Traitement de l'Information Incertaine

Solutions

March 9, 2015

Exercice 1: Raisonnement Probabiliste

Question 1.1: Informellement, la probabilité que vous soyez malade est toujours proportionnelle à la probabilité de cette maladie. Ainsi, sur 10'000 personnes, l'une d'entre elle sera effectivement malade et sera diagnostiquée comme telle par le test avec 99% de chance. Cependant, pour les 9'999 personnes restantes, le test se trompera dans 1% des cas, c.à.d. qu'environ 100 personnes seront positives au test bien que n'ayant pas la maladie. Globalement, vous avez donc seulement 1% de risque d'être effectivement malade si le test est positif.

Plus formellement: soit T la variable représentant le résultat du test, et M la variable représentant la maladie. Par définition des taux de faux négatifs et positifs, on a $P(T = 1|M = 1) = 1 - P(T = 0|M = 1) = 1 - 0.01 = 0.99$ et $P(T = 0|M = 0) = 1 - P(T = 1|M = 0) = 1 - 0.01 = 0.99$. Cependant, $P(M = 1) = 0.0001$ puisque la maladie ne frappe qu'une personne sur 10'000. La probabilité qui vous intéresse est $P(M = 1|T = 1)$, puisque vous souhaitez déterminer quel est le risque que vous ayez effectivement la maladie sachant que votre test a été positif. Or:

$$
\begin{aligned}
P(M=1|T=1) &= \frac{P(T=1|M=1)*P(M=1)}{P(T=1|M=1)*P(M=1)+P(T=1|M=0)*P(M=0)} \\
&= \frac{0.99*0.0001}{0.99*0.0001+0.01*0.9999} \\
&= 0.009804
\end{aligned}
$$

Exercice 2: Causalité

Modélisation du Problème

Question 2.1: Le réseau bayésien (Figure 2) a les noeuds:

- I=Route-Gelée
- H=Accident-Holmes
- W=Accident-Watson

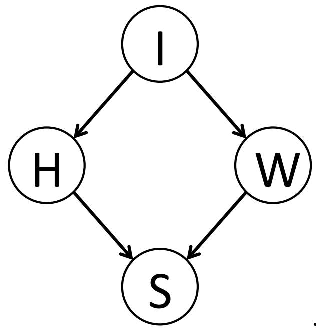

Figure 1: Le réseau bayésien avec les noeuds: I=Route-Gelée, H=Accident-Holmes, W=Accident-Watson, S=Professeur-Sauvé

- S=Professeur-Sauvé

et les arcs:

- $I \to H$ et $I \to W$, car l'état des routes influe les accidents de Holmes et Watson.
- $W \to S$ et $H \to S$, car les accidents de Holmes et Watson influent la résolution du cas.

Question 2.2 (Inférence Déductive):

- Pour calculer $P(H)$, il nous faut $P(H|I)$:

  $$P(H=h) = P(H=h|I=1)P(I=1) + P(H=h|I=0)P(I=0)$$

  Il vaut de même pour $P(W)$, quand il nous faut $P(W|I)$:

  $$P(W=w) = P(W=w|I=1)P(I=1) + P(W=w|I=0)P(I=0)$$

- Pour calculer $P(S)$, il nous faut en plus $P(S|H,W)$:

  $$P(S=s) = \sum_{i,h,w \in \{1,0\}} P(S=s|H=h,W=w)P(H=h|I=i)P(W=w|I=i)P(I=i)$$

Question 2.3 (Inférence Abductive): La probabilité qu'on cherche est $P(I|W)$. Pour la calculer, il nous faut $P(W|I)$. Par la règle de Bayes, on a:

$$P(I=i|W=w) = \frac{P(W=w|I=i)P(I=i)}{P(W=w)}$$

Question 2.4 (Déduction et Abduction):

- On cherche $P(H|W)$. Pour ça, il nous faut $P(W|I)$ et $P(H|I)$:

  $$P(H=h|W=w) = \sum_{i \in \{1,0\}} P(H=h|I=i)P(I=i|W=w)$$

- On cherche $P(H|W,S)$. Pour ça, il nous faut en plus $P(S|H,W)$:

$$P(H=h|W=w,S=s) = \alpha P(S=s|H=h,W=w)P(H=h|W=w)$$

On détermine $\alpha = \frac{1}{P(S=s|W=w)}$ de façon à ce que:

$$\sum_{h\in\{1,0\}} P(H=h|W=w,S=s) = 1$$

- On cherche $P(H|I,W,S)$:

$$P(H=h|I=i,W=w,S=s) = \alpha P(S=s|H=h,W=w)P(H=h|I=i)$$

On détermine $\alpha = \frac{1}{P(S=s|I=i,W=w)}$ de façon à ce que:

$$\sum_{h\in\{1,0\}} P(H=h|I=i,W=w,S=s) = 1$$

Calcul Probabiliste

Question 2.5:

$P(H\|I)$	$I=1$	$I=0$	$P(W\|I)$	$I=1$	$I=0$
$H=1$	0.9	0.1	$W=1$	0.7	0.5
$H=0$	0.1	0.9	$W=0$	0.3	0.5

Question 2.6:

$$\begin{aligned} P(H=1) &= P(H=1|I=1)P(I=1) + P(H=1|I=0)P(I=0) \\ &= 0.9*0.7+0.1*0.3 = 0.66 \\ P(W=1) &= P(W=1|I=1)P(I=1) + P(W=1|I=0)P(I=0) \\ &= 0.7*0.7+0.5*0.3 = 0.64 \end{aligned}$$

Question 2.7:

$$\begin{aligned} P(I=1|W=1) &= \frac{P(W=1|I=1)*P(I=1)}{P(W=1)} \\ &= \frac{0.7*0.7}{0.64} \cong 0.765 \end{aligned}$$

Il en résulte que $P(I=0|W=1) \cong 0.234$.

Question 2.8 (Dépendance):

$$\begin{aligned} P(H=1|W=1) &= P(H=1|I=1)*P(I=1|W=1) + P(H=1|I=0)*P(I=0|W=1) \\ &= 0.9*0.765+0.1*0.234 = 0.712 \end{aligned}$$

On peut constater que la probabilité d'accident de Holmes a augmenté suite à la connaissance de l'accident de Watson, car cet accident laisse supposer que la route peut être gelée. H et W sont deux événements dépendants.

Question 2.9 (Indépendance Conditionnelle): Si l'on sait que la route n'est pas gelée, $I = 0$, l'accident de Watson n'a plus d'influence sur la probabilité d'accident de Holmes. En effet, l'accident de Watson n'a pas d'effet sur la probabilité que la route soit gelée puisque celle-ci est connue avec certitude. Ainsi, on a: $P(H = 1|I = 0, W = 1) = P(H = 1|I = 0) = 0.1$. Sachant I, H et W sont deux événements indépendants.

Question 2.10:

$P(S\|W,H)$	$H = 1, W = 1$	$H = 1, W = 0$	$H = 0, W = 1$	$H = 0, W = 0$
$S = 1$	0.1	0.2	0.8	1
$S = 0$	0.9	0.8	0.2	0

Question 2.11 (Causes Multiples):

$$
\begin{aligned}
P(S = s) = \sum_{i,h,w \in \{1,0\}} & P(S = s|H = h, W = w)P(H = h|I = i)P(W = w|I = i)P(I = i) \\
&= 0.1 * (0.9 * 0.7 * 0.7 + 0.1 * 0.5 * 0.3) \\
&+ 0.2 * (0.9 * 0.3 * 0.7 + 0.1 * 0.5 * 0.3) \\
&+ 0.8 * (0.1 * 0.7 * 0.7 + 0.9 * 0.5 * 0.3) \\
&+ 1 * (0.1 * 0.3 * 0.7 + 0.9 * 0.5 * 0.3) \\
&= 0.3896
\end{aligned}
$$

Question 2.12:

$$
\begin{aligned}
P(H = 1|W = 1, S = 1) &= \alpha P(S = 1|H = 1, W = 1)P(H = 1|W = 1) \\
&= \alpha * 0.1 * 0.712 = \alpha * 0.0712 \\
P(H = 0|W = 1, S = 1) &= \alpha P(S = 1|H = 0, W = 1)P(H = 0|W = 1) \\
&= \alpha * 0.8 * 0.287 = \alpha * 0.23
\end{aligned}
$$

Il faut que $\alpha * (0.0712 + 0.23) = 1$, donc on trouve $\alpha = 3.319$ et $P(H = 1|W = 1, S = 1) = 0.236$ et $P(H = 0|W = 1, S = 1) = 0.763$.

Question 2.13 (Abduction avec Plusieurs Conséquences):

$$
\begin{aligned}
P(I = 1|W = 1, S = 1) &= \sum_{h \in \{1,0\}} P(I = 1|H = h, W = 1)P(H = h|W = 1, S = 1) \\
&= \sum_{h \in \{1,0\}} \frac{P(H = h|I = 1)P(W = 1|I = 1)P(I = 1)}{P(H = h|W = 1)P(W = 1)} P(H = h|W = 1, S = 1) \\
&= \frac{0.9 * 0.7 * 0.7}{0.712 * 0.64} * 0.236 + \frac{0.1 * 0.7 * 0.7}{0.287 * 0.64} * 0.763 \\
&= 0.228 + 0.203 = 0.432
\end{aligned}
$$

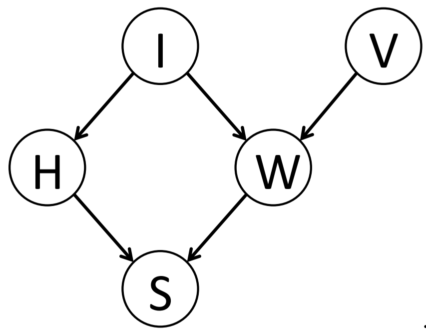

Figure 2: Le nouveau réseau bayésien avec les noeuds: I=Route-Gelée, H=Accident-Holmes, W=Accident-Watson, S=Professeur-Sauvé, V=Vieux-Pneus-Watson

Question 2.14:

$$\begin{aligned}P(H=1|I=0,W=1,S=1) &= \alpha P(S=1|H=1,W=1)P(H=1|I=0)\\ &= \alpha * 0.1 * 0.1 = 0.01\\ P(H=0|I=0,W=1,S=1) &= \alpha P(S=1|H=0,W=1)P(H=0|I=0)\\ &= \alpha * 0.8 * 0.9 = 0.72\end{aligned}$$

Il faut que $\alpha * (0.01+0.72) = 1$, donc on trouve $\alpha = 1.369$ et $P(H=1|I=0,W=1,S=1) = 0.013$ et $P(H=0|I=0,W=1,S=1) = 0.986$.

Question 2.15 (Dépendance Conditionnelle):

$$\begin{aligned}P(H=1|I=0,S=1) &= \alpha P(S=1|H=1,I=0)P(H=1|I=0)\\ &= \alpha * \sum_{w\in\{1,0\}} P(S=1|H=1,W=w) * P(W=w|I=0) * P(H=1|I=0)\\ &= \alpha * (0.1*0.5+0.2*0.5)*0.1 = \alpha * 0.015\\ P(H=0|I=0,S=1) &= \alpha P(S=1|H=0,I=0)P(H=0|I=0)\\ &= \alpha * \sum_{w\in\{1,0\}} P(S=1|H=0,W=w) * P(W=w|I=0) * P(H=0|I=0)\\ &= \alpha * (0.8*0.5+1*0.5)*0.9 = \alpha * 0.81\end{aligned}$$

Il faut que $\alpha * (0.015+0.81) = 1$, donc on trouve $\alpha = 1.21$ et $P(H=1|I=0,S=1) = 0.018$ et $P(H=0|I=0,W=0,S=1) = 0.98$. Donc, si en plus on sait que Watson a eu un accident, la probabilité que Holmes a eu aussi un accident descend un peu. Alors, H et W sont des événements dépendants sachant S et I.

Optionnel

Question 2.16: On ajoute le noeud V=Vieux-Pneus-Watson et l'arc $V \rightarrow W$ (Figure 2).

Question 2.17: On cherche $P(V|I,W)$. Pour ça, il nous faut en plus $P(W|I,V)$:

$$P(V = v|I = i, W = w) = \alpha P(W = w|I = i, V = v)P(V = v)$$

On détermine $\alpha = \frac{1}{P(W=w|I=i)}$ de façon à ce que:

$$\sum_{v \in \{1,0\}} P(V = v|I = i, W = w) = 1$$