

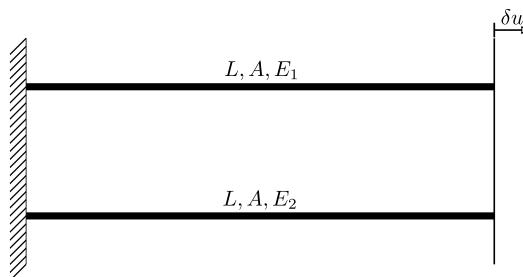
Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

*Notes et livre du cours autorisés
1h30, 24 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)*

Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

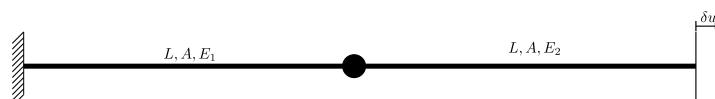
Exercice 1 : Élément barre — 10 points

On considère deux barres de taille L et de section A . Ces deux barres ont un module de Young E_1 et E_2 respectivement. On se propose d'étudier deux configurations géométriques.

A) Barres en parallèle — 5 points

Les barres sont fixées à des plans rigides à gauche et à droite. On impose uniformément un déplacement δu sur le plan de droite. Le plan de de gauche est encastré.

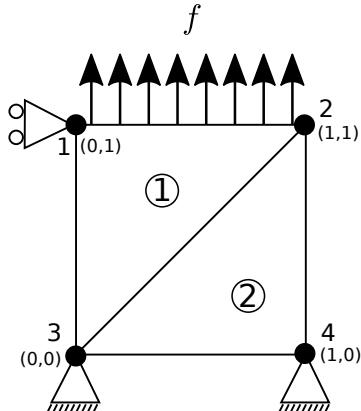
- (A.a) Quel type d'élément fini allez-vous utiliser (type de théorie, ordre d'interpolation). Justifiez votre réponse. (1 point)
- (A.b) Donnez la matrice de rigidité du problème. (1 point)
- (A.c) Donnez le nombre de degrés de libertés de ce problème (en retirant les degrés de liberté bloqués) et trouvez le déplacement $u(x)$ en tout point $x \in [0, L]$ pour chaque barre. (1 point)
- (A.d) Pour chacune des barres, donnez la contrainte $\sigma(x)$ en tout point $x \in [0, L]$. Pour trouver cette expression, vous utiliserez les matrices B . (1 point)
- (A.e) Donnez la réaction d'appui à l'encastrement à gauche. (1 point)

B) Barres en série — 5 points

- (B.a) Donnez la matrice de rigidité du problème. (1 point)
- (B.b) Donnez la matrice de rigidité réduite (prise en compte des conditions limites). (1 point)
- (B.c) Résoudre le problème et donner le déplacement en tout point de chaque barre. (1 point)
- (B.d) Donnez la contrainte $\sigma(x)$ en tout point $x \in [0, 2L]$. Pour trouver cette expression, vous utiliserez les matrices B . (1 point)
- (B.e) Donnez la réaction d'appui à l'encastrement à gauche. (1 point)

Exercice 2 : Patch test — 14 points

On considère un bloc, que l'on va modéliser avec deux éléments triangles T3. Les coordonnées des noeuds sont données sur la figure.



On considérera un matériau sans effet de poisson ($\nu = 0$) avec un module de Young E . La surface inférieure est complètement encastrée. La surface supérieure subit un chargement vertical uniforme f .

On considérera l'hypothèse des déformations planes, de telle sorte que la matrice constitutive sera :

$$[D] = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

- (a) Selon ces hypothèses, quelle sera la déformée ? Justifiez que le noeud 2 ne se déplace que verticalement, ce qui permet d'éliminer un degré de liberté. (1 point)
- (b) Donnez la matrice de connectivité ainsi que la matrice des numéros d'équation pour cette structure. (1 point)
- (c) Donnez les fonctions d'interpolation pour les éléments ① et ②. Vérifiez que ces fonctions d'interpolation vérifient les propriétés requises. (2 points)
- (d) Donnez la matrice B pour l'élément ①. Tout en justifiant votre réponse vous donnerez cette dernière en reportant les degrés de libertés en correspondance, comme ci dessous :

$$[B] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \dots & u_n & v_n \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1 point)

- (e) Donnez la matrice de rigidité de l'élément ①, $K^{(1)}$, portant sur les déplacements verticaux uniquement. Vous reporterez encore une fois les degrés de libertés en correspondance comme pour la question précédente. (3 points)
- (f) En supposant que la matrice de rigidité locale de l'élément ② prend la forme :

$$[K^{(2)}] = E \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Assemblez la matrice de rigidité globale, exprimée en fonction de E . (1,5 points)

- (g) Donnez la matrice de rigidité réduite qui prend en compte tous les blocages. (1 point)
- (h) Donnez le vecteur nodal de déplacement par la méthode des éléments finis. (1,5 points)
- (i) Calculez la contrainte dans les deux éléments en utilisant les matrices B et D . Votre élément passe-t-il le patch test ? (2 points).