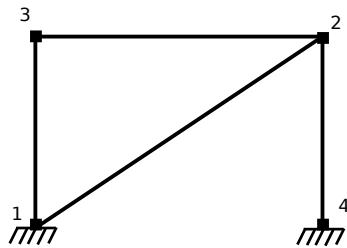


**Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie théorique.***Aucun matériel autorisé, pas de calculatrice ni de feuille de brouillon.**45 min, 19 points ( $\frac{1}{3}$  de l'examen écrit)***Notez vos réponses sur ce document (brouillon mis à disposition)**

1. (2 points) Considérer la structure suivante constituée d'éléments barres à deux noeuds.



Donner la taille de la matrice de rigidité globale.

Donner le profil de cette matrice en indiquant les coefficients non nuls par des croix.

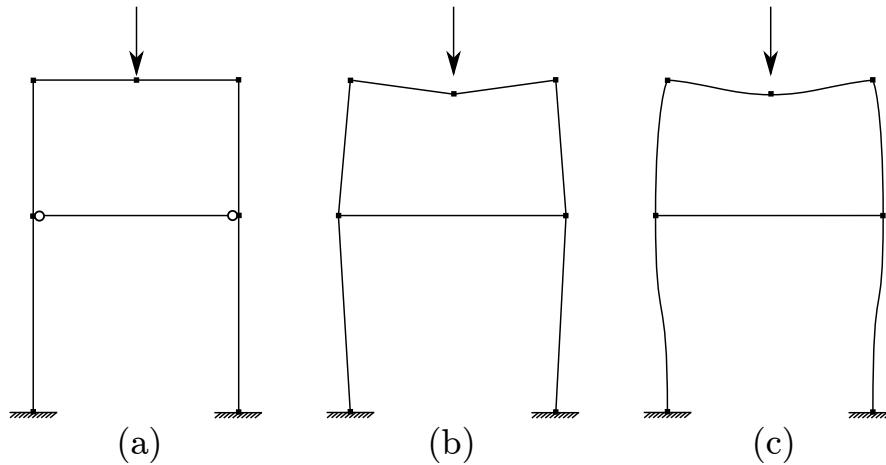
2. (3 points) Dérivez le passage de la forme forte de l'équilibre à la forme faible pour un élément barre 1D.

3. (2 points) Dessinez la géométrie de l'élément, indiquez le type d'interpolation et la taille de la matrice de rigidité (pas de calculs demandés) pour les éléments suivants (vus en cours) :
- Élément barre (1D) à 4 noeuds.
  - Élément quadrilatère à 8 noeuds.
  - Élément cube à 8 noeuds.

4. (2 points) Quel est l'intérêt des coordonnées naturelles pour construire un élément ?

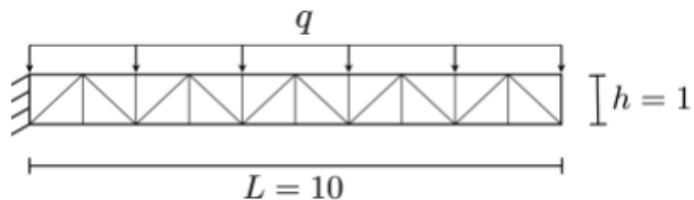
5. (2 points) Détaillez le calcul de la matrice de masse consistante pour un élément barre à 2 noeuds.  
Vous commencerez vos calculs à partir de la définition de la matrice de masse consistante.

6. (2 points) Soit la structure de poutres définie en (a) dans la figure suivante. Parmis les déformées (b) et (c), laquelle est fausse ? Expliquez votre choix.



Structure d'éléments poutres à deux noeuds.

7. On cherche à valider un code éléments finis en étudiant le problème d'une poutre console modélisée comme un milieu continu 2D :



La poutre est de longueur  $L = 10$  et de hauteur  $h = 1$  et est soumise à une charge verticale uniformément répartie.

- a) (2 points)

On effectue un premier calcul avec le maillage ci-dessus.

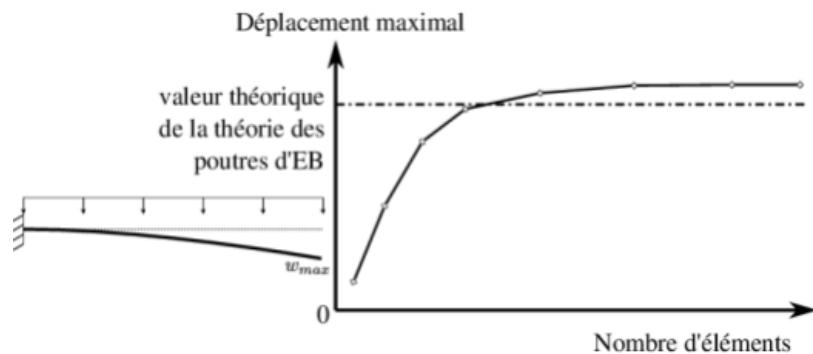
Expliquez pourquoi l'utilisation d'éléments Triangles à 3 noeuds (T3) n'est pas adaptée dans ce cas. Quel type d'élément serait mieux adapté pour le même maillage ? (2 points)

- b) (2 points) Notons  $N$  le nombre d'éléments dans le sens de la poutre et  $M$  le nombre d'éléments dans l'épaisseur de la poutre, par exemple pour le maillage de la Figure 1 :  $N = 10$  et  $M = 1$ . On effectue une série de calculs en faisant varier  $N$  et/ou  $M$  en raffinant le maillage suivant 3 stratégies de raffinement différentes :

- Stratégie n°1 : on augmente uniquement N en gardant M = 1, par ex : N = 20, 100, 1000
- Stratégie n°2 : on augmente uniquement M en gardant N = 10, par ex : M = 2, 5, 10
- Stratégie n°3 : on augmente N et M avec N = 10\*M par ex : (N,M) = (20,2) , (50,5), (100,10) ...

Indiquez, en justifiant votre réponse, quelle est la meilleure stratégie de raffinement ? Quel(s) problème(s) posent les deux autres stratégies ?

- c) (2 points) À partir de la série de calculs de la question b, nous avons reporté sur la figure ci-dessous l'évolution de la valeur maximale du déplacement (en valeur absolue) obtenue pour différents maillages :



On observe que la solution éléments finis 2D converge vers une valeur légèrement différente de celle correspondant à la solution d'une poutre console dans le cadre de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

Proposez une raison pouvant expliquer l'origine de cette différence.