

## Série 5

### 1 Qu'est-ce qui est difficile?

Ci-dessous, vous trouverez une liste de problèmes qu'on peut demander à un ordinateur de résoudre. Le but de cet exercice est de classer ces problèmes par ordre de difficulté (par "difficulté", on entend ici le temps que mettrait un même ordinateur à résoudre le problème. Vous pouvez essayer de l'approximer par la difficulté que vous auriez vous-même à résoudre le problème à la main, ou vous baser sur ce que vous avez déjà vu en cours).

**Problème a)** Soit  $x$  un nombre entier composé de  $n$  chiffres (exemple:  $x = 69262832689376392871$  si  $n = 20$ ). Identifier si ce nombre est un nombre premier ou pas.

**Problème b)** Additionner deux nombres entiers  $x$  et  $y$ , chacun composé de  $n$  chiffres.

**Problème c)** Multiplier deux nombres entiers  $x$  et  $y$ , chacun composé de  $n$  chiffres.

**Problème d)** Soit  $L$  une liste de  $n$  nombres réels arbitraires (mais tous distincts). Exemple avec  $n = 20$ :

$$L = \{4, 5.5, -4, 10, 0, 1200, 47, 25, -707, 101, 18, 7.12, 3.14, -2, 18, 14, 3, 2.71828, -700, 1\}$$

Trier cette liste dans l'ordre croissant.

**Problème e)** Soit  $L$  une liste triée de  $n$  nombre réels. Quelqu'un choisit un nombre au hasard dans cette liste. Le but est de deviner quel nombre cette personne a choisi en posant des questions auxquelles la personne ne peut répondre que par oui ou par non (vous pouvez essayer ça avec votre voisin!).

**Problème f)** Etant donnée une position au jeu d'échecs, déterminer quel est le meilleur coup à jouer pour se retrouver dans la position la plus favorable possible  $n$  coups après.

### 2 Trouver un sous-ensemble

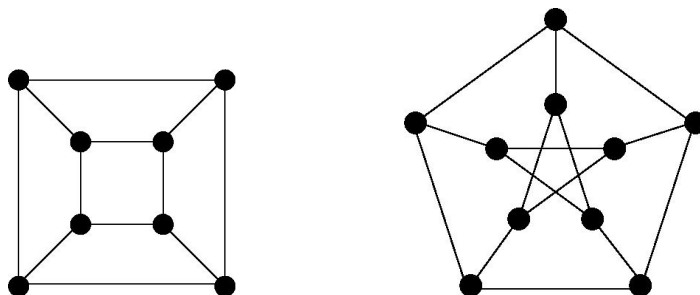
On considère le problème suivant:

Etant donné une liste  $L$  de  $n$  nombres entiers relatifs, identifier le plus grand sous-ensemble  $S \subset \{1, \dots, n\}$  tel que  $\sum_{i \in S} L(i) \geq 0$ .

Pouvez-vous décrire un algorithme pour résoudre ce problème ? S'agit-il d'un problème de la classe P ?

### 3 Coloration de graphes

On considère un graphe avec  $n$  sommets et un certain nombre d'arêtes qui relient ces sommets, comme par exemple un des deux graphes suivants:



On se pose la question générale suivante:

*Soit  $k \geq 2$  un nombre fixé. Avec  $k$  couleurs différentes à disposition, est-il possible de colorer les sommets d'un graphe donné de façon à ce que si deux sommets sont reliés par une arête, alors ils aient toujours des couleurs différentes?*

Avant d'aller plus loin, voici une petite application pour le cas où  $k = 2$ :  $n$  joueurs se retrouvent ensemble et désirent former deux équipes (pas forcément de même taille: ça simplifie le problème). Seule contrainte: un graphe comme le graphe ci-dessus indique les joueurs qui ne s'aiment pas et ne veulent donc pas faire partie de la même équipe: plus précisément,  $i$  n'aime pas  $j$  si et seulement si  $i$  et  $j$  sont reliés directement par une arête. Est-il possible de former deux équipes avec des joueurs qui n'ont aucune inimitié à l'intérieur de chaque équipe?

a) Quelle est la réponse à cette question pour chacun des graphes ci-dessus (dans le cas où  $k = 2$ )?

Faisons maintenant un petit calcul ensemble: pour résoudre la question en général pour un  $n$  et un  $k$  donnés, on a toujours l'option d'essayer *toutes* les possibilités de colorations du graphe. Combien sont-elles, ces possibilités? Vu qu'on a  $k$  choix pour chacun des  $n$  sommets, on a en tout  $k^n$  possibilités, autrement dit un nombre qui croît exponentiellement en  $n$ . Si  $n$  est grand, essayer toutes les possibilités prend clairement trop de temps (même pour  $k = 2$ ).

b) Considérons tout d'abord le cas particulier  $k = 2$  et supposons que vous deviez trouver vous-même une coloration qui fonctionne, sans aide extérieure. Quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème? (qu'avez-vous fait pour répondre à la question a?)

c) Toujours dans le cas  $k = 2$ , combien d'opérations *au pire*<sup>1</sup> seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas), en fonction du nombre de sommets  $n$ ?

d) Considérons maintenant le cas plus général  $k \geq 2$  et supposons qu'on vous *donne* une coloration avec  $k$  couleurs pour un graphe donné et qu'on vous demande de *vérifier* si cette coloration fonctionne. En fonction du nombre de sommets  $n$ , combien d'opérations seront-elles nécessaires pour vérifier que la coloration fonctionne, dans le pire des cas?

e\*) Dans le cas particulier  $k = 3$ , quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème, si on vous laisse la trouver par vous-même? (à nouveau, essayez d'abord sur les exemples de graphes ci-dessus) Et combien d'opérations seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas)?

*Attention:* Cette dernière question est (beaucoup) plus difficile qu'il n'y paraît: en fait, même les plus grands scientifiques de la planète n'ont encore trouvé la réponse: ne désespérez donc pas si vous n'y arrivez pas du premier coup!

*Note historique:* C'est grâce à l'informatique qu'on a pu démontrer *mathématiquement* que 4 couleurs suffisent pour colorer tous les graphes dits *planaires*, c'est-à-dire les graphes correspondant à nos bonnes vieilles cartes de géographie (où on identifie les pays avec les sommets du graphe et les frontières communes entre deux pays avec les arêtes du graphe).]

## 4 Pour le plaisir: Sudoku et Mastermind\*

A quelle(s) classe(s) de complexité appartiennent les deux problèmes suivants?

a) Résoudre un Sudoku dans un tableau de taille  $n \times n$ , avec  $n$  "chiffres" différents dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacun des  $n$  sous-tableaux de taille  $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$  qui une fois assemblés constituent le tableau de taille  $n \times n$  (on ne considère ici que des valeurs  $n = m^2$  avec  $m$  un nombre entier).

b) Trouver la combinaison cachée de  $n$  couleurs ou lettres dans un jeu de Mastermind, étant donné les indications fournies par le joueur adverse. Voici un exemple ci-dessous avec  $n = 3$ :

---

<sup>1</sup>Imaginez le graphe le plus complexe possible avec  $n$  sommets.

S E U	1 élément <u>bien</u> placé et 1 élément <u>mal</u> placé
R U D	2 éléments <u>bien</u> placés
R S U	2 éléments <u>mal</u> placés