

**Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.**

Notes et livre du cours autorisés  
1h30, 20 points ( $\frac{2}{3}$  de la note de l'examen écrit)

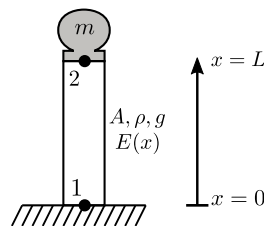
**Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds**

**Exercice 1 : Element barre — 12 points**

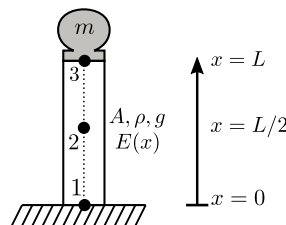
On considère le système suivant avec une barre verticale encastrée en  $x = 0$ . Cette barre est faite d'un matériau composite de telle sorte que son module de Young varie linéairement  $E_1$  et  $E_2$  avec :

$$E(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) E_1 + \frac{x}{L} E_2 \quad \forall x \in [0, L]$$

Son chargement est formé par son poid propre et une masse  $m$  posée à son sommet. On se propose de modéliser ce système à l'aide de différents types d'éléments finis.

**Pour un unique élément P1 (linéaire)**

- Explicitiez le calcul de la matrice de raideur totale (sans blocages) (1 point)
- Explicitiez le calcul du vecteur des forces consistantes. Vous noterez  $R$  la réaction du support (1 point)
- Donnez le déplacement satisfaisant l'équilibre (1 point)
- Donnez l'expression des contraintes  $\sigma(x)$  en tout point  $x \in [0, L]$ . (0.5 point)
- Que pensez-vous de cet état de contraintes ? (0.5 point)

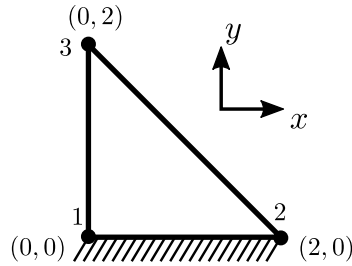
**Pour un unique élément P2 (quadratique)**

- Donnez les fonctions d'interpolation (1 point)
- Explicitiez le calcul de la matrice  $B$  (1 point)
- Donnez l'expression intégrale (aucun calcul lourd) du coefficient  $K_{23}$  de la matrice de raideur en fonction de  $E_1, E_2, A, L$  et des fonctions d'interpolations  $N_1, N_2, N_3$ . (1 point)
- Combien de points de quadrature sont nécessaires pour calculer cette intégrale ? (0.5 point)
- Explicitiez le calcul du vecteur des forces consistantes en fonction de  $A, \rho, g, L$  et  $R$  (2 points)

- (f) En considérant  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = \delta$  les déplacements aux noeuds 1 et 2, calculer le déplacement au noeud  $u_3$  satisfaisant l'équilibre en fonction de  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{13}$  et  $K_{23}$  (1 point)
- (g) Pour cet état de déplacement, donnez l'expression des contraintes  $\sigma(x)$  en tout point  $x \in [0, L]$ , en fonction de  $L$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $A$ ,  $u_3$  et  $\delta$ . (1 point)
- (h) Que pensez vous de cet état de contrainte ? (0.5 point)

**Exercice 2 : Triangle T3 — 8 points**

On considère dans cet exercice l'élément T3 ci dessous :



- (a) Donnez les degrés de libertés nodaux (déplacements et réactions), en indiquant à chaque fois ce qui est connu/inconnu ? (0.5 point)
- (b) Donnez les fonctions d'interpolations en respectant le système de coordonnées donné (2 points)
- (c) Explicitiez le calcul de la matrice  $B$  (1 point)
- (d) Donnez l'expression intégrale (pas de calcul) de la matrice de raideur  $[K]$  (0.5 point)
- (e) Donnez l'expression de la matrice de raideur réduite en fonction des  $K_{ij}$  (1 point)
- (f) Calculez les coefficients de la matrice de raideur réduite en fonction des colonnes de la matrice  $B$ . Vous noterez  $B_i$  la  $i$ -ème colonne. (1 point)
- (g) Calculez la matrice de raideur réduite. (1 point)
- (h) En imposant le déplacement vertical  $u_{3y} = \delta$ , trouver le déplacement horizontal. (0.5 point)
- (i) Ceci est-il physique ? Justifiez votre réponse (0.5 point)