

Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés
1h30, 20 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

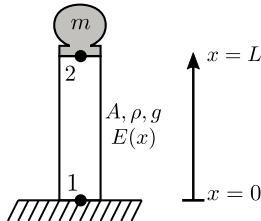
Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

Exercice 1 : Element barre — 12 points

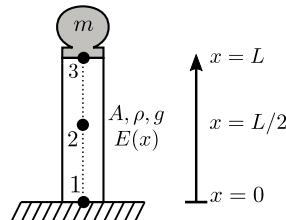
On considère le système suivant avec une barre verticale encastrée en $x = 0$. Cette barre est faite d'un matériau composite de telle sorte que son module de Young varie linéairement E_1 et E_2 avec :

$$E(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) E_1 + \frac{x}{L} E_2 \quad \forall x \in [0, L]$$

Son chargement est formé par son poid propre et une masse m posée à son sommet. On se propose de modéliser ce système à l'aide de différents types d'éléments finis.

**Pour un unique élément P1 (linéaire)**

- Explicitez le calcul de la matrice de raideur totale (sans blocages) (1 point)
- Explicitez le calcul du vecteur des forces consistantes. Vous noterez R la réaction du support (1 point)
- Donnez le déplacement satisfaisant l'équilibre (1 point)
- Donnez l'expression des contraintes $\sigma(x)$ en tout point $x \in [0, L]$. (0.5 point)
- Que pensez-vous de cet état de contraintes ? (0.5 point)

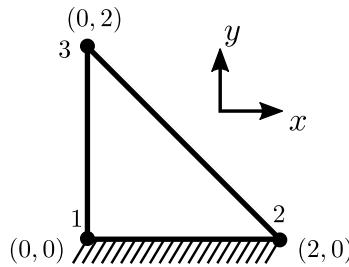
**Pour un unique élément P2 (quadratique)**

- Donnez les fonctions d'interpolation (1 point)
- Explicitez le calcul de la matrice B (1 point)
- Donnez l'expression intégrale (aucun calcul lourd) du coefficient K_{23} de la matrice de raideur en fonction de E_1, E_2, A, L et des fonctions d'interpolations N_1, N_2, N_3 . (1 point)
- Combien de points de quadrature sont nécessaires pour calculer cette intégrale ? (0.5 point)
- Explicitez le calcul du vecteur des forces consistantes en fonction de A, ρ, g, L et R (2 points)

- (f) En considérant $u_1 = 0$, $u_2 = \delta$ les déplacements aux noeuds 1 et 2, calculer le déplacement au noeud u_3 satisfaisant l'équilibre en fonction de K_{11} , K_{22} , K_{33} , K_{12} , K_{13} et K_{23} (1 point)
- (g) Pour cet état de déplacement, donnez l'expression des contraintes $\sigma(x)$ en tout point $x \in [0, L]$, en fonction de L , E_1 , E_2 , A , u_3 et δ . (1 point)
- (h) Que pensez vous de cet état de contrainte ? (0.5 point)

Exercice 2 : Triangle T3 — 8 points

On considère dans cet exercice l'élément T3 ci dessous :



- (a) Donnez les degrés de libertés nodaux (déplacements et réactions), en indiquant à chaque fois ce qui est connu/inconnu ? (0.5 point)
- (b) Donnez les fonctions d'interpolations en respectant le système de coordonnées donné (2 points)
- (c) Explicitez le calcul de la matrice B (1 point)
- (d) Donnez l'expression intégrale (pas de calcul) de la matrice de raideur $[K]$ (0.5 point)
- (e) Donnez l'expression de la matrice de raideur réduite en fonction des K_{ij} (1 point)
- (f) Calculez les coefficients de la matrice de raideur réduite en fonction des colonnes de la matrice B . Vous noterez B_i la i -ème colonne. (1 point)
- (g) Calculez la matrice de raideur réduite. (1 point)
- (h) En imposant le déplacement vertical $u_{3y} = \delta$, trouver le déplacement horizontal. (0.5 point)
- (i) Ceci est-il physique ? Justifiez votre réponse (0.5 point)