March 9, 2015

Durée estimée: $<$ 2.5 heures.

Exercice 1: Raisonnement Probabiliste

Après votre bilan de santé annuel, vous recevez par courrier les résultats de vos examens: vous avez été testé positif à une maladie grave. Les taux de faux positifs et négatifs sont de 1% (c.à.d. les probabilités que le test classifie un malade comme sain et vice versa). Par bonheur, cette maladie est extrêmement rare: elle ne frappe qu'une personne sur dix mille.

Question 1.1: A l'aide d'un raisonnement probabiliste, expliquez pourquoi la rareté de la maladie est une chance pour vous. Indication: Utilisez la règle d'inférence bayésienne, T = Test et M = Maladie constituant les événements concernés.

Exercice 2: Causalité

Les liens de causalité expriment des relations du type $si\ A = 1, alors\ B = 1$, c.à.d, selon le formalisme de la logique propositionnelle, des règles du type $A \Rightarrow B$, A et B étant deux prédicats booléens. Lorsque le raisonnement est incertain, la causalité peut être établie via un raisonnement probabiliste:

$(A \Rightarrow B)$ devient $(A \Rightarrow B$ avec probabilité $P(B|A))$

L'inférence bayésienne consiste alors généralement à partir d'une observation sur B afin d'établir la probabilité selon laquelle A est vrai, c.à.d. que l'on remonte la chaîne de causalité. Cet exercice a pour but de vous donner une idée de la raison pour laquelle cela est généralement le cas.

Considérons une petite histoire. L'inspecteur Smith se trouve à Priory School. Il attend le détective Holmes et son assistant, le docteur Watson, pour qu'ils enquêtent sur la disparition d'un professeur. Ils sont en retard. Tous deux ont la réputation d'être de très mauvais conducteurs et l'inspecteur Smith se demande si la route est gelée, ce qui leur causerait certainement de gros ennuis. Il téléphone à sa secrétaire, Miss Lovelace, qui l'informe que le Dr Watson a effectivement eu un accident. Voici leur conversation:

> *Smith*: Un accident ? Bien, la route étant probablement gelée, il est probable que Holmes ait aussi eu un accident!
>
> *Lovelace*: Route gelée ? Non, certainement pas: il ne fait pas si froid et les routes ont été sablées.
>
> *Smith*: Pas de chance pour Watson alors. Attendons Holmes encore dix minutes...

Le lendemain, l'épouse de Watson, Mary, lit le journal. Elle découvre l'accident de son mari et que le professeur du Priory School a été sauvé et les ravisseurs arrêtés. Voici ses pensées:

> *Mary*: Ils ont arrêtés les ravisseurs? Alors, probablement que Holmes n'a pas eu un accident, donc la route n'était probablement pas gelée.

Ensuite, elle lit qu'il ne faisait pas si froid et que les routes avaient été sablées. Elle se dit:

> *Mary*: Décidément, Holmes a évité l'accident.

Modélisation du Problème

Question 2.1: Formalisez les relations entre les événements dans cette petite histoire à l'aide d'un réseau bayésien à quatre noeuds:

- I=Route-Gelée
- H=Accident-Holmes
- W=Accident-Watson
- S=Professeur-Sauvé

Question 2.2 (Inférence Déductive): Si on connaît la probabilité de l'événement I, $P(I)$:

- Comment peut-on calculer les probabilités des événements H et W, $P(H)$ et $P(W)$? Quelles informations faut-il sur les relations entre I, H et W?
- Comment peut-on calculer la probabilité de l'événement S, $P(S)$? Quelles informations faut-il sur les relations entre I, H, W et S?

Question 2.3 (Inférence Abductive): Comment peut-on exprimer la probabilité de l'événement I quand on connaît si l'événement W se produit ou pas ($W = 1$ ou $W = 0$)? Si on connaît $P(I)$, quelles informations faut-il sur la relation entre I et W pour calculer cette probabilité?

Question 2.4 (Déduction et Abduction): Si on connaît $P(I)$:

- Comment peut-on exprimer la probabilité de l'événement H quand on connaît si l'événement W se produit ou pas? Quelles informations faut-il sur les relations entre I, W et H pour calculer cette probabilité?
- Comment peut-on exprimer la probabilité de H quand on connaît si les événements W et S se produisent ou pas? Quelles informations faut-il sur les relations entre I, H, W et S pour calculer cette probabilité?
- Comment peut-on exprimer la probabilité de H quand on connaît si les événements I, W et S se produisent ou pas? Quelles informations faut-il sur les relations entre I, H, W et S pour calculer cette probabilité?

Calcul Probabiliste

Ajoutons maintenant les informations sur les relations de ce réseau. Sachant qu'il est probable que la route soit gelée, et que Holmes et Watson sont de très mauvais conducteurs, nous considérerons que:

$P(I=1)=0.7$
$P(H=1|I=1)=0.9, P(W=1|I=1)=0.7$
$P(H=1|I=0)=0.1, P(W=1|I=0)=0.5$

Ensuite, sachant que la présence de Holmes est essentielle pour la résolution d'un cas, nous considérerons que:

$P(S=1|H=1,W=1)=0.1$
$P(S=1|H=1,W=0)=0.2$
$P(S=1|H=0,W=1)=0.8$
$P(S=1|H=0,W=0)=1$

Question 2.5: Complétez les tableaux des probabilités conditionnelles $P(H|I)$ et $P(W|I)$.

$P(H\|I)$	$I=1$	$I=0$	$P(W\|I)$	$I=1$	$I=0$
$H=1$			$W=1$		
$H=0$			$W=0$		

Question 2.6: A partir de ces tableaux, calculez les probabilités que Holmes et Watson ont eu un accident, $P(H=1)$ et $P(W=1)$.

Question 2.7: Après que Miss Lovelace l'ait informé que Watson a eu un accident, Smith déduit que les routes sont probablement gelées. Calculez la probabilité $P(I=1|W=1)$.

Question 2.8 (Dépendance): Ensuite, il déduit que Holmes a probablement eu un accident aussi. Quelle est la probabilité $P(H=1|W=1)$? Comparez-la avec $P(H=1)$: H et W sont deux événements dépendants.

Question 2.9 (Indépendance Conditionnelle): Après que Miss Lovelace l'ait informé que les routes n'étaient pas gelées, Smith revient sur ses conclusions. Quelle est la probabilité $P(H=1|W=1,I=0)$? Comparez la avec $P(H=1|I=0)$: H et W sont deux événements indépendants, étant doné I.

Question 2.10: Complétez le tableau de la probabilité conditionnelle $P(S|W,H)$.

$P(S\|W,H)$	$H=1,W=1$	$H=1,W=0$	$H=0,W=1$	$H=0,W=0$
$S=1$				
$S=0$				

Question 2.11 (Causes Multiples): A partir de ce tableau, calculez la probabilité que le professeur ait été sauvé, $P(S=1)$.

Question 2.12: En découvrant l'accident de son mari et la solution du cas Priory School, Mary déduit que Holmes a évité l'accident. Quelle est la probabilité $P(H=1|W=1,S=1)$?

Question 2.13 (Abduction avec Plusieurs Conséquences): Ensuite elle déduit que les routes n'étaient pas gelées. Quelle est la probabilité $P(I=1|W=1,S=1)$?

Question 2.14: Finalement, elle découvre l'état des routes et déduit que Holmes n'a certainement pas eu un accident. Quelle est la probabilité $P(H=1|I=0,W=1,S=1)$.

Question 2.15 (Dépendance Conditionnelle): Et si Mary ne connaissait pas l'accident de Watson? Quelle est la probabilité $P(H=1|I=0,S=1)$. Comparez-la avec $P(H=1|I=0,W=1,S=1)$: H et W sont deux événements dépendants, étant donnés I et S.

Optionnel

Finalement, qu'est ce-que pourrait expliquer l'accident de Watson? Peut être des vieux pneus?

Question 2.16: Modifiez le réseau en ajoutant le noeud V=Vieux-Pneus-Watson.

Question 2.17: Comment peut-on exprimer la probabilité de l'événement V quand on connaît si les événements I et W se produisent ou pas? Si on connaît $P(V)$, quelles informations faut-il sur les relations entre I, W et V pour calculer cette probabilité?

Bibliographie

[1] `http://www.ai.mit.edu/courses/6.825/fall02/pdf/6.825-lecture-15.pdf`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/The_Adventure_of_the_Priory_School`