Modèles stochastiques pour les communications
Test 1: Solutions

Faculté I&C, 5ième semestre

Abbréviations: v.a. = variable aléatoire.

Question 1

1. Nous pouvons d'abord calculer la probabilité que $D \geq d$, correspondant à l'aire hâchurée (voir Figure 1) :

$$P(D > d) = (1 - \sqrt{2}d)^2 = 1 - 2\sqrt{2}d + 2d^2,\ d \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Nous avons donc ensuite :

$$F_D(d) = P(D \leq d) = 1 - P(D > d) = 2d(\sqrt{2} - d),\ d \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

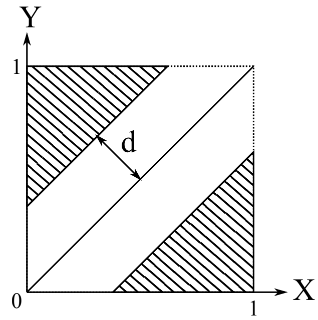

Figure 1: Illustration de l'exercice 1 de la Question 1.

2.
$$f_D(d) = F'_D(d) = \begin{cases} 2(\sqrt{2} - 2d) & \text{si } d \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Méthode 1 (échange des intégrales) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^x dy \right) f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty f_X(x)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty P(X > y)\, dy. \end{aligned}$$

Méthode 2 (par parties, en supposant que $\mathbb{E}[X] < \infty$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P(X > x)\,dx &= \int_0^\infty \underbrace{P(X > x)}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,dx \\
&= \underbrace{[P(X > x)x]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty (-f_X(x))x\,dx \\
&= \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

4. Méthode utilisant 3. :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D] &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} P(D > x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2\right)\,dx \\
&= \left[x - \sqrt{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Méthode traditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D] &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x2\left(\sqrt{2} - 2x\right)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(2\sqrt{2}x - 4x^2\right)\,dx \\
&= \left[\sqrt{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Question 2

1.

$$\begin{aligned}
P(T = t) &= P(T = t \mid X = 2) \cdot P(X = 2) + P(T = t \mid X = 4) \cdot P(X = 4) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{t-1} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{t-1} \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2^t} + \frac{3^{t-2}}{2^{2t-1}}.
\end{aligned}$$

2. Intuitivement, le fait de savoir qu'un appareil a déjà plusieurs années augmente la probabilité qu'il soit de bonne qualité, et donc la probabilité qu'il dure encore quelques années de plus. T n'est donc pas sans mémoire.

   Plus formellement, on peut vérifier par exemple que :

$$P(T \geq 3 \mid T \geq 2) = \frac{P(T \geq 3, T \geq 2)}{P(T \geq 2)} = \frac{P(T \geq 3)}{P(T \geq 2)} \neq P(T \geq (3 - 2)) = P(T \geq 1).$$

Sachant (à l'aide de l'Ex. 1) que $P(T=1)=\frac{1}{3}$ et $P(T=2)=\frac{5}{24}$, on calcule :

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T=1) = \frac{2}{3},$$

$$P(T \geq 3) = 1 - P(T=1) - P(T=2) = \frac{11}{24},$$

$$P(T \geq 3 \mid T \geq 2) = \frac{P(T \geq 3)}{P(T \geq 2)} = \frac{11}{16} \neq 1 = P(T \geq 1).$$

On a donc montré que T n'est pas sans mémoire.

3. D'après l'Ex. 1, nous avons :

$$P(T=5) = \frac{1}{3 \cdot 2^5} + \frac{3^3}{2^9} = \frac{2^4+3^4}{3 \cdot 2^9}.$$

De plus, on a :

$$P(T=5 \mid X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^5},$$

$$P(T=5 \mid X=4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{3^4}{2^{10}}.$$

Donc :

$$P(X=2 \mid T=5) = \frac{P(T=5 \mid X=2) \cdot P(X=2)}{P(T=5)} = \frac{2^4}{2^4+3^4} = \frac{16}{97},$$

$$P(X=4 \mid T=5) = \frac{P(T=5 \mid X=4) \cdot P(X=4)}{P(T=5)} = \frac{3^4}{2^4+3^4} = \frac{81}{97}.$$

Question 3

1. $f_X(x;t) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}$.
2. $\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$.
3. On commence par le cas $|t_2-t_1| \leq T$:

   On définit l'événement $A = \{X(t)$ a une transition entre t_1 et $t_2\}$.

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2) \mid A] \cdot P(A) + \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2) \mid \bar{A}] \cdot P(\bar{A}). \end{aligned}$$

   Comme $P(A) = P(D < |t_2-t_1|) = \frac{|t_2-t_1|}{T}$, on a :

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)]\mathbb{E}[X(t_2)]\frac{|t_2-t_1|}{T} + \mathbb{E}[X(t_1)^2]\frac{T-|t_2-t_1|}{T}.$$

   Sachant que $\mathbb{E}[X(t_1)] = \mathbb{E}[X(t_2)] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}[X(t_1)^2] = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = 1$, on obtient :

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{|t_2-t_1|}{4T} + \frac{T-|t_2-t_1|}{T}, \text{ pour } |t_2-t_1| \leq T.$$

   Le cas $|t_2-t_1| > T$ donne simplement $R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = (\mathbb{E}[X(t_1)])^2 = \frac{1}{4}$.
4. L'Ex. 2 indique que $\mu_X(t) = \mu_X\ \forall t$, et l'Ex. 3 indique que $R_X(t,t-\tau) = R_X(\tau)\ \forall t$. La moyenne de X étant constante et sa fonction d'auto-corrélation ne dépendant que de la différence de temps τ, on peut conclure de X est stationnaire au sens large.

5. Une condition suffisante est que $C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 \to 0$ pour $\tau \to +\infty$. On a vu à l'Ex. 3 que pour $\tau > T$, $R_X(\tau) = \frac{1}{4}$. De plus, on a calculé à l'Ex. 1 que $\mu_X = \frac{1}{2}$. Donc $C_X(\tau) = 0$ pour $\tau > T$ et le processus est ergodique par rapport à sa moyenne.

Question 4

1. On a $R_X(0) = \mathbb{E}[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df = 4$ et, comme la moyenne est nulle, $f_{X(t)}(x;t)$ est la densité d'une v.a. Gaussienne avec moyenne $\mu = 0$ et variance $\sigma^2 = 4$:
$$f_{X(t)}(x;t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right).$$

2. On n'a pas suffisamment d'informations parce que $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ est la densité d'un vecteur aléatoire Gaussien dont on connaît la moyenne mais pas la matrice de covariance :
$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(t_1,t_1) & R_X(t_1,t_2) \\ R_X(t_2,t_1) & R_X(t_2,t_2) \end{pmatrix}.$$
Il nous manque donc les valeurs $R_X(t_2 - t_1) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ pour $t_1 \neq t_2$.