

Téléphone : +41 21 693 24 27
Fax : +41 21 693 28 68
E-mail : dimitrios.lignos@epfl.ch
Site web : <http://resslab.epfl.ch>
Address: EPFL ENAC IIC RESSLAB
GC B3 485, Station 18,
CH-1015, Lausanne

Exercise #3: End-restrained members in compression – buckling determinant

Problem Statement

The steel column shown in Figure 1a has a pin at its bottom and it is restrained at the top by an elastic beam that is fixed at its far end. At the top end of the column there is no deflection. The slope at the column top equals the slope at the beam end. The moments oppose each other as shown in Figure 1b. (assume perfect column without any imperfections). In this case,

$$M_{AB} = \frac{4EI_B}{L_B} \theta_A = a\theta_A = av'(0)$$

The symbol, a , is a spring constant that is $a = \frac{4EI_B}{L_B}$ when the far end (B) of the beam is fixed; and when the far end (B) of the beam is pinned, $a = \frac{3EI_B}{L_B}$.

Assume that the beam is an IPE 300; the column is an HEA300. Both members are made of S355 steel ($E = 210\text{GPa}$). Assume that $L_C = 4\text{m}$ and $L_B = 6\text{m}$. Compute the following:

1. Derive the differential equations of equilibrium of the column by assuming that the far end of the beam (point B) is fixed.
2. Derive the buckling determinant of the column based on the employed boundary conditions of the problem.
3. Compute the first critical load of the column and express it as a function of the Euler load, N_E ; what would be the effective length in this case?
4. Compute the general solution for $v(x)$.
5. How much does the critical load change if the far end of the beam (point B) is pinned?

You can use MATLAB (or equivalent) for your computations

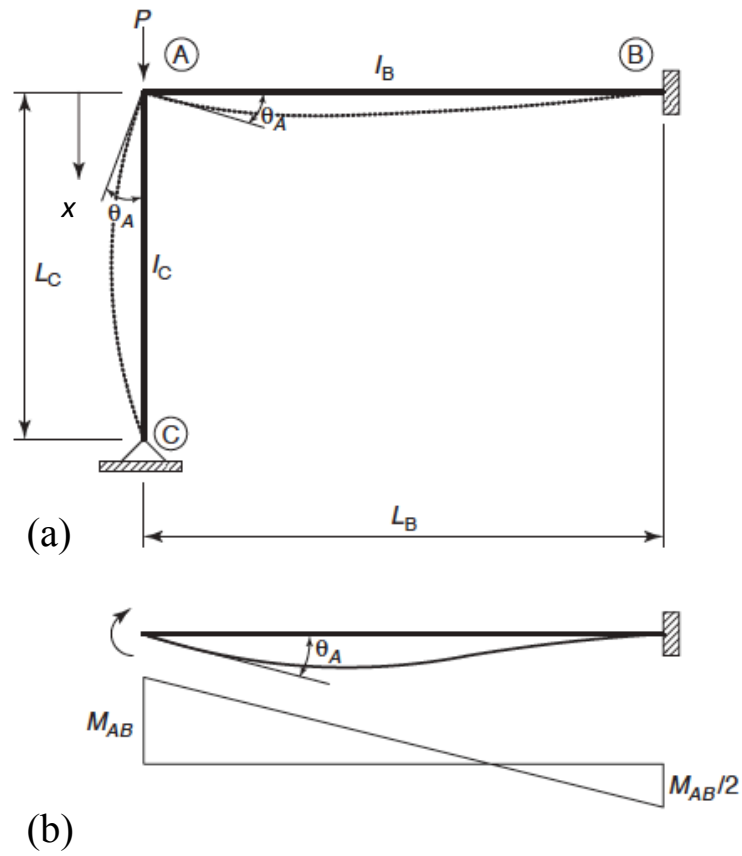


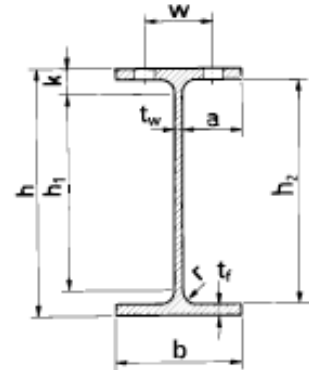
Figure 1. Restrainted column as part of a frame

Die Profile PER, IPEo und IPEv sind im Walzprogramm einzelner Werke aufgeführt. PEA 80 und PEA 100 sind ebenfalls normiert, aber kaum wirtschaftlich.

Im allgemeinen nur ab Werk lieferbar.
Mindestmengen und Termine beachten.

Les profilés PER, IPEo et IPEv figurent dans le programme de laminage de quelques aciéries. Les PEA 80 et PEA 100, également normalisés, sont peu économiques.

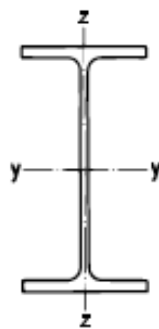
En général livrable d'usine uniquement. Tenir compte des quantités minimales et des délais.



Walztoleranzen siehe Seite 116

Tolérances de laminage voir p. 116

IPE	m kg/m	Profilmasse Dimensions de la section					Konstruktionsmasse Dimensions de construction						Oberfläche Surface		IPE
		h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	h ₁ mm	k mm	a mm	h ₂ mm	w mm	Ø _{max}	U _m m ² /m	U _t m ² /t	
80	6,0	80	46	3,8	5,2	5	60	10	21	70			0,328	54,8	80
100	8,1	100	55	4,1	5,7	7	74	13	25	89			0,400	49,5	100
120	10,4	120	64	4,4	6,3	7	92	14	29	107	36	M10	0,475	45,6	120
140	12,9	140	73	4,7	6,9	7	112	14	34	126	38	M10	0,551	42,6	140
160	15,8	160	82	5,0	7,4	9	126	17	38	145	44	M12	0,623	39,4	160
180	18,8	180	91	5,3	8,0	9	146	17	42	164	50	M12	0,698	37,1	180
200	22,4	200	100	5,6	8,5	12	158	21	47	183	56	M12	0,768	34,3	200
220	26,2	220	110	5,9	9,2	12	178	21	52	202	60	M16	0,848	32,4	220
240	30,7	240	120	6,2	9,8	15	190	25	56	220	68	M16	0,922	30,0	240
270	36,1	270	135	6,6	10,2	15	220	25	64	250	72	M20	1,04	28,8	270
300	42,2	300	150	7,1	10,7	15	248	26	71	279	80	M20	1,16	27,5	300
330	49,1	330	160	7,5	11,5	18	270	30	76	307	86	M24	1,25	25,5	330
360	57,1	360	170	8,0	12,7	18	298	31	81	335	90	M24	1,35	23,6	360
400	66,3	400	180	8,6	13,5	21	330	35	85	373	96	M27	1,47	22,2	400
450	77,6	450	190	9,4	14,6	21	378	36	90	421	106	M27	1,61	20,7	450
500	90,7	500	200	10,2	16,0	21	426	37	94	468	110	M27	1,74	19,2	500
550	106	550	210	11,1	17,2	24	468	41	99	516	120	M27	1,88	17,7	550
600	122	600	220	12,0	19,0	24	514	43	104	562	120	M27	2,02	16,6	600
750 x 137		753	263	11,5	17,0	17	685	34	126	719	120	M27	2,51	18,3	750x137
750 x 147		753	265	13,2	17,0	17	685	34	126	719	120	M27	2,51	17,1	750x147
750 x 173		762	267	14,4	21,6	17	685	39	126	719	120	M27	2,53	14,6	750x173
750 x 196		770	268	15,6	25,4	17	685	42	126	719	120	M27	2,55	13,0	750x196
PEA															PEA
120	8,7	118	64	3,8	5,1	7	93	12	30	107	36	M10	0,472	54,5	120
140	10,5	137	73	3,8	5,6	7	111	13	34	126	38	M10	0,547	52,1	140
160	12,7	157	82	4,0	5,9	9	127	15	39	145	44	M12	0,619	48,7	160
180	15,4	177	91	4,3	6,5	9	145	16	43	164	50	M12	0,694	45,1	180
200	18,4	197	100	4,5	7,0	12	159	19	47	183	56	M12	0,764	41,5	200
220	22,2	217	110	5,0	7,7	12	177	20	52	202	60	M16	0,843	38,0	220
240	26,2	237	120	5,2	8,3	15	189	24	57	220	68	M16	0,918	35,0	240
270	30,7	267	135	5,5	8,7	15	219	24	64	250	72	M20	1,04	33,9	270
300	36,5	297	150	6,1	9,2	15	247	25	71	279	80	M20	1,16	31,8	300
330	43,0	327	160	6,5	10,0	18	271	28	76	307	86	M24	1,25	29,1	330
360	50,2	357	170	6,6	11,5	18	297	30	81	334	90	M24	1,35	26,9	360
400	57,4	397	180	7,0	12,0	21	331	33	86	373	96	M27	1,46	25,4	400
450	67,2	447	190	7,6	13,1	21	377	35	91	421	106	M27	1,60	23,8	450
500	79,4	497	200	8,4	14,7	21	425	36	95	468	110	M27	1,74	21,9	500
550	92,1	547	210	9,0	15,7	24	467	40	100	516	120	M27	1,88	20,4	550
600	108	597	220	9,8	17,5	24	513	42	105	562	120	M27	2,01	18,6	600



$$A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r) t_f$$

$$A_w = (h - t_f) \cdot t_w \quad W_{ely} = \frac{I_y}{h/2}$$

$$S_y = \frac{1}{2} W_{ply} \quad \bar{W}_y = \frac{I_y}{(h - t_f)/2}$$

$$S_z = \frac{1}{2} W_{plz} \quad W_{elz} = \frac{I_z}{b/2}$$

Maximale Lagerlängen /
Longueurs maximales en stock:

$h \leq 180$ 18 m

$h \geq 200$ 24 m

EURONORM 19 - 57,
DIN 1025/5, ASTM A 6,
Werksnorm / Norme d'usine

○ Das Verfahren PP nach SIA 263 ist
für dieses Profil aus S355 bei reiner
Biegung ($n = 0$) nicht anwendbar!

* Auch in S355J0 oder S355J2 ab
Schweizer Lager erhältlich.

○ La méthode PP selon SIA 263 n'est
pas applicable pour ce profilé en
acier S355 en flexion simple ($n = 0$)!

* Livrable en S355J0 ou S355J2 du
stock suisse.

IPE	m kg/m	Statische Werte / Valeurs statiques												
		A mm ²	A _v mm ²	A _w mm ²	I _y mm ⁴	W _{ely} mm ³	W _y mm ³	W _{ply} mm ³	i _y mm	I _z mm ⁴	W _{elz} mm ³	W _{plz} mm ³	i _z mm	K = I _x mm ⁴
					x 10 ⁶	x 10 ³	x 10 ³	x 10 ³		x 10 ⁶	x 10 ³	x 10 ³		x 10 ⁶
80*	6,0	764	358	284	0,801	20,0	21,4	23,2	32,4	0,085	3,69	5,82	10,5	0,0067
100*	8,1	1030	508	387	1,71	34,2	36,3	39,4	40,7	0,159	5,79	9,15	12,4	0,0115
120*	10,4	1320	631	500	3,18	53,0	55,9	60,7	49,0	0,277	8,65	13,6	14,5	0,0169
140*	12,9	1640	764	626	5,41	77,3	81,3	88,3	57,4	0,449	12,3	19,2	16,5	0,0240
160*	15,8	2010	966	763	8,69	109	114	124	65,8	0,683	16,7	26,1	18,4	0,0353
180*	18,8	2390	1125	912	13,2	146	154	166	74,2	1,01	22,2	34,6	20,5	0,0472
200*	22,4	2850	1400	1070	19,4	194	203	221	82,6	1,42	28,5	44,6	22,4	0,0685
220*	26,2	3340	1588	1240	27,7	252	263	285	91,1	2,05	37,3	58,1	24,8	0,0898
240*	30,7	3910	1914	1430	38,9	324	338	367	99,7	2,84	47,3	73,9	26,9	0,127
270*	36,1	4590	2214	1710	57,9	429	446	484	112	4,20	62,2	97,0	30,2	0,157
300*	42,2	5380	2568	2050	83,6	557	578	628	125	6,04	80,5	125	33,5	0,198
330*	49,1	6260	3081	2390	117,7	713	739	804	137	7,88	98,5	154	35,5	0,276
360*	57,1	7270	3514	2780	162,7	904	937	1020	150	10,4	123	191	37,9	0,371
400*	66,3	8450	4269	3320	231,3	1160	1200	1310	165	13,2	146	229	39,5	0,504
450*	77,6	9880	5085	4090	337,4	1500	1550	1700	185	16,8	176	276	41,2	0,661
500*	90,7	11600	5987	4940	482,0	1930	1990	2190	204	21,4	214	336	43,1	0,886
550	106	13400	7234	5910	671,2	2440	2520	2790	223	26,7	254	401	44,5	1,22
600	122	15600	8378	6970	920,8	3070	3170	3510	243	33,9	308	486	46,6	1,65
750 x 137		17500	9290	8460	1599	4250	4340	4860	303	51,7	393	614	54,4	1,36
750 x 147		18700	10540	9720	1661	4410	4510	5110	298	52,9	399	631	53,1	1,57
750 x 173		22100	11640	10700	2058	5400	5560	6220	305	68,7	515	810	55,7	2,71
750 x 196		25100	12730	11600	2403	6240	6450	7170	310	81,8	610	959	57,1	4,06
PEA														
120	8,7	1100	542	428	2,57	43,8	45,8	49,9	48,3	0,224	7,00	11,0	14,2	0,0101
140	10,5	1340	620	501	4,35	63,3	66,0	71,6	57,0	0,364	9,98	15,5	16,5	0,0133
160	12,7	1620	780	604	6,89	87,8	91,2	99,1	65,3	0,544	13,3	20,7	18,3	0,0191
180	15,4	1960	920	733	10,6	120	124	135	73,7	0,819	18,0	28,0	20,5	0,0265
200	18,4	2350	1147	855	15,9	162	167	182	82,3	1,17	23,4	36,5	22,3	0,0402
220	22,2	2830	1355	1050	23,2	214	222	240	90,5	1,71	31,2	48,5	24,6	0,0559
240	26,2	3330	1631	1190	32,9	278	288	312	99,4	2,40	40,0	62,4	26,8	0,0820
270	30,7	3920	1875	1420	49,2	368	381	412	112	3,58	53,0	82,3	30,2	0,101
300	36,5	4650	2225	1760	71,7	483	498	542	124	5,19	69,2	107	33,4	0,131
330	43,0	5470	2699	2060	102	626	645	702	137	6,85	85,6	133	35,4	0,190
360	50,2	6400	2972	2280	145	812	839	907	151	9,44	111	172	38,4	0,269
400	57,4	7310	3578	2700	203	1020	1050	1140	167	11,7	130	202	40,0	0,350
450	67,2	8560	4226	3300	298	1330	1370	1490	186	15,0	158	246	41,9	0,462
500	79,4	10100	5047	4050	429	1730	1780	1950	206	19,4	194	302	43,8	0,636
550	92,1	11700	6030	4780	600	2190	2260	2480	226	24,3	232	362	45,5	0,879
600	108	13700	7014	5680	829	2780	2860	3140	246	31,2	283	442	47,7	1,21

Die Profile HEAA sind im Walzprogramm einzelner Werke aufgeführt.

Anstelle des nicht mehr gewalzten Profils HEA 1100 können HL-Profile verwendet werden, siehe Seiten 40/41.

w_1 mit \varnothing_{\max} nur für versetzte Schrauben.

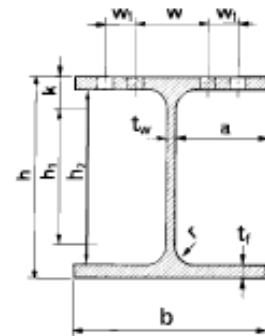
Walttoleranzen siehe Seite 116

Les profilés HEAA figurent dans le programme de laminage de quelques aciéries.

Au lieu du profilé HEA 1100 qui n'est plus laminé, on utilisera des profilés HL (voir pages 40/41).

w_1 avec \varnothing_{\max} seulement pour boulons décalés.

Tolérances de laminage voir page 116



HEA	m kg/m	Profilmasse Dimensions de la section					Konstruktionsmasse Dimensions de construction								Oberfläche Surface		HEA
		h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	h ₁ mm	k mm	a mm	h ₂ mm	w mm	w ₁ mm	Ø _{max}	U _m m ² /m	U _t m ² /t		
100	16,7	96	100	5	8	12	56	20	47	80	56		M12	0,561	33,6	100	
120	19,9	114	120	5	8	12	74	20	57	98	66		M16	0,677	34,0	120	
140	24,7	133	140	5,5	8,5	12	91	21	67	116	76		M20	0,794	32,1	140	
160	30,4	152	160	6	9	15	104	24	77	134	86		M20	0,906	29,8	160	
180	35,5	171	180	6	9,5	15	121	25	87	152	100		M24	1,02	28,7	180	
200	42,3	190	200	6,5	10	18	134	28	96	170	110		M24	1,14	26,9	200	
220	50,5	210	220	7	11	18	152	29	106	188	120		M24	1,26	24,9	220	
240	60,3	230	240	7,5	12	21	164	33	116	206	94	35	M24	1,37	22,7	240	
260	68,2	250	260	7,5	12,5	24	176	37	126	225	100	40	M24	1,48	21,7	260	
280	76,4	270	280	8	13	24	196	37	136	244	110	45	M24	1,60	21,0	280	
300	88,3	290	300	8,5	14	27	208	41	145	262	120	45	M27	1,72	19,5	300	
320	97,6	310	300	9	15,5	27	224	43	145	279	120	45	M27	1,76	18,0	320	
340	105	330	300	9,5	16,5	27	242	44	145	297	120	45	M27	1,79	17,1	340	
360	112	350	300	10	17,5	27	260	45	145	315	120	45	M27	1,83	16,4	360	
400	125	390	300	11	19	27	298	46	144	352	120	45	M27	1,91	15,3	400	
450	140	440	300	11,5	21	27	344	48	144	398	120	45	M27	2,01	14,4	450	
500	155	490	300	12	23	27	390	50	144	444	120	45	M27	2,11	13,6	500	
550	166	540	300	12,5	24	27	438	51	143	492	120	45	M27	2,21	13,3	550	
600	178	590	300	13	25	27	486	52	143	540	120	45	M27	2,31	13,0	600	
650	190	640	300	13,5	26	27	534	53	143	588	120	45	M27	2,41	12,7	650	
700	204	690	300	14,5	27	27	582	54	142	636	120	45	M27	2,50	12,3	700	
800	224	790	300	15	28	30	674	58	142	734	130	40	M27	2,70	12,0	800	
900	252	890	300	16	30	30	770	60	142	830	130	40	M27	2,90	11,5	900	
1000	272	990	300	16,5	31	30	868	61	141	928	130	40	M27	3,10	11,4	1000	

Die Profile HEAA sind im Walzprogramm einzelner Werke aufgeführt.

Anstelle des nicht mehr gewalzten Profils HEA 1100 können HL-Profile verwendet werden, siehe Seiten 40/41.

w_1 mit \varnothing_{\max} nur für versetzte Schrauben.

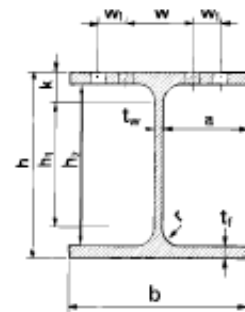
Walztoleranzen siehe Seite 116

Les profilés HEAA figurent dans le programme de laminage de quelques aciéries.

Au lieu du profilé HEA 1100 qui n'est plus laminé, on utilisera des profilés HL (voir pages 40/41).

w_1 avec \varnothing_{\max} seulement pour boulons décalés.

Tolérances de laminage voir page 116



I_T

HEA	m kg/m	Profilmasse Dimensions de la section					Konstruktionsmasse Dimensions de construction							Oberfläche Surface		HEA
		h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	h ₁ mm	k mm	a mm	h ₂ mm	w mm	w ₁ mm	Ø _{max}	U _m m ² /m	U _t m ² /t	
100	16,7	96	100	5	8	12	56	20	47	80	56		M12	0,561	33,6	100
120	19,9	114	120	5	8	12	74	20	57	98	66		M16	0,677	34,0	120
140	24,7	133	140	5,5	8,5	12	91	21	67	116	76		M20	0,794	32,1	140
160	30,4	152	160	6	9	15	104	24	77	134	86		M20	0,906	29,8	160
180	35,5	171	180	6	9,5	15	121	25	87	152	100		M24	1,02	28,7	180
200	42,3	190	200	6,5	10	18	134	28	96	170	110		M24	1,14	26,9	200
220	50,5	210	220	7	11	18	152	29	106	188	120		M24	1,26	24,9	220
240	60,3	230	240	7,5	12	21	164	33	116	206	94	35	M24	1,37	22,7	240
260	68,2	250	260	7,5	12,5	24	176	37	126	225	100	40	M24	1,48	21,7	260
280	76,4	270	280	8	13	24	196	37	136	244	110	45	M24	1,60	21,0	280
300	88,3	290	300	8,5	14	27	208	41	145	262	120	45	M27	1,72	19,5	300
320	97,6	310	300	9	15,5	27	224	43	145	279	120	45	M27	1,76	18,0	320
340	105	330	300	9,5	16,5	27	242	44	145	297	120	45	M27	1,79	17,1	340
360	112	350	300	10	17,5	27	260	45	145	315	120	45	M27	1,83	16,4	360
400	125	390	300	11	19	27	298	46	144	352	120	45	M27	1,91	15,3	400
450	140	440	300	11,5	21	27	344	48	144	398	120	45	M27	2,01	14,4	450
500	155	490	300	12	23	27	390	50	144	444	120	45	M27	2,11	13,6	500
550	166	540	300	12,5	24	27	438	51	143	492	120	45	M27	2,21	13,3	550
600	178	590	300	13	25	27	486	52	143	540	120	45	M27	2,31	13,0	600
650	190	640	300	13,5	26	27	534	53	143	588	120	45	M27	2,41	12,7	650
700	204	690	300	14,5	27	27	582	54	142	636	120	45	M27	2,50	12,3	700
800	224	790	300	15	28	30	674	58	142	734	130	40	M27	2,70	12,0	800
900	252	890	300	16	30	30	770	60	142	830	130	40	M27	2,90	11,5	900
1000	272	990	300	16,5	31	30	868	61	141	928	130	40	M27	3,10	11,4	1000