

ICC SSV Theory Mid-Term Exam

Nov 3, 2023

ATTENTION: solutions are visible in the document
Version: November 1, 2023

Instructions

- This exam has descriptions in two languages: English in black and French in blue. Figures, tables, and code snippets are only shown once in black. If you need a translation, please ask one of the assistants.
- You will have 1h30 to complete this exam.
- Prepare something to write and erase and your Camipro card. You can use the last empty pages (Pages 16–16) of the exam as scratch paper. If you need more scratch paper, ask an assistant.
- **No electronic devices (computers, tablets, phones, calculators etc.) are allowed.**
- Separate Page 3 from the rest of the document.
- Write your SCIPER number, name, and first name on the top of Page 3.
- Write your answers in the table on Page 3 and Page 4 in clearly readable letters.
- At the end of the exam, hand in Page 3 and 4. Only the answers written on these pages will be taken into account.
- For each multiple-choice question you can get some maximum number of points P (stated on Page 3). For partially correct answers, you will get partial points according to the formula $\max(0, P \cdot (x_C/C - x_I/I))$, where C and I are the total numbers of correct and incorrect options, respectively, and x_C and x_I are the numbers of options that you have selected from the correct and incorrect options, respectively. So, if a question has two correct and two incorrect options and gives at most 2 points, and you select one correct option, you will get 1 point. If you select a correct and an incorrect option you will get 0 points. If you select only incorrect options you will also get 0 points. **The total number of points you receive per question is never negative.**

Les instructions en français sont au verso.

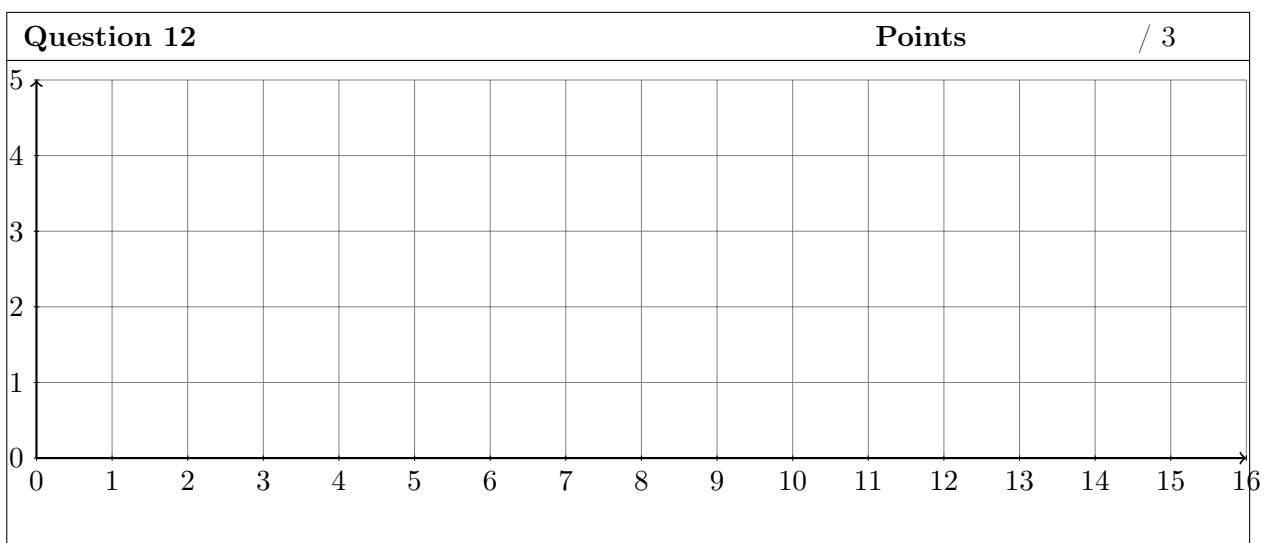
Instructions

- Cet examen se décline en deux langues : en anglais en noir et en français en bleu. Les figures, les tableaux et les extraits de code ne sont affichés qu'une seule fois en noir. Si vous avez besoin de traduction, veuillez demander à un membre de l'équipe.
- Vous disposez de 1h30 pour faire cet examen.
- Préparez de quoi écrire, de quoi effacer et votre carte Camipro. Vous pouvez utiliser les dernières pages (pages 16–16) comme papier brouillon. Si vous avez besoin de plus de papier brouillon, demandez à un assistant.
- **Aucun appareil électronique (ordinateur, tablette, téléphone, calculatrice, etc.) n'est autorisé.**
- Détachez la page 3 de votre copie.
- Indiquez vos numéro SCIPER, nom et prénom en haut de la page 3.
- Indiquez vos réponses dans le tableau de la page 3 et dans le tableau de la page 4 en lettres clairement lisibles.
- En fin d'examen, rendez uniquement les pages 3 et 4. Seules les réponses sur ces pages seront prises en compte.
- Pour chaque question à choix multiple vous pouvez recevoir un nombre maximum de points P (indiqué sur la page 3). Pour des réponses partiellement correctes, vous recevrez une fraction des points selon la formule $\max(0, P \cdot (x_C/C - x_I/I))$, où C est le nombre de d'options correctes et I le nombre d'options incorrectes et x_C et x_I sont le nombre d'options correctes ou incorrectes que vous avez choisies respectivement. Donc par exemple, s'il y a 4 propositions dont 2 sont correctes et 2 incorrectes, vous pouvez recevoir au maximum 2 points, et que vous avez sélectionné une seule option correctement, vous recevrez 1 points. Si vous sélectionnez une option correcte et une option incorrecte vous recevrez 0 point. Si vous ne sélectionnez que des options incorrectes, vous recevrez 0 point également. **Vous ne recevrez jamais de points négatifs pour une question.**

SCIPER	
Family name Nom de famille	
First name Prénom	

Question	Answer Réponse	Points	Max. Points
1	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		1
2	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		1
3	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
4	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
5	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
6	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
7	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
8	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
9	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
10	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐		2
11	Please answer below. Veillez répondre ci-dessous.		2
12	Please answer below. Veillez répondre ci-dessous.		3
13	Please answer on the next page. Veillez répondre à la page suivante.		11

Question 11					Points	/ 2
n	0	1	2	3		
$X(n \cdot T_e)$						



Question 13	Points	/ 11
-------------	--------	------

A. Number of appearances of a letter [Nombre d'occurrence d'une lettre](#)

Letter	S	I	T	O	A	N	P	␣
Appearances								

B. Huffman tree [Table de Huffman](#)**C. Code word and length of the code** [Encodages et longueurs de code](#)

Letter	S	I	T	O	A	N	P	␣
Code words								
Length								

D. Total number of bits [Nombre total de bits](#)**E. Difference** [Différence](#)

1 Binary System

What is the smallest number of bits needed to represent the days of a year?

Quel est le plus petit nombre de bits nécessaires pour représenter les jours d'une année ?

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 16

B. $2^8 = 256 < 365 \text{ (days)} < 512 = 2^9 \rightarrow 9 \text{ bits}$

2 Positive Integer Representation

Assume the binary pattern 11000001 represents a non-negative integer number using the positional representation in base 2. What is the corresponding decimal number?

Supposons que le motif binaire 11000001 représente un nombre entier non négatif en utilisant la représentation positionnelle en base 2. Quel est le nombre décimal correspondant ?

- A. 96
- B. 97
- C. 192
- D. 193

D. $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 64 + 1 = 193$.

3 Binary Arithmetic with Signed Numbers

Assume a system with six bits to represent (positive and negative) integers. Negative numbers are represented using the 2s complement representation. Which of the following equations are the results of computations in such a system? (**Multiple correct answers are possible**).

Considérez un système à six bits pour représenter les nombres entiers (positifs et négatifs). Les nombres négatifs sont représentés par le complément à 2. Lesquelles des équations suivantes sont le résultat de calculs dans un tel système ? (**Plusieurs réponses correctes sont possibles**).

- A. $18 + 9 = 27$
- B. $-30 - 10 = -40$
- C. $16 \cdot 2 = -32$
- D. $-32 \div 2 = 16$

Range: $\min = -2^5 = -32$, $\max = 2^5 - 1 = 31$

A. is correct

B. is incorrect (out of range)

C. is correct $16 * 2 = 32$ (out of range) $\Rightarrow -32$

D. is incorrect.

4 Fixed-Point Representation

Assume we represent a fractional number using the positional representation in base 2 with positive and negative exponents and we use 5 bits before and 2 bits after the fractional point (i.e., we use the pattern $dddd.d$). Select **all** correct statements:

- A. The distance between two consecutive numbers that can be represented precisely (without rounding error) is always $\frac{1}{2}$.
- B. The largest number we can represent precisely (without rounding error) is 31.75.
- C. The number 20.5 can be represented precisely (without rounding error).
- D. The number 16.4 is represented by the number 16.5.

Supposons que nous représentions un nombre fractionnaire en utilisant la représentation positionnelle en base 2 avec des exposants positifs et négatifs et avec 5 bits avant et 2 bits après la virgule (c'est-à-dire que nous utilisons le modèle $dddd.d$). Sélectionnez **toutes** les affirmations correctes.

- A. La distance entre deux nombres consécutifs pouvant être représentés précisément (sans erreurs d'arrondi) est toujours de $\frac{1}{2}$.
- B. Le plus grand nombre que nous pouvons représenter précisément (sans erreur d'arrondi) est 31.75.
- C. Le nombre 20.5 peut être représenté précisément (sans erreurs d'arrondi).
- D. Le nombre 16.4 est représenté par le nombre 16.5.

A: incorrect: the distance is $2^{-2} = \frac{1}{4}$

B: correct $11111.11 = 31 + 0.75 = 3.75$

C: correct: $20.5_d = 10100.10_b$

D: incorrect: $16.4_d = 10000.0110..._b \Rightarrow 10000.01_b = 16.25_d$

5 Floating Point Representation

Assume a simplified floating point representation of a positive number using 7 bits as follows: 5 bits for the exponent in base 2 using the two's complement representation, 2 bits for the mantissa. Select **all** correct statements:

- A. In the interval $[64, 128)$ the absolute error between a number x and the number used to represent x in this system is smaller than 16.
- B. The relative error is never larger than $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
- C. The decimal number 60.5 is represented by the number 60.
- D. The decimal number 0.125 can be represented exactly (without rounding errors).

Soit une représentation simplifiée en virgule flottante d'un nombre positif sur 7 bits, faite de la manière suivante : 5 bits pour l'exposant en base 2, 2 bits pour la mantisse. Nous utilisons la représentation des nombres en complément à deux pour l'exposant. Sélectionnez **toutes** les affirmations correctes.

- A. Dans l'intervalle $[64, 128)$, l'erreur absolue entre un nombre x et le nombre utilisé pour représenter x dans ce système est inférieure à 16.
- B. L'erreur relative n'est jamais supérieure à $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
- C. Le nombre 60.5 est représenté par le nombre 60.
- D. Le nombre décimal 0.125 peut être représenté exactement (sans erreurs d'arrondi).

Exponent range: -16 to +15

In any interval $[2^e, 2^{e+2})$ with e ranging from -16 to +15, we can represent only four values precisely.

- A) correct: in the interval $[64, 128)$, we can represent the following four numbers precisely, 64 ($1.00 * 2^6$), 80 ($1.01 * 2^6$), 96, 112.
- B) correct
- C) incorrect: in the interval $[32, 64)$ we can represent the numbers 32, 40, 48, 56, precisely. Alternatively, 60 in binary is 111100, normalized, we get $1.111 * 2^5$. We can store only 2 bits in the mantissa, so we get $1.11 * 2^5 = 111000 = 56$.
- D) correct: $0.125_{10} = 0.001_2 = 1 * 2^{-3}$, which can be represented.

6 Sampling Size

Assume we are sampling a 1-channel (mono) sound signal for two minutes with a sampling frequency of $f_e = 44.1$ kHz. Each sampled value is stored with a 32-bit floating point number (1 bit for the sign, 8 bits for the exponent, and 23 bits for the mantissa). Select **all** correct statements:

- A. 32 bits are sufficient to store all sampled values precisely (without rounding error).
- B. The difference between a sampled value and the corresponding stored value is never larger than 2^{-23} .
- C. We need about 21 MBytes to store the sampled signal.
- D. We can reduce the size of the sampled signal significantly, if we use the MP3 format.

Supposons que nous échantillonnions un signal sonore à un canal (mono) pendant deux minutes avec une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 44,1$ kHz. Chaque valeur échantillonnée est stockée avec un nombre à virgule flottante de 32 bits (1 bit pour le signe, 8 bits pour l'exposant et 23 bits pour la mantisse). Sélectionnez **toutes** les affirmations correctes :

- A. Les 32 bits sont suffisants pour stocker toutes les valeurs échantillonnées exactement (sans erreurs d'arrondi).
- B. La différence entre une valeur échantillonnée et la valeur stockée correspondante n'est jamais supérieure à 2^{-23} .

- C. Nous avons besoin d'environ 21 MBytes pour stocker le signal échantillonné.
- D. Nous pouvons réduire considérablement la taille du signal échantillonné en utilisant le format MP3.

- A) incorrect.
- B) incorrect: only the relative error is bounded by 2^{-23}
- C) correct: $44.1\text{k} * 60\text{ s} * 4\text{ Bytes} * 2\text{min} = 2646\text{ kBytes} * 4\text{ Bytes} * 2\text{min} = 10584 * 2\text{ min} = 21168\text{ kBytes} = 21\text{ MBytes}$
- D) correct

7 Signals

Consider the two signals in Figure 1 (Signal 1) and in Figure 2 (Signal 2).
 (For your reference: $\sin(4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{16}) \approx 0.7$) Select **all** correct statements:

- A. Signal 1 has a higher bandwidth than Signal 2.
- B. Signal 1 can be represented mathematically by the expression

$$f(t) = \sin(8 \cdot \pi \cdot t + \pi) + \sin(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

- C. Signal 1 has a period of $T = 1\text{s}$.
- D. Signals 1 and 2 have different periods.

Considérons les deux signaux de la figure 1 (signal 1) et de la figure 2 (signal 2).
 (Pour votre référence : $\sin(4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{16}) \approx 0.7$) Sélectionnez **toutes** les affirmations correctes.

- A. Le signal 1 a une plus grande bande passante (bandwidth) que le signal 2.
- B. Le signal 1 peut être représenté mathématiquement par l'expression suivante

$$f(t) = \sin(8 \cdot \pi \cdot t + \pi) + \sin(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$$

- C. Le signal 1 a une période de $T = 1\text{s}$.
- D. Les signaux 1 et 2 ont des périodes différentes.

- A. incorrect: signal 2 has high frequencies.
- B. correct: signal 1 consists of the two frequencies 2 and 4Hz both have a phase shift of π visible by the fact that the curve goes down first.
- C. incorrect: the period of signal 1 is $1/2=0.5\text{s}$.
- D. incorrect: both signals have a period of 0.5s

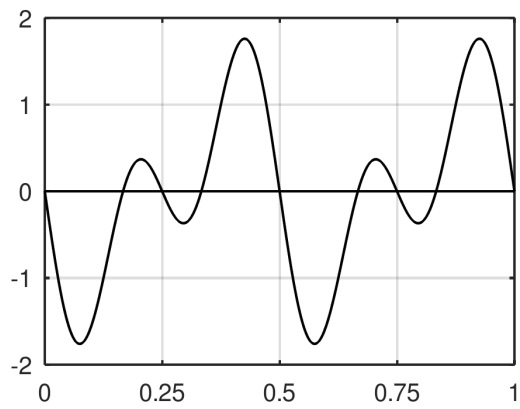


Figure 1: Signal 1

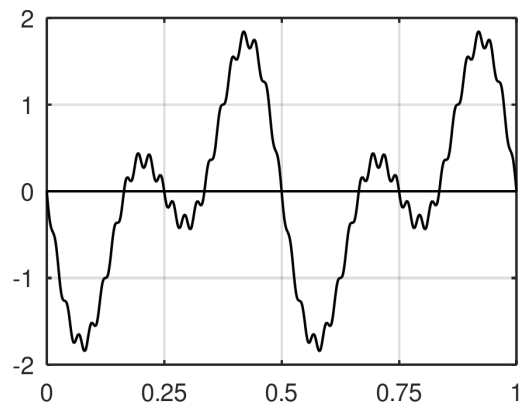


Figure 2: Signal 2

8 Moving Average Filter

Assume we are given the signal $X(t)$ shown in Fig. 3 with a period of 4 seconds. Let the signal $X(t)$ be the input signal of a moving average filter with a cutoff period of 0.5 seconds. Which of the four signals (A, B, C, or D) shown in Fig. 4 represents the output signal $\hat{X}(t)$ of this filter?

Supposons que l'on nous donne le signal $X(t)$ représenté sur la figure 3 avec une période de 4 secondes. Supposons que le signal $X(t)$ soit le signal d'entrée d'un filtre à moyenne mobile dont la période de coupure est de 0.5 secondes. Lequel des quatre signaux (A, B, C ou D) représentés sur la figure 4 représente le signal de sortie $\hat{X}(t)$ de ce filtre ?

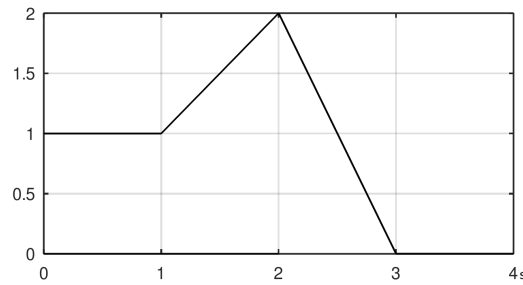


Figure 3: Input signal $X(t)$ of moving average filter

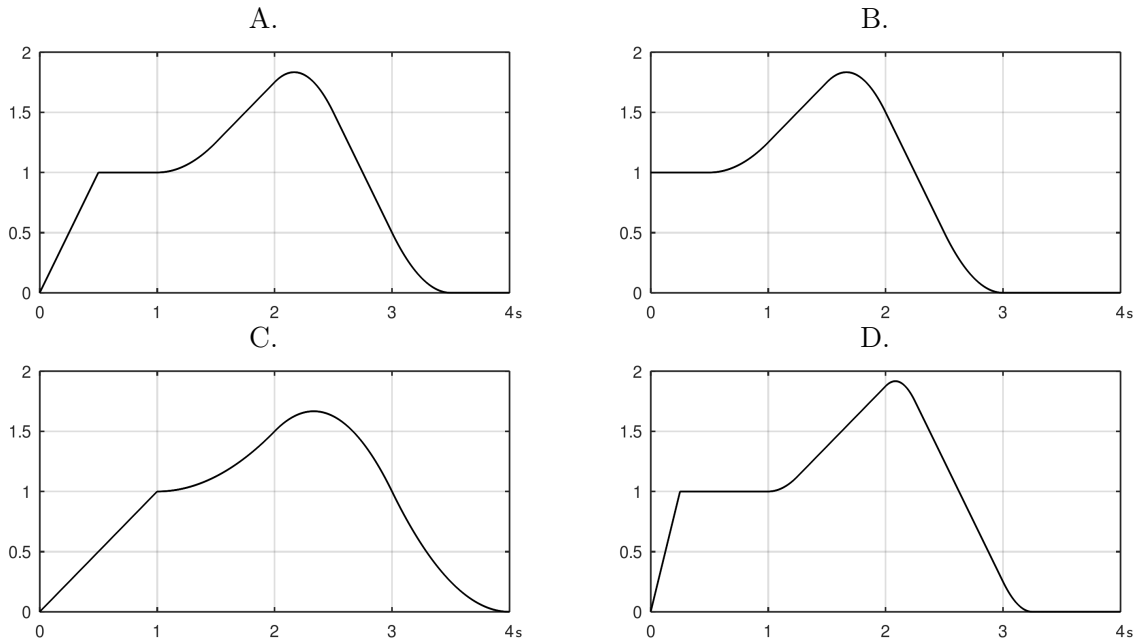


Figure 4: Output signals $\hat{X}(t)$

A. the average of $X(t)$ over the last 0.5s at $t=0.5$ and $t=1$ is 1, since the $X(t)$ is constant between 0 and 1. (So, B and C are ruled out). To distinguish between A and D, let us compute the average at $t=2$. In the interval from 1.5 to 2, the value of $X(t)$ goes linearly from 1.5 to 2. So, the average is 1.75. Alternatively, one can compute the area below the curve from $t=1.5$ and $t=2$. This gives $0.5 \cdot 0.5 / 2$ (top triangle) + $0.5 \cdot 1.5$ (bottom rectangle) = 0.875. Then, the average is $0.875 / 0.5 = 1.75$.

9 Sampling and Reconstruction

Assume that we sample the signal

$$X(t) = 2 \cdot \sin(12\pi t) + \sin(4\pi t + \pi) + 3 \cdot \sin(32\pi t)$$

with $f_e = 10$ Hz and reconstruct it from the sampled values using the interpolation formula $X_I(t) = \sum_n X(T_e \cdot n) \text{sinc}(\frac{t - T_e \cdot n}{T_e})$. Select **all** correct statements.

- A. The signal $X(t)$ can be reconstructed perfectly.
- B. The reconstructed signal is the sum of signals with frequency 2 and 4 Hz.
- C. If the signal $X_I(t)$ has a frequency that does not appear in $X(t)$, then this frequency has a phase shift of π .
- D. T_e is 1 second.

Supposons que l'on échantillonne le signal

$$X(t) = 2 \cdot \sin(12\pi t) + \sin(4\pi t + \pi) + 3 \cdot \sin(32\pi t)$$

avec $f_e = 10$ Hz et qu'on le reconstruise à partir des valeurs échantillonnées en utilisant la formule d'interpolation $X_I(t) = \sum_n X(T_e \cdot n) \text{sinc}(\frac{t - T_e \cdot n}{T_e})$. Sélectionnez **toutes** les affirmations correctes.

- A. Le signal $X(t)$ peut être reconstruit parfaitement.
- B. Le signal reconstruit est la somme des signaux de fréquence 2 et 4 Hz.
- C. Si le signal $X_I(t)$ a une fréquence qui n'apparaît pas dans $X(t)$, alors cette fréquence a un déphasage de π .
- D. T_e est de 1 seconde.

B and C. The signal has frequencies 2, 6, and 16 Hz. The sampling frequency is 10 Hz. So, 6 and 16 Hz are subsampled. The apparent frequency for 6 and 16 Hz is $|2 \cdot 10 - 16| = |10 - 6| = 4$ Hz.

10 Entropy

Consider the following four words and order them with respect to their entropy starting with the word with the smallest entropy to the word with the largest entropy. Which of the orderings below is correct? (For your reference: $\log_2(\frac{8}{3}) \approx 1.4$)

Considérez les quatre mots suivants et ordonnez-les en fonction de leur entropie en commençant par le mot ayant la plus petite entropie jusqu'au mot ayant la plus grande entropie. Quel est l'ordre correct ? (Pour votre référence : $\log_2(\frac{8}{3}) \approx 1.4$)

$w_1 = \text{snellens}$

$w_2 = \text{business}$

$w_3 = \text{bulletin}$

$w_4 = \text{category}$

A. $H(w_1) \leq H(w_2) \leq H(w_3) \leq H(w_4)$

B. $H(w_2) \leq H(w_1) \leq H(w_3) \leq H(w_4)$

C. $H(w_2) \leq H(w_3) \leq H(w_1) \leq H(w_4)$

D. $H(w_1) \leq H(w_3) \leq H(w_2) \leq H(w_4)$

A.

$$w_1 : 2, 2, 2, 2 = 4 \cdot \frac{2}{8} \cdot \log_2\left(\frac{8}{2}\right) = 2$$

$$w_2 : 3, 1, 1, 1, 1 = \frac{3}{8} \cdot \log_2\left(\frac{8}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2(8) \approx 2.4$$

$$w_3 : 2, 1, 1, 1, 1, 1 = \frac{2}{8} \cdot \log_2\left(\frac{8}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2(8) = 2.75$$

$$w_4 : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2(8) = 3$$

11 Sampling

Assume the signal $X(t) = 3 \cdot t + 1$ is sampled with a sampling frequency of $f_e = 2\text{Hz}$. Compute the first four sampling values (for $n = 0 \dots 3$).

Supposons que le signal $X(t) = 3 \cdot t + 1$ soit échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 2\text{Hz}$. Calculer les quatre premières valeurs d'échantillonnage (pour $n = 0 \dots 3$).

$$t_e = 1/f_e = 1/2 = 0.5\text{s}$$

$$n = 0 : t = 0 : X(0) = 1$$

$$n = 1 : t = 1 \cdot 0.5 : X(0.5) = 2.5$$

$$n = 2 : t = 2 \cdot 0.5 : X(1) = 4$$

$$n = 3 : t = 3 \cdot 0.5 : X(1.5) = 5.5$$

12 Filters and Spectrum

Assume we are using the signal

$$X(t) = \sin(4\pi t) + 2 \cdot \sin(10\pi t) + 3 \cdot \sin(6\pi t + \pi) + 4 \cdot \sin(16\pi t - \frac{\pi}{2})$$

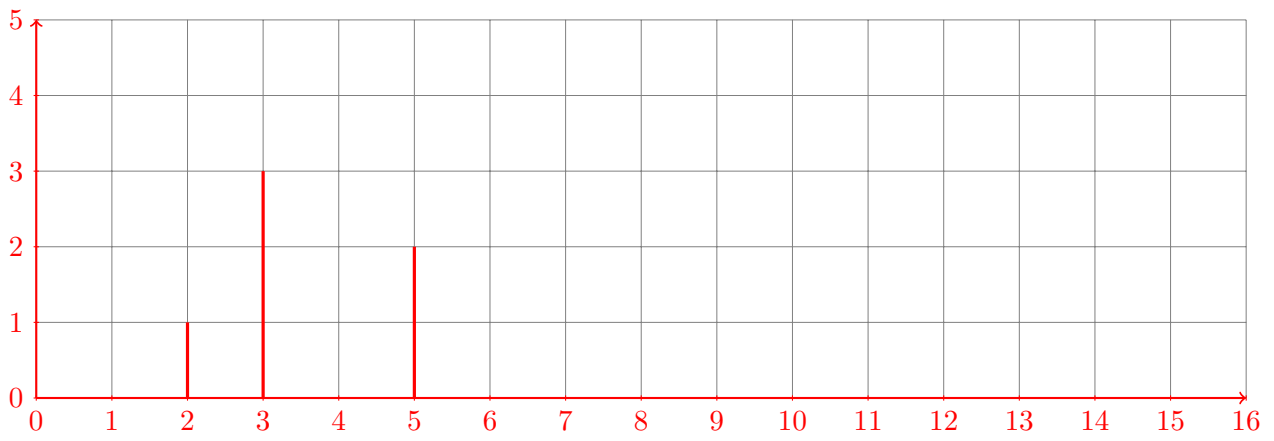
as input to an ideal low-pass filter with cutoff frequency of $f_c = 6\text{Hz}$. We use $\hat{X}(t)$ to denote the output signal of this ideal low-pass filter. Draw the spectrum of the signal $\hat{X}(t)$ (on the answering sheet.)

Supposons que nous utilisons le signal

$$X(t) = \sin(4\pi t) + 2 \cdot \sin(10\pi t) + 3 \cdot \sin(6\pi t + \pi) + 4 \cdot \sin(16\pi t - \frac{\pi}{2})$$

comme entrée d'un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure de $f_c = 6\text{Hz}$. Nous utilisons $\hat{X}(t)$ pour désigner le signal de sortie de ce filtre passe-bas idéal. Dessinez le spectre du signal $\hat{X}(t)$ (sur la feuille de réponse).

The signal has the following frequencies 2, 5, 3, and 8 with amplitudes 1, 2, 3, and 4, respectively. The ideal low-pass filter with a cutoff frequency of 6 Hz cuts off the frequency 8, so the output signal has only the first three frequencies.



13 Huffman encoding

Suppose you would like to send the following sentence **with spaces** to your friend using a minimal number of bits. A space () is treated like any other letter.

SIT_ON_A_POTATO_PAN

In order to create an optimal encoding using Huffman's algorithm and find the minimal number of bits proceed as follows:

- A. Create a table with the number of appearances per letter (see the table on the answering sheet.)
- B. Draw a Huffman tree for this table.
- C. Create a table with a code word for each letter (see the table on the answering sheet.)
- D. Compute the number of bits needed to send this message with your encoding.
- E. The sentence has eight different characters (including the space), so we could encode each letter with four bits. How many bits do you save with your Huffman encoding compared to an encoding with four bits per character?

Supposez que vous vouliez envoyer la phrase suivante **avec les espaces** à un ami en utilisant le nombre minimal de bits. Un espace () est traité comme n'importe quelle autre lettre.

SIT_ON_A_POTATO_PAN

Pour créer un encodage optimal avec l'algorithme de Huffman et trouver le nombre minimal de bits, procédez de la manière suivante:

- A. Créez un tableau avec le nombre d'occurrences pour chaque lettre (voir le tableau sur la feuille de réponse.)
- B. Dessinez un arbre de Huffman pour ce tableau.
- C. Créez un tableau avec un encodage pour chaque lettre (voir le tableau sur la feuille de réponse.)
- D. Calculez le nombre de bits nécessaires pour envoyer ce message avec votre encodage.
- E. La phrase comporte huit caractères différents (y compris l'espace), de sorte que nous pourrions coder chaque lettre avec quatre bits. Combien de bits est-ce que l'on économise avec votre codage de Huffman par rapport à un codage avec quatre bits par lettre ?

Total length: 19

3.A) 1 point

Letter	S	I	T	O	A	N	P	
Appearances	1	1	3	3	3	2	2	4

3.B) 6 points (no point for node 19) See Figure 5

3.C) 2 point

Letter	S	I	T	O	A	N	P	□
Code words	1111	1110	110	101	100	011	010	00
Code length	4	4	3	3	3	3	3	2

3.D) 1 point $4 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot (3 + 3 + 3 + 2 + 2) + 2 \cdot 4 = 8 + 39 + 8 = 55\text{bits}$

3.E) 1 point $19 \cdot 4 = 76$ bits versus 55, gives a difference of 21 bits.

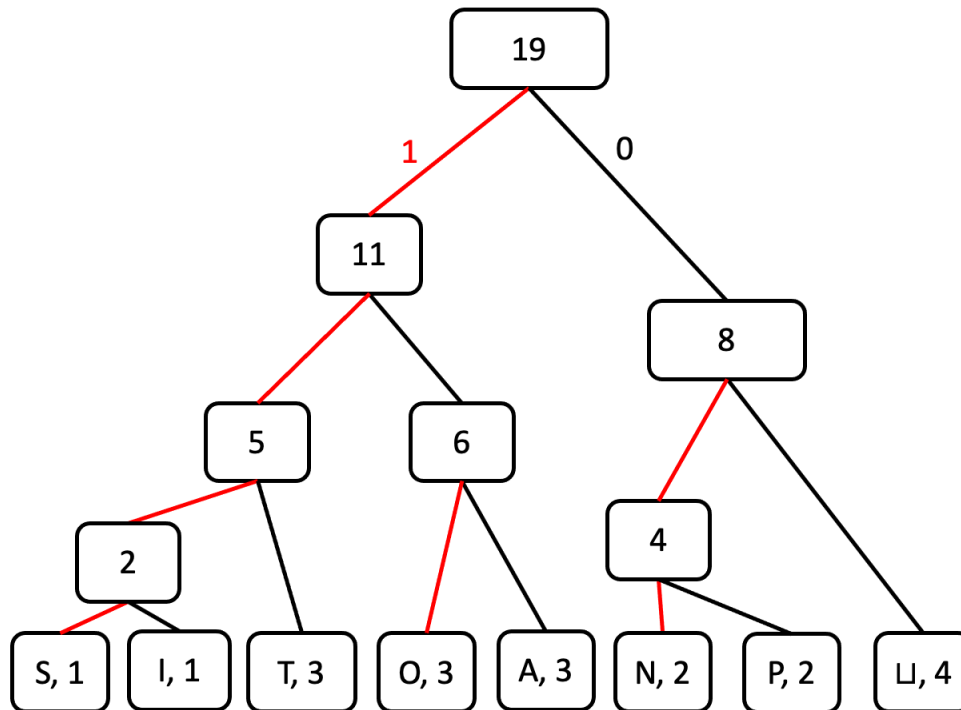


Figure 5: One correct Huffman tree. There are multiple correct trees.