Modèles stochastiques pour les communications
Test 1

Faculté I&C, 5ième semestre

NOM et prénom :

Si une page est dégraphée, veillez à indiquer votre nom dessus. Il y a 7 pages. Vos justifications doivent être rigoureuses et complètes.

Abbréviations: v.a. = variable aléatoire. Primitives pouvant être utiles:

$$\begin{aligned} \int \cos(x)dx &= \sin(x) \\ \int x\cos(x)dx &= \cos(x) + x\sin(x) \end{aligned}$$

Maximum: 20 points

<u>Question 1</u> (3 points)

Le nombre d'étudiants X_i (respectivement, X_j) inscrits dans une section i (respectivement, j) de l'EPFL suit une loi géométrique sur le domaine $S_{X_i} = S_{X_j} = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ de même paramètre p avec $0 < p < 1$; X_i et X_j sont statistiquement indépendants. Quelle est la probabilité que deux sections i et j comptent exactement le même nombre d'étudiants ?

Comme les deux variables sont indépendantes, $\mathbb{P}(X_i = n, X_j = n) = \mathbb{P}(X_i = n)\mathbb{P}(X_j = n)$. On trouve donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = n)\mathbb{P}(X_j = n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}^2(X_j = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p(1-p)^n)^2 \\ &= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

Question 2 (5 points)

Soient A et B deux v.a. continues indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 2]$.

1. (2pts) Quelle est la probabilité pour que l'équation du second degré en la variable $x \in \mathbb{R}$

$$Ax^2 + 2x + 1 = 0$$

n'admette aucune racine réelle ?

L'équation n'admet aucune racine réelle si et seulement si le réalisant $\Delta = 2^2 - 4A = 4 - 4A < 0$. Ceci est vérifié si et seulement si $A > 1$. Comme A est uniformément distribué sur $[0, 2]$, cet événement se produit avec la probabilité $1/2$.

2. (3pts) Quelle est la probabilité pour que l'équation du second degré en la variable $x \in \mathbb{R}$

$$Ax^2 + 2Bx + 1 = 0$$

n'admette aucune racine réelle ?

L'équation n'admet aucune racine réelle si et seulement si le réalisant $\Delta = 4B^2 - 4A < 0$, ce qui signifie que $B^2 < A$. On remarque que B ne prend que des valeurs positives, et donc $\mathbb{P}(B^2 < A) = \mathbb{P}(B < \sqrt{A})$. On peut calculer cette probabilité en conditionnant sur toutes les valeurs possibles de A:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B < \sqrt{A}) &= \int_0^2 \mathbb{P}(B < \sqrt{A} \mid A = a)\frac{1}{2}da = \int_0^2 \mathbb{P}(B < \sqrt{a})\frac{da}{2} \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{da}{2} = \frac{a^{3/2}}{6}\bigg|_0^2 da = \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Question 3 (3 points)

L'expérience suivante est menée à un festival de musique en plein air, pour estimer la densité spatiale de participants au festival. La surface du terrain où le festival se déroule est découpée en petites surfaces carrées. Un agent parcourt le terrain du festival, se déplaçant aléatoirement d'un petit carré à un autre. Les carrés sont de taille suffisamment petite pour qu'il puisse compter le nombre de participants qui se trouvent dans le carré qu'il visite. Le nombre X de participants par carré suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si l'agent observe un nombre strictement positif de participants dans un carré, il le reporte. Par contre, s'il trouve un carré vide de participants, il ne reporte rien, et on ignore si ce carré a été visité par l'agent ou non. Soit Y la v.a. désignant le nombre de participants sur un carré que l'agent reporte. On a donc $\mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(X = i \mid X > 0)$. Que vaut le nombre moyen $\mathbb{E}[Y]$ de participants reportés par carré ?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X|X > 0] &= \sum_{k>0} \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X > 0)} \\
&= \sum_{k>0} \frac{ke^{-\lambda}\lambda^k}{k!(1 - e^{-\lambda})} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}.
\end{aligned}
$$

Question 4 (9 points)

Soient A et Φ deux v.a. continues indépendantes. La densité de probabilité de A est $f_A(a) = a\exp(-a^2/2)$ pour tout $a \geq 0$ et $f_A(a) = 0$ sinon, tandis que Φ est uniformément distribué dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. On construit les processus

$$\begin{aligned} X(t) &= A\cos(2\pi t + \Phi) \\ Y(t) &= A\sin(2\pi t + \Phi). \end{aligned}$$

1. (2pts) Déterminez la fonction d'auto-corrélation $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ du premier processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

On utilise la relation trigonométrique suivante:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[A^2 \cos(2\pi t_1 + \Phi)\cos(2\pi t_2 + \Phi)] \\ &= \frac{\mathbb{E}[A^2]}{2}\big(\mathbb{E}[\cos(2\pi(t_1 - t_2))] + \mathbb{E}[\cos(2\pi(t_1 + t_2) + 2\Phi)]\big) \\ &= \frac{\mathbb{E}[A^2]}{2}\cos(2\pi(t_1 - t_2)) = \cos(2\pi(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

En effet, $\mathbb{E}[\cos(2\pi(t_1 + t_2) + 2\Phi)] = 0$ et, avec une intégration par parties, on trouve $\mathbb{E}[A^2] = 2$.

2. (1pt) Montrez que la fonction de cross-corrélation $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)Y(t_2)]$ de ces deux processus est $R_{XY}(t_1, t_2) = \alpha \sin(2\pi(t_2 - t_1))$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ que vous devez calculer.

Avec des arguments similaires à ceux du point 1 ci-dessus,

$$\begin{aligned} R_{X_1,X_2}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[A^2 \cos(2\pi t_1 + \Phi) \sin(2\pi t_2 + \Phi)] \\ &= \frac{\mathbb{E}[A^2]}{2} \big(\mathbb{E}[\sin(2\pi(t_2 - t_1))] + \mathbb{E}[\sin(2\pi(t_1 + t_2) + 2\Phi)] \big) \\ &= \frac{\mathbb{E}[A^2]}{2} \sin(2\pi(t_2 - t_1)) = \sin(2\pi(t_2 - t_1)), \end{aligned}$$

donc $\alpha = 1$. Ici on a utilisé la relation

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

3. (2pts) Considérons les deux v.a $X(t)$ et $Y(t)$ obtenues en échantillonnant les deux processus au même temps $t \in \mathbb{R}$. Déterminez la densité de probabilité jointe $f_{XY}(x, y; t)$ des deux v.a. $X(t)$ et $Y(t)$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le système des deux équations

$$\begin{aligned} x &= a \cos(2\pi t + \varphi) \\ y &= a \sin(2\pi t + \varphi). \end{aligned}$$

admet une racine unique $(a(x, y), \varphi(x, y))$, avec $a(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi(x, y) = \text{Arctan}(y/x)$ à un déphasage dépendant de t près, mais qui est sans importance pour la suite. Le Jacobien de la transformation est le déterminant

$$J(a, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \cos(2\pi t + \varphi) & -a \sin(2\pi t + \varphi) \\ \sin(2\pi t + \varphi) & a \cos(2\pi t + \varphi) \end{bmatrix} = a.$$

Donc la formule du changement de densité de probabilité implique que

$$f_{X,Y}(x, y; t) = \frac{f_{A,\Phi}(a(x, y), \varphi(x, y))}{|J(a(x, y), \varphi(x, y))|} = \frac{a(x, y)}{2\pi a(x, y)} e^{-\frac{a^2(x,y)}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Les v.a. $X(t)$ et $Y(t)$ sont donc deux v.a. gaussiennes indépendantes, de densité jointe

$$f_{X,Y}(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

4. (1pt) Existe-t-il des instants t_1 et t_2 tels que $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. statistiquement *indépendantes* ? Si oui, donnez un exemple de tels instants t_1 et t_2, et justifiez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. indépendantes. Sinon, expliquez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ ne sont jamais indépendantes quels que soient t_1 et t_2.

On a vu à l'exercice précédent que $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux v.a. gaussiennes indépendantes. Donc en prenant $t_1 = t_2$, $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. indépendantes. (Notez que si $t_1 = t_2$, $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$ (voir point 2 ci-dessus), et comme $\mathbb{E}[X(t_1)] = \mathbb{E}[X(t_2)] = 0$, la covariance $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ est aussi nulle).

5. (1pt) Existe-t-il des instants t_1 et t_2 tels que $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. statistiquement *dépendantes* ? Si oui, donnez un exemple de tels instants t_1 et t_2, et justifiez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont deux v.a. dépendantes. Sinon, expliquez pourquoi $X(t_1)$ et $Y(t_2)$ sont toujours indépendantes quels que soient t_1 et t_2.

Si $t_1 = t_2 + 1/4$, $R_{XY}(t_1, t_2) = 1 \neq 0$. Donc $C_{XY}(t_1, t_2) \neq 0$, les variables sont corrélées et ne peuvent donc pas être indépendantes.

6. (2pts) Le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est-il ergodique par rapport à sa moyenne ? Justifiez votre réponse.

On calcule

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_X(\tau)(1 - \frac{\tau}{T})d\tau &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\cos(2\pi\tau) - \frac{1}{T}\tau \cos(2\pi\tau) \right) d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\tau) - \frac{\tau}{2\pi T} \sin(2\pi\tau) - \frac{1}{4\pi^2 T} \cos(2\pi\tau) \right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \left(-\frac{1}{T} \cos(2\pi T) + \frac{1}{T} \right) = 0
\end{aligned}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour montrer que $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est ergodique par rapport à sa moyenne.